UC-NRLF
B 5 149 051

Digitized by Google

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received Oct, 1898.
Accession No. 74181. Class No.

Digitized by Google

# Jahrbuch

über die

# Fortschritte der Mathematik

begründet

von

**Carl Ohrtmann.**

---

Im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

**Felix Müller** und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

**Emil Lampe.**

---

**Band XXIV.**

Jahrgang 1892.

---

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1895.

74181

# Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

*Acta Math.:* Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4⁰. XVI.

*Acta Soc. Fennicae:* Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors 4⁰. XVII.

*Almeida J.:* Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier. Paris. Au Bureau du Journal de Physique. 8⁰. (3) I.

*American J.:* American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4⁰. XIV.

*Amst. Versl. en Meded.:* Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Academie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. (3) IX.

*Annali di Mat.:* Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, E. Betti, F. Casorati. Milano. 4⁰. (2) XX.

*Annals of Math.:* Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann and Co. New York. 4⁰. VI, VII.

*Ann. de Chim. et Phys.:* Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Pasteur etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8⁰. (6) XXV, XXVI, XXVII.

*Ann. de l'Éc. Norm.:* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4⁰. (3) IX.

*Arch. f. Art.:* Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres. Redaction: Schröder, Meinardus. Berlin. Mittler u. Sohn. 8⁰. XCIX.

*Arch. Néerl:* Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha etc. Harlem. 8⁰. XXVI.

*Assoc. Franç.:* Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 21me session (Congrès de Pau). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson. 8°.

*Astr. Nachr.:* Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von A. Krüger. Kiel. 4°. CXXVIII-CXXX.

*Atti dell' Acc. Pont.:* Atti dell' Accademia Pontaniana. Roma.

*Batt. G.:* Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XXX.

*Belg. Bull.:* Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) XXIII, XXIV.

*Belg. Mém. C.:* Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles. F. Hayez. XLVIII.

*Belg. Mém. S. É.:* Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez. 4°. LII.

*Berl. Abh.:* Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

*Berl. Ber.:* Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1892.

*Berl. Phys. Ges. Verh.:* Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Leipzig. Barth. 8°. XI.

*Bibl. Math.:* Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik, herausgegeben von Gustaf Eneström. Stockholm. 8°. (2) VI.

*Böklen Mitt.:* Mitteilungen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg, herausgegeben von Dr. O. Böklen. Stuttgart. J. B. Metzler. 8°. V.

*Bologna Mem.:* Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (5) II.

*Bologna Rend.:* Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 8°.

*Bordeaux Mém.:* Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

*Brit. Ass. Rep.:* Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1892.

*Brux. S. sc.:* Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.) XVI.

*Cambr. Proc.:* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. VII, VIII.

*Cambr. Trans.:* Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge. XV.

*Časop.:* Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) XXI.

*Centralbl. der Bauverw.:* Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und O. Hossfeld. Berlin. Ernst u. Sohn. 4°. XII.

*Charkow Ges.*: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) III.

*Civiling.:* Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung etc. herausgegeben von Dr. E. Hartig. Leipzig. Arthur Felix. 4°. XXXVIII.

*C. R.:* Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. CXIV, CXV.

*Darboux Bull.:* Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Battaglini etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) XVI.

*Delft Ann. d. l'Éc. Polyt.:* Annales de l'École Polytechnique de Delft. Leiden. E. J. Brill.

*Deutsche Bauztg.:* Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin. E. Toeche.

*Deutsche Math. Ver.:* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Erster Band. 1890-91. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe. Berlin. Georg Reimer. I.

*Dublin Proc.:* Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. (3) III.

*Dublin Trans.:* Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXX.

*Edinb. M. S. Proc.:* Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8°. X.

*Edinb. Proc.:* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XIX.

*Edinb. Trans.:* Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. XXXVII.

*Ed. Times:* Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. Francis Hodgson. LVI, LVII, LVIII.

*Génie civil:* Le Génie civil. Revue générale hebdomadaire des industries françaises et étrangères. Paris.

*Gött. Abh.:* Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°. XXXVIII.

*Gött. Nachr.:* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1892.

*Hamb. Mitt.:* Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°. III.

*Hannov. Zeitschr.*: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, redigirt von Keck. Hannover. Schmorl u. Seefeld. 4°.

*Hoffmann Z.:* Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung der Herren u. s. w. herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XXIII.

*Hoppe Arch.:* Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°. (2) XI.

*Japan Journ.:* Journal of the college of science, imperial university, Japan. Published by the university. Tokyo. 4°.

*J. de l'Éc. Pol.:* Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. Cah. LXII.

*J. de Math. élém.:* Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du Gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de M. de Longchamps. Paris. Delagrave. 8°. (4) I.

*J. de Math. spéc.:* Journal de Mathématiques spéciales à l'usage des canditats aux Écoles Polytechnique, Normale et Centrale, publié sous la direction de M. de Longchamps. Paris. Delagrave. 8°. (4) I.

*J. für Math.:* Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von L. Kronecker (CIX); L. Fuchs (CX). Berlin. G. Reimer. 4°. CIX, CX.

*Johns Hopkins Univ. Circ.:* Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Baltimore. 4°. XI.

*Jordan Z. f. V.:* Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von W. Jordan und C. Steppes. Stuttgart. 8°. XXI.

*Journ. de Math.:* Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Poincaré, H. Resal. Paris. 4°. (4) VIII.

*Kasan Ber.:* Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kasan. (Russisch.) (2) II.

*Kasan Ges.:* Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kasan. (Russisch.) (2) I, II.

*Kiew Nachr.:* Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. (Russisch.) XXXII.

*Kjöb. Skrift.:* Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen.

*Krak. Abh.:* Abhandlungen der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.) XXII.

*Leipz. Abh.:* Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch - physische Klasse. Leipzig. 4°.

*Leipz. Ber.:* Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch - physische Klasse. Leipzig. 8°. XLIV.

*Leopold. Akad.:* Verhandlungen der Kais. Leopoldinisch - Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle. gr. 4°. LVIII.

*Liège Mém.:* Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Bruxelles. Hayez; Paris. Roret. (2) XVII.

*Lisboa Jorn.:* Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

*Lomb. Ist. Rend.:* Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XXV.

*Lond. M. S. Proc.:* Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°. XXIII.

*Lond. Phil. Trans.:* Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXXIII.

*Lond. R. S. Proc.:* Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°. LI, LII.

*Manchester Proc.:* Memoirs and Proceedings of the Manchester literary and philosophical Society. Manchester. 8°.

*Math. Ann.:* Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll, H. Weber gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XL, XLI.

*Mathesis:* Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Hoste; Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) II.

*Mém. Sav. Étr.:* Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4°.

*Messenger:* The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan and Co. 8°. (2) XX, XXI.

*Met. Zeitschr.:* Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben im Auftrage der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. G. Hellmann. Wien. Ed. Hölzel. gr. 8°. IX.

*Mitt. üb. Art. u. Genie:* Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. K. technischen u. administrativen Militär-Comité. Wien. R. v. Waldheim. 8°. XXIII.

*Modena Mem.:* Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4°. (2) VIII.

*Monatsh. f. Math.:* Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich und Em. Weyr. Wien. 8°. III.

*Monthly Notices:* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 8°. LII.

*Mosk. Math. Samml.:* Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) XVI.

*Münch. Abh.:* Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°. XVII.

*Münch. Ber.:* Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. XXII.

*Napoli Rend.:* Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (2) VI.

*Nature:* Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York. Macmillan and Co. 4°. XLV, XLVI, XLVII.

*New York M. S. Bull.:* Bulletin of the New York Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by Th. S. Fiske, H. Jacoby, A. Ziwet. New York. 8°. I, II.

*Nieuw Archief:* Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Amsterdam. 8°. XIX.

*Nouv. Ann.:* Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, rédigé par MM. Ch. Brisse et E. Rouché. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 8°. (3) XI.

*Nuovo Cimento:* Il Nuovo Cimento. Giornale fondato per la fisica e la chimica da C. Matteucci e R. Piria, continuato per la fisica esperimentale e matematica da E. Betti e R. Felici. Pisa. Salvioni. gr. 8°. (3) XXXI, XXXII.

*Nyt Tidss. for Math.:* Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Foldberg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. III.

*Odessa Ges.:* Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch.) XIV.

*Öfversigt af finska vetenskapssocietetens förhandlingar.* Helsingfors. XXXIV.

*Padova Atti:* Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova.

*Palermo Rend.:* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8°. VI.

*Periodico di Mat.:* Periodico di matematica per l'insegnamento secondario pubblicato per cura di A. Lugli. Roma. 8°. VII.

*Petersb. Abh.:* Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. LXIX-LXXI.

*Phil. Mag.:* The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, G. F. Fitzgerald, W. Francis. London. 8°. (5) XXXIII, XXXIV.

*Phys. Ges. St. Petersb.:* Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St. Petersburg. (Russisch.)

*Phys.-Math. Wiss.:* Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.) IX.

*Pisa Ann.:* Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa. 8°.

*Politecnico:* Il Politecnico. Giornale dell'ingegnere architetto civile ed industriale. Milano. Tipografia e Litografia degli Ingegneri. gr. 8°. XL.

*Poske Z.:* Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin. J. Springer. gr. 8°. V.

*Pr.* = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc.

*Prace mat.-fiz.:* Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, hrsg. in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8°. (Polnisch.) III.

*Prag. Ber.:* Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1892.

*Prag. Math. Ges.:* Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft zu Prag. Prag. gr. 8°. 1892.

*Progreso mat.:* El progreso matemático. Periódico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Zaragoza. 8°. II.

*Quart. J.:* The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by N. M. Ferrers, A. Cayley, J. W. L. Glaisher, A. R. Forsyth. London. 8°. XXVI.

*Revue d'Art.:* Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8°. XL, XLI.

*Revue des Quest. sc.:* Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. gr. 8°. (2) I.

*Rivista di Mat.:* Rivista di Matematica, diretta da G. Peano. Torino. 8°. II.

*Rom. Acc. L. Mem.:* Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4°.

*Rom. Acc. L. Rend.:* Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Roma. 4°. (5) I. (Zwei Semester, unterschieden als $I_1$ und $I_2$.)

*Rom. Acc. P. d. N. L.:* Atti della Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei. Roma. 4°. XLV.

*Rozpravy:* Rozpravy české Akademie císaře Frantiska Josefa pro vědy, slovesnost a umění, (II. Cl.). Prag. (Böhmisch.) I.

*Schlömilch Z.:* Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und M. Cantor. Leipzig. Teubner. 8°. XXXVII.

*Hl. A.:* Historisch-litterarische Abteilung (besonders paginirt).

*Silliman J.:* The American Journal of science. Editors: J. D. and E. S. Dana. New Haven, Conn. 8°.

*S. M. F. Bull.:* Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°. XX.

*Soc. Philom. Bull:* Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. 8°. (8) IV.

*Spaczinski's Bote:* Spaczinski's Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik. (Russisch.) 1892.

*Stockh. Akad. Bihang:* Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. 8°. XVIII.

*Stockh. Öfv.:* Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. XLIX.

*Techn. Blätter:* Technische Blätter. Vierteljahrsschrift des Deutschen Polytechnischen Vereines in Böhmen. Redig. v. Ed. Mais etc. Prag. 8°.

*Teixeira J.:* Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. XI.

*Tokio Math. Ges.:* Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch u. Japanisch.) Tokio. 8°. V.

*Torino Atti:* Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. XXVII, XXVIII.

*Torino Mem.:* Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°. (2) XLII.

*Toulouse Ann.:* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 4°. VI.

*Toulouse Mém.:* Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse. Douladoure-Privat. 8°.

*Ungar. Ber.:* Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akad. der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft hrsg. von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. I. Fröhlich. Budapest. 8°.

*Ven. Ateneo:* L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. 8°.

*Ven. Ist. Atti:* Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (7) III.

*Ven. Ist. Mem.:* Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4°.

*Warsch. Nachr.:* Nachrichten der Warschauer Universität. Warschau. (Russisch.)

*Washington Bull.:* Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Washington 8°.

*Wiedemann Ann.:* Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. v. Helmholtz herausgegeben von G. und E. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. XLV, XLVI, XLVII.

*Wien. Bauztg.:* Allgemeine Bauzeitung gegründet von Chr. L. Förster. Redigirt unter Mitwirkung etc. von A. Köstlin. Wien. R. v. Waldheim.

*Wien. Ber.:* Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. CI.

*W. Oestr. Ing. u. Arch.:* Wochenschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°.

*Wolf Z.:* Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXXVII.

*Z. dtsch. Ing.:* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. J. Springer. Berlin. 4°. XXXVI.

*Z. f. Bauwesen:* Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin u. O. Hossfeld. Berlin. Ernst u. Sohn. 4°. XLII.

*Z. Oestr. Ing. u. Arch.:* Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins. Redacteur P. Kortz. Wien. 4°. XLIV.

# Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

## Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

### Capitel 1. Geschichte.

#### A. Biographisch-Litterarisches.

## B. Geschichte einzelner Disciplinen.

## Capitel 2. Philosophie und Pädagogik.

### A. Philosophie.



### B. Pädagogik.

## Zweiter Abschnitt. Algebra.

### Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

## Capitel 3. Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

## Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

### Capitel 1. Niedere Arithmetik.

## Capitel 2. Zahlentheorie.

### A. Allgemeines.

## Fünfter Abschnitt. Reihen.

### Capitel 1. Allgemeines.

## Capitel 2. Besondere Reihen.

Seite

## Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

### Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).



### Capitel 2. Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).



### Capitel 3. Integralrechnung.



### Capitel 4. Bestimmte Integrale.

## Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

### Capitel 7. Variationsrechnung.



## Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

### Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

## Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

### Capitel 1. Principien der Geometrie.



### Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

## Capitel 4. Darstellende Geometrie.



## Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

### A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

## Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

### Capitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.

## Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

### A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.



### B. Theorie der algebraischen Curven.

## C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

### D. Andere specielle Curven.

## Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

### A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.



C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.



D. Andere specielle Raumgebilde.

## B. Hydrostatik.



## Capitel 4. Dynamik.

### A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

## B. Elasticitätstheorie.

## C. Capillarität.



## Capitel 2. Akustik und Optik.

### A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

## C. Geometrische Optik.

## Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

## Capitel 4. Wärmelehre.

### A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.



C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.



## Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

### Capitel 1. Geodäsie.

## Capitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

## Anhang.

# Verzeichnis

## der Herren, welche für den vierundzwanzigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A. Herr Prof. August in Berlin.
Bdn. „ Dr. Brodén in Lund.
Bdt. „ Prof. Burkhardt in Göttingen.
Bk. „ Prof. Buka in Charlottenburg.
Bm. „ Prof. v. Braunmühl in München.
Bö. „ Prof. Börsch in Potsdam.
Br. „ Dr. Brix in Berlin.
Cly. „ Prof. Cayley in Cambridge†.
Dml. „ Dr. Demoulin in Gent.
Dn. „ Dickstein in Warschau.
Dz. „ Prof. Dziobek in Charlottenburg.
E. „ Prof. Eneström in Stockholm.
E.K. „ Prof. E. Kötter in Berlin.
El. „ Prof. Engel in Leipzig.
F. „ Dr. Faerber in Berlin.
F.K. „ Prof. F. Kötter in Berlin.
Gbs. „ Assist. Prof. Gibson in Glasgow.
Glr. „ Prof. Glaisher in Cambridge.
Gz. „ Dr. Gutzmer in Berlin.
H. „ Prof. Hoppe in Berlin.
Hae. „ Dr. Haentzschel in Berlin.
Hau. „ Dr. Haussner in Würzburg.
Hk. „ Prof. Hauck in Berlin.
Ho. „ Dr. Horn in Charlottenburg.
Hr. „ Prof. Hamburger in Berlin.
Ht. „ Prof. Hilbert in Göttingen.
Hz. „ Prof. Hurwitz in Zürich.
Jk. „ Prof. Joukovsky in Moskau.
Js. „ Prof. Jolles in Villenkolonie Grunewald.
Kr. „ Prof. Krazer in Strassburg i. E.
La. Herr Prof. Loria in Genua.
Lg. „ Prof. Lange in Berlin.
Lh. „ Dr. Lerch in Prag.
Lp. „ Prof. Lampe in Berlin.
M. „ Prof. F. Müller in Berlin.
Mh. „ Dr. Meth in Berlin.
Mi. „ Dr. Michaelis in Berlin.
Mn. „ Prof. Mansion in Gent.
Mo. „ Dr. Molenbroek im Haag.
My. „ Prof. F. Meyer in Clausthal.
Mz. „ Prof. Maynz in Ludwigslust.
N. „ Prof. C. Neumann in Leipzig.
R.M. „ Dr. R. Müller in Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Prof. Schlegel in Hagen.
Scht. „ Prof. Schubert in Hamburg.
Sfs. „ Prof. Schönflies in Göttingen.
Sh. „ Dr. Schafheitlin in Charlottenburg.
Si. „ Dr. Sintzow in Kasan.
Sn. „ Dr. P. Simon in Bonn.
St. „ Prof. Stäckel in Königsberg i. Pr.
Std. „ Prof. Studnička in Prag.
Tn. „ Prof. Treutlein in Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira in Porto.
V. „ Dr. Valentiner in Kopenhagen.
Vi. „ Dr. Vivanti in Mantua.
Vrs. „ Prof. de Vries in Delft.
Wbg. „ Dr. Wallenberg in Berlin.
Wi. „ Prof. A. Wassilieff in Kasan.
Wn. „ Prof. Wangerin in Halle a. S.
Wz. „ Prof. Weltzien in Zehlendorf.

---

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W., Kurfürstenstr. 139.

# Erster Abschnitt.

## Geschichte und Philosophie.

### Capitel 1.

### Geschichte.

#### A. Biographisch-Litterarisches.

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200-1668. Leipzig. B. G. Teubner. X u. 863 S. 8°.

Wie im Jahrbuch über die F. d. M. XXIII. 1891. 2 angekündigt ist, erfolgt hier der Bericht über Teil 1 u. 2 des zweiten Bandes zusammen.

Im ersten Bande, von welchem übrigens 1894, nach 14 Jahren, eine zweite Auflage erschienen ist, hatte Cantor die Geschichte der Mathematik bis zum Jahre 1200 n. Chr. geführt (vgl. Jahrb. XII. 1880. 16-28). Unermüdet weiter arbeitend, legt er jetzt seine Darstellung vor, bis 1668 reichend, d. h. bis zu dem Jahre, in welchem die Doctorarbeit von Leibniz erschien und Newton seine Cambridger Professur antrat, also bis zur Erfindung der eigentlichen Differentialrechnung.

Es ist ein reicher Stoff, der hier vorliegt, die Geschichte fast eines Halbjahrtausends, der Nachweis der Wiedererweckung mancher alten, der Auffindung und anfangs langsamen, später rascheren Verbreitung mancher neuen Idee.

In sieben Abschnitte ist dieser zweite Band gegliedert: die

zwei ersten sind je einem ganzen, die übrigen je einem halben Jahrhundert gewidmet.

Zwei bedeutende Männer eröffnen die Geschichte des 13. Jahrhunderts, Leonardo von Pisa, ein Laie, und Jordanus Nemorarius, ein Geistlicher. Ihre wissenschaftlichen Verschiedenheiten erfasst Cantor als Nachklänge früherer Zeiten, als Nachwirkungen aus den Gegensätzen zweier alten ostarabischen Schulen des 10. und 11. Jahrhunderts.

Erst das 14. Jahrhundert schritt über jene zwei Führer hinaus. Mit gewohnter Gründlichkeit und richtiger Abschätzung des Einzelnen und Ganzen zeigt Cantor in den Leistungen französischer, deutscher und englischer Mathematiker das Auftreten neuer Begriffe und Formen. Der verstärkten Gründung von Universitäten im 15. Jahrhundert entspricht nicht die Ausbildung ihres Unterrichtes; nur Wien ragt hervor in der Pflege mathematischer Studien. Erst in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts beginnt ein Stärker- und Neupulsiren wissenschaftlichen Lebens: auf Joh. v. Gmunden und Peurbach folgen Widman und Regiomontan, L. da Vinci und Paciuolo, Chuquet und Lefèvre; ihre Leistungen und Anregungen werden ausführlich gewürdigt.

Die Glanzzeit der Entwickelung im 16. Jahrhundert, die Art und Ausbreitung des Ziffer- und Linienrechnens und der Coss, die schönen Erfindungen der Italiener in der Algebra werden uns vorgeführt, die gegenseitigen Beziehungen insbesondere von Tartaglia, Cardano und Ferrari werden klargestellt.

Die Ausnützung des Bücherdrucks lässt mehr und mehr die nationale Abschliessung schwinden, und so muss Cantor von der Zeit um 1550 ab die bis dahin vorwiegend geographische Gliederung des Stoffes aufgeben: er ordnet ihn von da ab nach sachlichem Gehalt.

Das Jahrhundert nach 1550 ist mit vollen 300 Seiten berücksichtigt. Die Erneuerung der Werke der Alten, die Kreismessung, die Mechanik, die glänzende Entwickelung von Arithmetik und Algebra, alles will beachtet sein und wird beachtet, hell erglänzen die Sterne Stevin und Vieta.

In und mit dem Buch treten wir nun ein in jene herrliche

Blütezeit mathematischer Wissenschaft im 17. Jahrhundert, die durch Namen wie Neper, Kepler, Descartes, Guldin und Cavalieri, Fermat und Pascal stets ausgezeichnet sein wird, Namen, die fast ebenso viele neu erwachsene Zweige der Wissenschaft bedeuten. Gross und schwer ist hier, bei diesem regen Schaffen, bei dem vielfach gleichzeitigen Auftreten neuer Ideen, bei dem lebhaften Hin und Her ihrer Ausbreitung die Aufgabe der Darstellung; Cantor löst sie trefflich und bewältigt gut die stürmischen Zeiten des 17. Jahrhunderts.

Der ganze Band und sein Vorgänger stellen eine höchst verdienstliche Leistung ihres Verfassers dar, indem zum ersten Male wieder seit rund 100 Jahren das Ganze der geschichtlichen Entwickelung der (reinen) Mathematik zur Darstellung gelangt. Wir freuen uns und mit uns geniessen die fremden Völker dieser Frucht deutschen Fleisses und deutscher Wissenschaft. Tn.

---

FELIX MÜLLER. Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Litteratur. Leipzig. B. G. Teubner. IV + 104 S. 8°.

Parallel gehend dem ersten Bande und der ersten Hälfte des zweiten Bandes von Cantor's Geschichtswerk, giebt der Verfasser 12 Zeittafeln, nicht wie in Poggendorff's Lebenslinien graphisch, sondern in absatzweisem Text unter etwa 400 Stichzahlen, jeweils biographische und wissenschafts-geschichtliche Thatsachen kurz hinstellend. Jedem einzelnen Absatze sind Hinweise auf die bezügliche Quellenlitteratur beigefügt; den Schluss bildet ein sehr dankenswertes Namen- und Sachregister mit Seitenverweisung.

Tn.

---

A. MARIE. Catalogue des thèses de science soutenues en France de 1810 à 1890 inclusivement. Paris. H. Welter. XI + 224 S. 8°.

Verzeichnis der seit 1850 an Deutschen Universitäten erschienenen Doctor-Dissertationen und Habilitations-

schriften aus der reinen und angewandten Mathematik. Herausgegeben auf Grund des für die Deutsche Universitäts-Ausstellung in Chicago erschienenen Verzeichnisses. München. 35 S. gr. 8°.

Angezeigt von E. M. Blake in New York M. S. Bull. III. 125-127. Lp.

---

Catalogue of scientific papers (1874-83). Compiled by the Royal Society of London. Vol. IX. Cambridge. University Press. (1891).

---

V. V. Bobynin. Sur l'oeuvre des Grecs dans le développement des mathématiques. Bibl. Math. (2) VI. 1-2.

Kurze Bemerkung über die Bedeutung der Griechen für die Entwickelung der Mathematik. Der Verfasser unterscheidet drei Perioden, von welchen die zwei ersten vorzugsweise durch geometrische Untersuchungen sich auszeichneten, die letzte dagegen mehr eine arithmetisch-algebraische Richtung verfolgte. E.

---

V. V. Bobynin. Progrès successifs des sciences mathématiques chez les peuples de l'Europe. Bibl. Math. (2) VI. 110-114.

Gedrängte Uebersicht über die Entwickelung der Mathematik in Europa bis an den Anfang unseres Jahrhunderts. Herr Bobynin bemerkt, dass es noch nicht möglich ist, zu entscheiden, ob die mathematische Forschung fortwährend wesentliche Fortschritte machen wird, oder ob, wie einige Verfasser glauben, die Zeit des Verfalles schon begonnen hat. E.

---

A. Favaro. Studi italiani sulla storia della matematica. Bibl. Math. (2) VI. 67-84.

Fortsetzung der Reihe von Notizen über das mathematisch-historische Studium in verschiedenen Ländern (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 3, XXII. 1890. 2, XXIII. 1891. 3). Herr Favaro bemerkt, dass er die Grundsätze, welche bei der Redaction der früheren

Notizen befolgt worden sind, acceptirt hat, um dadurch einen Vergleich mit diesen zu ermöglichen. Er erwähnt, dass in den letzten Jahren das Studium der Geschichte der Mathematik keinen Fortschritt in Italien gemacht hat, und giebt den Grund dieser wenig erfreulichen Thatsache an. Dann verzeichnet er 177 von Italienern verfasste mathematisch-historische Schriften. Aelter als 1750 sind 14 derselben; die Perioden 1751-1800, 1801-1850, 1851-1891 sind durch respective 12, 25 und 126 Schriften repräsentirt; unter den letzteren rühren 31 von Favaro, 23 von Boncompagni her.

E.

---

D. Bierens de Haan. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. No. XXXII. Amst. Versl. en Meded. (3) IX. 4-47.

Chronologisch geordnetes Verzeichnis der von 1579 bis 1890 auf historisch-mathematischem Gebiete in Holland erschienenen Schriften. Es finden sich darunter Arbeiten über die Geschichte der Mathematik und der Physik, Biographien, polemische Schriften, Ausgaben klassischer Autoren und Sammelwerke. Die Gesamtzahl ist 466. Mo.

---

G. Eneström. Questions 37-40. Bibl. Math. (2) VI. 32, 64, 96, 120.

Anfragen über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 4).

37) Ueber die Bedeutung und erste Anwendung der Benennung „regula coeci“ für eine Rechnungsaufgabe, welche in den arithmetischen Lehrbüchern des XVI. und XVII. Jahrhunderts häufig vorkommt.

38) Ueber Parseval's Leben und wissenschaftliche Wirksamkeit.

39) Ueber die angebliche, im Jahre 1579 gedruckte, neue Auflage von Rafael Bombelli's Algebra.

40) Ueber Bürmann's Lebensumstände. E.

G. H. F. Nesselmann. Anmerkungen zu Diophant. Schlömilch Z. XXXVII. Hl. A. 121-146, 161-192.

Aus einem deutschen Diophant, der früher Nesselmann gehörte, veröffentlicht hier Curtze eingeschriebene Bemerkungen, welche Verallgemeinerungen, Ergänzungen, andersartige Lösungen zu Diophant's Behandlung darstellen und von Nesselmann stammen. Sie beziehen sich auf beziehungsweise 5, 29, 16, 39, 10 u. 6 Aufgaben des I., II., III., IV., V. und VI. Buches des Diophant.

Tn.

---

P. Tannery. Psellus sur Diophante. Schlömilch Z. XXXVII. Hl. A. 41-45.

Aus einem Briefe des bekannten Byzantiners Psellus (1020-1105?) veröffentlicht hier T. nach einer Escurial- und nach einer Florentiner Handschrift eine aus Diophant (I, 1-3) entnommene Stelle mit gewissen für die Geschichte der Potenzbenennung wichtigen, weil von Diophant abweichenden Zwischenbemerkungen des Psellus, deren Gehalt nach T.'s Vermutung aus Anatolius von Alexandrien (um 270 n. Chr.) stammt, übrigens auch auffällige Uebereinstimmung zeigt mit dem (durch Araber vermittelten?) Sprachgebrauch der Italiener des 15. Jahrhunderts. Tn.

---

M. Steinschneider. Miscellen zur Geschichte der Mathematik. 11. Simplicius, der Mathematiker. Bibl. Math. (2) VI. 7-8.

Herr Steinschneider berichtet über einige arabische und hebräische Schriften, wo der Mathematiker Simplicius genannt wird; aus den Citaten kann man aber nicht mit Bestimmtheit entscheiden, ob dieser Simplicius mit dem bekannten Commentator des Aristoteles identisch ist oder nicht. E.

---

R. O. Besthorn. Ueber den Commentar des Simplicius zu den Elementa. Bibl. Math. (2) VI. 65-66.

Enthält eine kurze Notiz über eine von den Herren Besthorn

und Heiberg vorbereitete Ausgabe der arabischen Uebersetzung der „Elementa“ von Hadschdschadsch Ibn Jusuf Mathar mit Commentar von Alneirizi. Der Commentar enthält viele Bruchstücke von Simplicius' Schrift über die Elementa, deren griechisches Original verloren ist. E.

H. Suter. Das Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist des Ibn Abî Ja ʿkûb an-Nadîm. Zum ersten Mal vollständig ins Deutsche übersetzt und mit Anmerkungen versehen. Schlömilch Z. XXXVII. Suppl. 1-87.

Herr Suter in Zürich hat sich der äusserst dankenswerten Mühe unterzogen, von dem geschichtlich so wertvollen bio- und bibliographischen Handbuch Fihrist (aus dem Jahre 987 n. Chr.) die auf die Geschichte der Mathematik bezüglichen Teile ins Deutsche zu übertragen (S. 7-45); zahlreiche Anmerkungen (S. 45-78) klären sprachlich und sachlich Undeutliches, soweit möglich, auf; die dankenswerte Zugabe eines Namens- und Sachregisters (S. 79-87) erleichtert sehr den Gebrauch des Buches. Tn.

J. L. Heiberg. Die von Wilhelm v. Moerbek benutzten Handschriften. Schlömilch Z. XXXVII Hl. A. 81.

Herr Heiberg sieht seine Vermutung (vgl. Abh. z. Gesch. d. Math. V, 80) über die zwei von W. von Moerbek im Jahre 1269 bei seiner Archimedes-Uebersetzung benützten griechischen Handschriften urkundlich bestätigt durch ein Verzeichnis der päpstlichen Bibliothek aus dem Jahre 1311. Tn.

F. Rudio. Ueber den Anteil der mathematischen Wissenschaften an der Cultur der Renaissance. Vortrag. (Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge. (2) VI. 142.) Hamburg. Verlags-Anstalt u. Druckerei A.-G. (vormals J. F. Richter). 33 S. 8°.

Nach kurzer Darlegung des Wesens der Renaissance und des

Anteiles griechischer und indischer (arabischer) Mathematik beim Wiedererblühen der Wissenschaft werden als die wichtigsten Beiträge zur Renaissancecultur die Einführung des indischen Stellenwertrechnens und die Aufstellung der neuen Weltauffassung bezeichnet. Dazwischen werden die typischen Beispiele eines Lionardo, Dürer, Regiomontan und Kopernikus in aller Kürze, aber eindringlich behandelt, auch der Einführung des Volksschulrechnens und des Auslebens der Astrologie wird gedacht. Tn.

---

B. Berlet. Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Die Coss von Adam Riese. Mit dem Brustbild und der Handschrift von Adam Riese. Frankfurt. Kesselring'sche Hofbuchhdlg. VIII + 62 S. 8°.

Zur Erinnerung an den Rechenmeister Adam Ries. Hoffmann Z. XXIII. 237.

Zum Gedächtnis des vierhundertjährigen Geburtstages (1492 zu Staffelstein in Oberfranken). Lp.

---

Frédéric Ritter. François Viète, inventeur de l'algèbre moderne (Esquisse biographique). Assoc. Franç. Pau XXI. 17-25.

Frédéric Ritter. L'algèbre nouvelle de François Viète. Ibid. 177-182.

Frédéric Ritter. La trigonométrie de François Viète. Ibid. 208-211.

Nach den in dem ersten Teile der Sitzungsberichte der Assoc. Franç. S. 154 abgedruckten Protokollen hat Herr Ritter der ersten Section vorgelegt: 1) die Uebersetzung der Werke Vieta's in fünf Manuscriptbänden, 2) die Biographie Vieta's in vier Manuscriptbänden, beide in Folio; 3) zwei Bildnisse Vieta's. Die drei Aufsätze, deren Titel oben gegeben sind, stellen also Auszüge aus dem ungedruckten ausführlichen Werke des Verfassers vor; auf sonstige Veröffentlichungen über Vieta wird in ihnen nicht Bezug genommen. Lp.

---

Galilei. Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. III, Parte prima. Firenze. G. Barbèra. 399 S. 4°.

Die staatliche Ausgabe der Werke Galilei's (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 837, XXIII. 1891. 8) schreitet mit Stetigkeit, wenn auch nicht mit der von den Förderern der physikalisch-mathematischen Wissenschaften erwünschten Schnelligkeit fort. Der Halbband, über den wir jetzt berichten, enthält die weltberühmte Schrift, in der Galilei seine ersten astronomischen Entdeckungen ankündigt, und die Streitschriften, welche ihr rasch folgten. Er beginnt mit einer phototypisch ausgeführten Reproduction des ersten Entwurfes des „Sidereus Nuncius“ auf Grund einer in der Staatsbibliothek von Florenz bewahrten Handschrift; ihr folgt eine treue Wiedergabe der Originalausgabe (Venedig 1610) des genannten Werkes. Es ist bekannt, dass eines der ersten Exemplare desselben von Galilei an Kepler mit der Bitte gesandt wurde, demselben seine Aufmerksamkeit zu schenken, und dass der grosse deutsche Astronom elf Tage nachher seine „Dissertatio cum Nuncio Sidereo“ zu Ende brachte; diese Arbeit wurde in den in Rede stehenden Band aufgenommen. Zu dieser wohlwollenden Aufnahme von Kepler's Seite bildete ein trauriges Gegenstück der starke Widerstand, welchen die Entdeckungen Galilei's bei einigen kleineren Gelehrten fanden, und zu dessen Mundstück sich Martin Horky durch seine „Peregrinatio contra Nuncium Sidereum“ (Mutinae 1610) machte. Auch diese Arbeit ist im vorliegenden Bande enthalten, wie auch die Verteidigungen, welche Johann Wodderborn und Giovanni Antonio Roffeni für Galilei schrieben; zwischen diesen sind die „Narratio de observatis a se quatuor Iovis satellitibus erronibus“ von Kepler und die „*Διάνοια* astronomica, optica, physica“ von Francesco Sizi eingeschaltet. Dann finden wir die Abhandlung „Di Ludovico delle Colombe contro il moto della terra“ mit Zusätzen von Galilei, den „Nuntius Sidereus Collegii Romani“, wie derselbe durch Pater Odo van Maelcote im Mai 1611 gelesen wurde, dann die Arbeit „De lunarium montium altitudine problema mathematicum“, welche eine Frage betrifft, die zu Mantua

im Mai 1611 behandelt wurde, endlich die lange und schwatzhafte Schrift von Giulio Cesare La Galla „De phaenomenis in orbe lunae nunc iterum suscitatis“. Aus dem Berichte erhellt, dass von dem besprochenen Halbbande nur der kleinere Teil zur Sammlung der Galilei'schen Werke gehört; er wird daher weniger von den Fachgelehrten als von den Historikern der Zukunft benutzt werden, die erforschen wollen, welche Aufnahme eins der wichtigsten astronomischen Werke aller Länder (der „Sidereus Nuncius“) erhielt, und welche Einwände gegen ihn bald nach seinem Erscheinen erhoben wurden. La.

---

Omaggi a Galileo Galilei per il terzo centenario della inaugurazione del suo insegnamento nel Bò. Pubblicati per cura della R. Accademia di Padova. Padova. Randi. 46 S. 4°.

Durch diese Veröffentlichung wollte sich die Akademie der Wissenschaften und Künste von Padua an den Festlichkeiten beteiligen, mit denen die Universität von Padua das Andenken an die Beendigung des dritten Jahrhunderts der ersten Vorlesung (7. December 1592) Galilei's erneuern wollte. Es ist eine unter der Leitung des Herrn Favaro gemachte Sammlung kleinerer Schriftstücke, die von Männern beigesteuert sind, welche die Geschichte der physikalisch-mathematischen Wissenschaften, die Philosophie oder die Litteratur pflegen. Die Mitarbeiter sind, ausser Herrn Favaro selbst, der Reihe nach: Bierens de Haan, M. Cantor, A. Conti, M. Curtze, I. Del Lungo, G. Eneström, S. Günther, G. Loria, P. Riccardi, W. C. L. van Schaïk, A. Stevart, Ph. Tamizey de Larroque, P. Tannery, E. Wohlwill, R. Wolf und A. Wolynsky. (Vergl. auch S. Günther, Beilage zur Allgemeinen Zeitung, 27. Jan. 1893.) La.

---

A. Favaro. Per il terzo centenario della inaugurazione dell'insegnamento di Galileo Galilei nello Studio di Padova. VII Dicembre MDCCCXCII. Firenze. G. Barbèra. 29 S. fol. u. XXV Taf.

Es ist eine prachtvolle Ausgabe der Rede, welche der unermüdliche Galilei-Forscher zum Gedenktage der ersten Vorlesung Galilei's in Padua in der Aula magna der Universität gehalten hat; sie handelt über Galilei in Padua und ist durch die photolithographische Reproduction einiger darauf bezüglichen Documente geschmückt, unter denen das Bildnis Galilei's aus seinem vierzigsten Lebensjahre hervorgehoben werden möge. La.

---

G. MONCHAMP. Galilée et la Belgique. Essai historique sur les vicissitudes du système de Copernic en Belgique. Saint-Trond, G. Moreau. Paris, Retaux. 346 + 76 S. 12°.

G. MONCHAMP. Notification de la condamnation de Galilée datée de Liège 20 septembre 1633, publiée par le nonce de Cologne, dans les pays rhénans et la Basse-Allemagne. Texte d'après une copie manuscrite avec remarques. Cologne, Boisserée. Saint-Trond, G. Moreau. 30 S. 8°.

Die zweite dieser Schriften betrifft einen einzelnen Umstand und bildet eine Ergänzung zur ersten. Diese ist eine Monographie über die Geschichte des Kopernikanischen Systems in Belgien. Das Capitel I ist der Sache Galilei's zu Rom in den Jahren 1616 und 1633 gewidmet; die Capitel II-XII der Geschichte der Astronomie in Belgien während des siebzehnten Jahrhunderts. Die Capitel XIII-XXII enthalten die Geschichte des doppelten Conflictes des Professors der Philosophie an der Universität zu Löwen Martin Van Velden mit der Artisten-Facultät und dem Rector dieser Universität aus Anlass des Kopernikanischen Systems. Das Capitel XXIII handelt über dieses System im achtzehnten Jahrhundert und bringt im Anhange 76 Seiten mit Beweisstücken.

Schlussfolgerung des Verfassers: Die Entdeckungen Galilei's sind in Belgien mit Enthusiasmus aufgenommen worden; dieser Enthusiasmus ist durch die Verdammungen von 1616 und 1633 kaum abgekühlt worden, weil die Gebildeten jener Zeit die Tragweite und Widerrufbarkeit derselben vollkommen kannten.

Mn. (Lp.)

---

C. Le Paige. Note bibliographique sur l'ouvrage intitulé: Galilée et la Belgique, par M. le Dr. G. Moreau. Belg. Bull. (3) XXIII. 7-8.

Kurze Anzeige des Buches. Hr. Le Paige fügt zu den von Hrn. Monchamp angeführten Namen der Cartesianer unter den Professoren den des François Laddersous hinzu, der die cartesische Wirbeltheorie lehrte und somit auch die Kopernikanische Theorie.

Mn. (Lp.)

A. Favaro. Gli oppositori di Galileo. Ven. Ist. Atti (7) III. 615-636.

Es werden Galilei's Widersacher aufgezählt, und Favaro will allmählich deren persönliche und litterarische Verhältnisse aufhellen, soweit dies noch nicht geschehen. Er macht hier den Anfang mit A. Rocco (1586-1653), einem Professor der Philosophie und Rhetorik in Venedig. Tn.

A. Favaro. Capitolo inedito e sconosciuto di Galileo Galilei contro gli aristotelici. Ven. Ist. Atti (7) III. 1-20.

In einem Cod. Magliab. zu Florenz, der seither unbeachtet geblieben, fand Favaro ein Gedicht von 286 Zeilen, geschrieben im 17. Jahrhundert und unter dem obigen Titel Galilei zugeschrieben. Nach seinen Eingangszeilen lässt es sich auf den Herbst 1623 datiren. Es wird hier ohne Kürzung abgedruckt. Tn.

Galileo Galilei. Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauss. Leipzig. B. G. Teubner. LXXXIV u. 586 S. gr. 8°.

Wenn die Discorsi, das reifste Werk Galilei's, das er als Greis nach seiner Verurteilung durch das Inquisitionsgericht in bewundernswerter Geistesklarheit verfasst hat, durch die Oettingen'sche Uebersetzung unter den Ostwald'schen Klassikern der exacten Wissenschaften den Deutschen näher geführt sind, so hat der früh

verstorbene Strauss in der erstmaligen Verdeutschung des „Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo Tolemaico e Copernicano“ dasjenige Werk uns bequem zugänglich gemacht, welches für die Beseitigung des Ptolemäischen Systems mehr als irgend ein anderes Buch geleistet hat, welches aber auch dem Verfasser trotz seiner siebzig Jahre die Verfolgung zugezogen hat, die mit jener Verurteilung endigte. Zur Einleitung giebt der Uebersetzer eine ausführliche Geschichte des Buches, eine Geschichte, welche fast zu einer vollständigen Biographie Galilei's auswächst; so sehr hängt das Buch mit dem Lebenswerk seines Verfassers zusammen. Statt des in Padua geplanten Werkes De systemate mundi oder De systemate seu constitutione universi, wie Galilei im Sidereus nuncius oder in dem Briefe an Belisario Vinta ankündigte, ist unter dem Einflusse der Verdammung der Kopernikanischen Weltanschauung 1616 und in Folge der Verspätung der Abfassung jenes angekündigten Werkes allmählich ein anderes entstanden. Nicht eine Darstellung der astronomischen Folgerungen der neuen Anschauungen hat Galilei im Dialog geliefert; es handelte sich darum, das Kopernikanische System mit den physikalischen Thatsachen in Einklang zu bringen, denen gegenüber es absurd erscheinen musste, so lange das Beharrungsgesetz nicht bekannt war. An die Wurzel des Baumes der peripatetischen Philosophie war die Axt zu legen, wenn die Geister von den teleologischen und anthropocentrischen Anschauungen befreit werden sollten. „Ein grosser Teil der Anziehungskraft, die der Dialog noch heute unvermindert auf den Leser übt, beruht gerade darauf, dass er uns die Macht der überkommenen Lehren in anschaulichster Weise schildert, indem er ihnen zugleich einen tödlichen Schlag versetzt“. Mit der Widerlegung der Aristotelischen und sonstigen Beweise für die grundverschiedene Natur von Himmel und Erde und mit den Argumenten für die Verwandtschaft zwischen beiden beschäftigt sich der erste Tag des Dialogs. Die Vereinbarkeit der alltäglichen Bewegungserscheinungen auf der Erde mit deren Axendrehung bildet der Hauptsache nach den Inhalt des zweiten Tages. Der dritte handelt von der Bewegung der Erde um die Sonne, enthält aber auch einen langen Abschnitt über den im Jahre 1572 neu erschienenen

Stern in der Cassiopeia, worin gegen Chiaramonte bewiesen werden soll, dass auch der Himmel Veränderungen unterworfen ist. Der vierte Tag endlich behandelt das Problem, wie mit Hülfe der Erdbewegung die Gezeiten zu erklären sind. — Auf den Seiten 497 bis 573 giebt Strauss Anmerkungen zu einzelnen Stellen und entfaltet in ihnen eine grosse Kenntnis der zum Verständnisse des Werkes nötigen älteren wie neueren Litteratur. Die beiden besten Kenner der Zeit Galilei's, Wohlwill und Favaro, haben mit grosser Freundlichkeit Auskunft erteilt auf alle Fragen, die von Strauss ihnen vorgelegt wurden, der sich ausserdem selbst wohlbewandert im Aristoteles und Plato und den neueren Philosophen und Naturforschern erweist. Angesichts der vorliegenden Leistung müssen wir es beklagen, dass es dem jugendlichen Forscher nicht beschieden gewesen ist, noch andere Früchte zur Reife zu bringen.

Die Ausstattung des Werkes ist der Verlagshandlung würdig. Eine Nachbildung des Titelkupfers, welches Aristoteles, Ptolemäus und Kopernikus im Gespräche darstellt, und des Titelblattes der ersten Ausgabe des Dialogs von 1632 gehen der Uebersetzung voran. Die Inhaltsangaben sind, wie im Original, als Marginalnoten gedruckt. Ein genau gearbeitetes Namen- und Sachregister macht den Beschluss des Werkes, das nach dem Wunsche des Uebersetzers in allen Bibliotheken der höheren Lehranstalten zur Einsicht für die Schüler vorhanden sein sollte. Lp.

---

A. Favaro. Galileo Galilei and the approaching celebration at Padua. Nature XLVII. 82-83.

A. Favaro. The Galileo celebration at Padua. Nature XLVII. 180-181.

G. Cantoni. Sul valore filosofico degli scritti di Galileo Galilei. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 405-410. Lp.

---

P. Tannery. Les autographes de Descartes à la Bibliothèque nationale. Huitième article. Darboux Bull. (2) XVI. 32 - 40.

P. Tannery. Sur des lettres inédites de Descartes à la Bibliothèque de l'Institut. Darboux Bull. (2) XVI. 229-232.

Ueber den ersten Aufsatz ist bereits im Zusammenhange mit den sieben vorangehenden Artikeln referirt worden (F. d. M. XXIII. 1891. 17, wo Zeile 15 v. u. 1848 statt 1884 zu lesen ist). In der zweiten Mitteilung berichtet Hr. Tannery, dass an die Bibliothèque de l'Institut sechs von den seiner Zeit entwandten Cartesischen Briefen zurückgelangt sind, unter ihnen drei ungedruckte. Aus diesen letzteren werden diejenigen Stellen abgedruckt, welche für die Geschichte der Mathematik Interesse haben. Lp.

---

C. J. Gerhardt. Desargues und Pascal über die Kegelschnitte. Berl. Ber. 1892. 183-204.

Enthält als Neues aus Leibniz' Nachlass zwei Stellen aus Pascal's Arbeiten: 1) eine, wie es scheint, vollständige Abschrift des ersten Abschnittes des Kegelschnittwerkes (S. 197-202) und 2) einen Auszug aus einer bis jetzt unbekannten Einführung in die Geometrie (S. 202-204). Hr. Gerhardt giebt hierzu die nötigen geschichtlichen Erläuterungen, insbesondere betreffs der Vorarbeiten von Desargues (S. 183-197). Tn.

---

P. Tannery. A propos de la correspondance de Huygens. Darboux Bull. (2) XVI. 247-255.

Dieser Artikel berichtigt mehrere Ungenauigkeiten im Berichte des Darb. Bull. über Huygens' Briefwechsel und klärt insbesondere auf über die „Akademie“ zu Mersenne's Zeiten. Tn.

---

Bierens de Haan. Renseignements sur l'édition de la correspondance et des oeuvres de Chr. Huygens. Assoc. Franç. Pau XXI. 159-166.

Bericht über die ersten vier Bände, welche bisher erschienen sind, und über welche im Jahrbuch einzeln referirt ist. Lp.

---

Marakuëw. Newton, sein Leben und seine Werke. 2. Aufl. Moskau. 205 S. 8°. (Russisch, 1891.)

E. du Bois-Reymond. Maupertuis. Berl. Ber. 1892. 393-442.

Eine Festrede, in welcher der Verfasser in vortrefflicher Weise die Lebensschicksale und die wissenschaftlichen Leistungen von Maupertuis schildert. Lp.

Lambert's Photometrie. (Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. 1760.) Deutsch herausgegeben von E. Anding. Erstes Heft: Teil I und II. Zweites Heft: Teil III, IV und V. Drittes Heft: Teil VI und VII. Leipzig. Wilhelm Engelmann. 135 S., 112 S., 172 S. 8°. [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 31, 32, 33.]

Die gegenwärtige Ausgabe der Photometria Lambert's, welche drei Bändchen der Ostwald'schen Klassiker anfüllt, hat trotz dieser Ausdehnung nicht das unverkürzte Werk mit allen breiten Ausführungen, Specialisirungen, Wiederholungen bringen können. Der Herausgeber hat eine grosse Anzahl derartiger den Fortschritt hemmenden Ausführungen gestrichen, soweit dies möglich war, ohne den Zusammenhang zu zerreissen; es sollte eben das Gebotene immer den Eindruck eines unverstümmelten Ganzen machen. Die Uebersetzung des lateinischen Originals schliesst sich dem Texte wortgetreu an. Die Bedeutung des Lambert'schen Werks für die Photometrie erhellt am besten aus der ausführlichen Darstellung des Herausgebers. „Als Lambert seine Photometrie schrieb, beschränkte sich das gesamte Gebiet der schulmässigen Lehre vom Licht auf die geometrische Optik. Hierzu sollte nun die Photometrie den zweiten Teil der Optik bilden. ... Die Lambert'sche Photometrie umfasst dem Inhalt nach das gesamte Gebiet der Photometrie in der Weise, dass es unter den seit jener Zeit bis zur Gegenwart aufgeworfenen und behandelten Fragen nur sehr wenige giebt, welche durch Lambert nicht schon erörtert oder wenigstens berührt worden wären. ... Einen so sinnreichen und

ausgedehnten Gebrauch, wie Lambert es hier und in seinen anderen Werken thut, hatte bis dahin niemand von der geometrischen Construction zu machen gewusst". Daher ist es nur billig, dass dieses Werk in die Sammlung der Ostwald'schen Klassiker aufgenommen ist; es zeugt von der Universalität des Lambert'schen Genius, der durch eigene Kraft sich vom Mülhausener Schneiderlehrling bis zum gefeierten Berliner Akademiker durchgerungen hatte, von dem Kummer in seiner Festrede auf Friedrich den Grossen (26. Jan. 1865) sagt: „Fast gleichzeitig mit Lagrange berief Friedrich der Grosse noch einen ausgezeichneten Mathematiker nach Berlin, nämlich Lambert, welchen zu ihren früheren Mitgliedern zählen zu können unserer Akademie zur bleibenden Ehre gereicht". Die vom Herausgeber hinzugefügten Anmerkungen sind umfangreicher als in den sonstigen Bändchen der Ostwald'schen Klassiker; sie nehmen den grössten Teil des dritten Heftes ein (S. 51-172) und geben ausser den Nachrichten über das Leben Lambert's und seine Werke, insbesondere über die Photometrie einen fortlaufenden Commentar, in welchem die behandelten Gegenstände historisch beleuchtet und die bezüglichen Fragen mit den jetzigen Ansichten verglichen werden. Die hierbei gegebenen Nachweise sollen das Buch nach Absicht des Herausgebers „soweit vervollständigen, dass es auch für den modernen Leser als Lehrbuch des photographischen Calculs brauchbar werden soll". Lp.

---

J. H. Graf. Das Leben und Wirken des Physikers und Astronomen Johann Jakob Huber aus Basel. (1733-1798.) Bern. K. J. Wyss. 75 S. 8°. Mit dem Bildnisse Huber's und 1 Fig.-Taf.

J. J. Huber war 1756-58 Professor der Astronomie zu Berlin. Der Verfasser berichtet über dessen Leben und Briefwechsel, ausführlicher über seinen Aufenthalt in London (1754) und seinen dortigen Verkehr mit Physikern und Astronomen, insbesondere über Hubert's Prioritätsrechte bezüglich der Erfindung des sogenannten freien Echappements der Chronometer (S. 31, 47, 60f., 69). Auch seiner Bemühungen um Verbesserung von Theorie und Praxis des Barometers und Thermometers wird gedacht (S. 9ff. und 52ff.). Tn.

---

G. Loria. Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce. Atti della R. Università di Genova. 1892. 144 S. gr. 8°. Mit 4 Fig.-Taf. [Progreso II. 267-269.]

E. Pascal. A proposito di un libro del prof. Gino Loria sulla Scuola Napolitana di Matematica nella prima metà del secolo. Osservazioni. Rivista di Mat. II. 179-186.

G. Loria. Risposta alle „osservazioni" del prof. E. Pascal. Rivista di Mat. III. 6-15.

Im Jahre 1837 hat sich Chasles (Aperçu historique p. 66) sehr anerkennend über gewisse italienische Mathematiker ausgesprochen, weil sie um 1800 „die geometrische Analysis der Alten in ihrer ursprünglichen Reinheit gepflegt haben". Loria geht den Spuren dieser Neapeler Schule nach, findet N. Fergola (1753-1822) als ihren Führer, A. Giordano, V. Flauti (lehrt 1803-12), F. Giannettasio (1759-1849) und G. Scorza (1781-1843) als seine Mitarbeiter und Nachfolger. Loria stellt die Bestrebungen, die Arbeiten, die Methoden des Forschens und den Lehrbetrieb dieser Männer dar und zeichnet ihre Stellung in der Geschichte der Mathematik, zumal Italiens. Ein nach der Zeitfolge geordnetes Verzeichnis ihrer (und verwandter) Arbeiten schliesst den Band.

Pascal erkennt die Sorgsamkeit der Forschungen Loria's an, bestreitet aber die relative Richtigkeit seiner Darstellung: während man im ersten Drittel des Jahrhunderts nordwärts von Italien lebhaft voranstrebt, ganze Gebiete und Methoden neu schaffend, „graben die Neapolitaner die Leichen des Archimed und des Apollonius aus" und bleiben in alten Vorstellungen befangen, sie hemmen den Fortschritt.

Loria verteidigt sich gegen Pascal's Vorwürfe und rechtfertigt sein geschichtliches Urteil und seine Art der Sachbehandlung.

Tn.

---

K. Fink. Monge. Korr.-Bl. f. d. Gel.- u. Realsch. i. Württbg. 1892. 263-289, 339-359.

Nach Darlegung einiger Gedanken zur Abänderung des mathe-

matischen Unterrichtes an den (württembergischen) Mittelschulen geht (S. 267) der Verfasser zu seinem Thema über: ausführlich genug und doch kurz werden die Lebensschicksale, die wissenschaftlichen und die praktischen Verdienste des grossen Schöpfers der polytechnischen Schule dargestellt. Tn.

---

LAGRANGE. Oeuvres complètes de Lagrange. Tome XIV et dernier: Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants, publiée et annotée par LUDOVIC LALANNE, avec deux facsimilés. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Der Druck dieses letzten Bandes der gesammelten Werke von Lagrange, die also im Zeitraume von 1867 bis 1892 nun endlich fertig geworden sind, war schon zu Lebzeiten Serret's begonnen und ist jetzt durch Hrn. Lalanne zu Ende geführt worden. Für jeden der beiden letzten Bände, welche den Briefwechsel Lagrange's enthalten, hat der Herausgeber ziemlich eingehende Inhaltsangaben der einzelnen Briefe und ein alphabetisches Sachregister hergestellt.

Lp.

---

S. DICKSTEIN. Sur les découvertes mathématiques de Wronski. Bibl. Math. (2) VI. 48-52, 85-90.

Der Verfasser beabsichtigt, eine Reihe von Notizen über Wronski's wissenschaftliche Leistungen zu geben, unter Berücksichtigung ihres Zusammenhanges mit den Entdeckungen anderer Mathematiker. In den drei ersten Notizen behandelt er die combinatorischen Summen, die Functionen „schin" und „aleph", die „teleologische" Methode zur Lösung der Gleichungen.

E.

---

S. CARNOT. Betrachtungen über die bewegende Kraft des Feuers und die zur Erhaltung dieser Kraft geeigneten Maschinen (1824). Uebersetzt und herausgegeben von W. Ostwald. Leipzig. Wilhelm Engelmann. 72 S. 8°. [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 37.]

Die bekannte Schrift von Nicolas-Léonard-Sadi Carnot (1. Juni 1796-24. August 1832): „Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance" ist in Frankreich 1872 und 1878 wieder abgedruckt worden. Wegen ihrer grundlegenden Bedeutung für den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verdiente diese einzige Arbeit, welche Carnot in abgerundeter Form veröffentlicht hat, die Aufnahme in die Sammlung der Ostwald'schen Klassiker der exacten Wissenschaften. Die Uebersetzung ist nach der Originalausgabe von 1824 ausgeführt, aus welcher auch die in eckigen Klammern angegebenen Seitenzahlen aufgenommen sind. Wünschenswert wäre die Hinzufügung derjenigen Notizen aus dem von H. Carnot veröffentlichten handschriftlichen Nachlasse Sadi Carnot's gewesen, auf welche der Anspruch gegründet wird, dass der Ruhm der Entdeckung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik ebenfalls Sadi Carnot zukomme.
Lp.

N. Lobatschewsky. Geometrical researches on the theory of parallels. Translated by G. B. Halsted. Tokio Math. Ges. V. 6-50.

Die englische Uebersetzung der Lobatscheffsky'schen Schrift „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" (Berlin 1840) ist von Hrn. Halsted im Bulletin of the University of Texas (1891) veröffentlicht und auf Ersuchen des Hrn. Kikuchi der Zeitschrift der Mathematischen Gesellschaft zu Tokio zum Abdruck überlassen worden. Vorangeschickt ist eine kurze historische Skizze der Parallelentheorie. Lp.

---

A. Cauchy. Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. I[re] Série. Tome VII. Paris. Gauthier-Villars et Fils. IV + 446 S. 4°.

Der siebente Band der ersten Serie von Cauchy's gesammelten Werken setzt die Reihe der in den C. R. der Akademie veröffent-

lichten Arbeiten fort; sie sind mit den Nummern 169 bis 215 versehen und reichen vom 4. Juli 1842 bis zum 12. Juni 1843. Die ersten Aufsätze betreffen die Anwendungen des Calcul des limites auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen sowie überhaupt die Theorie der letzteren. Es folgen mehrere Artikel über die Störungsfunction. Der grössere Teil der Abhandlungen ist der mathematischen Physik gewidmet, hauptsächlich der Theorie des Lichtes und der Elasticität. Ausser einigen gelegentlichen Noten zur analytischen Geometrie ist auch bemerkenswert die Abhandlung über algebraische Synthese, welche von der Lösung geometrischer Aufgaben durch die Hülfsmittel der Analysis handelt.

Lp.

---

G. S. Ohm. Gesammelte Abhandlungen. Herausgegeben und eingeleitet von E. Lommel. Leipzig. Barth. XX + 855 S. Mit Bildnis. 8°.

---

R. P. Graves. Life of Sir W. R. Hamilton. Addendum. London.

Inhalt: Ueber Hamilton's irische Abstammung. Ueber die Quaternionenrechnung, Briefe auf Veranlassung eines Artikels in dem Dictionary of National Biography.

Lp.

---

W. Jerrold. Michael Faraday, the man of science. New York. 160 S. 8°.

---

Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. Zweite Auflage bearbeitet von Heinrich Weber. Leipzig. B. G. Teubner. X u. 558 S. gr. 8°.

Die Form und Art der Ausgabe der Gesamtwerke ist dieselbe geblieben wie in der ersten Auflage (vgl. F. d. M. VIII. 1876. 231-239). Neu hinzugefügt ist das kleine Fragment XXV über die Bewegung der Wärme im Ellipsoid, ferner ein Zusatz zu

Nr. XXX (jetzt XXXI) über die quadratischen Relationen, die zwischen den Functionen $\varphi$ der Theorie der Abel'schen Functionen bestehen. Dem XXV. (jetzt XXVI.) Fragment wurde ein Zusatz im Titel gegeben, wodurch deutlicher auf seine grosse allgemeine Bedeutung hingewiesen werden sollte. Sorgfältig durchgearbeitet und erweitert sind die Anmerkungen, wodurch der Herausgeber ihre Brauchbarkeit zu erhöhen hofft. Die Erläuterungen von Dedekind zu dem Fragment über die elliptischen Modulfunctionen sind ganz neu redigirt und erleichtern in dieser Form noch mehr den Zugang zu den Formeln Riemann's. Endlich sind die Erläuterungen zu Nr. XXII „Commentatio mathematica etc." etwas ausführlicher gestaltet worden, da die Darstellung der ersten Auflage das Verständnis nicht hinlänglich zu fördern schien. Lp.

---

H. Burkhardt. Bernhard Riemann. Vortrag bei der am 20. Juli 1891 vom mathematischen Verein zu Göttingen veranstalteten Feier der 25. Wiederkehr seines Todestages. Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht. 12 S. 8°.

Nach einem ganz kurzen Bericht über den äusseren Lebenslauf Riemann's wird seine Arbeit gekennzeichnet: seine neue Festlegung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, sein Benützen geometrischer Anschauungen zur Gewinnung functionentheoretischer Einsichten, seine Forschungen über einzelne Functionen, seine Kritik unserer Raumvorstellungen. Ein Vergleich mit W. Weber schliesst den Vortrag. Tn.

---

Robert Mayer. Die Mechanik der Wärme in gesammelten Schriften von R. M. Dritte ergänzte und mit historisch-litterarischen Mitteilungen versehene Auflage. Herausgegeben von J. J. Weyrauch. Stuttgart. J. G. Cotta'sche Buchhdl. Nachf. XIV + 464 S. 8°. (1893.)

Robert Mayer. Kleinere Schriften und Briefe von R. M. Nebst Mitteilungen aus seinem Leben. Herausgegeben von J. J. Weyrauch. Mit 2 Abbildungen. Stuttgart. J. G. Cotta'sche Buchhdl. Nachf. XVI + 503 S. 8°. (1893.)

Die von Julius Robert Mayer 1874 besorgte zweite Auflage der „Mechanik der Wärme“ ist durch zwei kleine Aufsätze vermehrt worden, die von ihm nach 1874 veröffentlicht sind: „Die Torricelli'sche Leere“ und „Ueber Auslösung“. Da ferner die 1874 berücksichtigten Abhandlungen einige Streichungen gegen die ursprüngliche Fassung derselben zeigen, so wurden die betreffenden Ergänzungen in den Anmerkungen gegeben, die am Schlusse der einzelnen Aufsätze stehen. Diese Anmerkungen des Herausgebers geben litterarische Nachweise, Erläuterungen, Hinweise auf ausführlichere Angaben und solche Ergänzungen, welche das von Mayer selbst Gegebene zu beleuchten geeignet sind. Der Mayer'sche Text ist ungeändert abgedruckt; überall jedoch wo die lebendige Kraft durch $mc^2$ ausgewertet ist, wurde $\frac{1}{2}mc^2$ in eckigen Klammern beigefügt. Für das Werk hat der Herausgeber einen eigentümlichen Rahmen geschaffen. Die einzelnen Aufsätze sind in chronologischer Reihenfolge geordnet, und jedem einzelnen sind diejenigen historischen und biographischen Mitteilungen voraufgeschickt, welche die Entstehung der Arbeit beleuchten. Auf diese Weise erscheint das Buch als eine Darstellung der wissenschaftlichen Lebensarbeit Robert Mayer's; bald hat der erzählende Herausgeber das Wort, bald treten die klassischen Abhandlungen Mayer's hervor als die unvergänglichen Denkmäler seiner Gedankenwerkstatt. Ein Bildnis Robert Mayer's nach einem Daguerrotyp von 1842, eine Ansicht seines Denkmals zu Heilbronn und das Facsimile der ersten noch vorhandenen brieflichen Mitteilung Mayer's, betreffend die von ihm auf der Reise nach Ostindien gewonnenen Anschauungen an Carl Baur vom 24. Juli 1841, sind schmückende Beigaben dieser neuen Ausgabe der Mechanik der Wärme.

Die kleineren Schriften und Briefe, welche der zweite Band bringt, sollen zur Ergänzung der Mechanik der Wärme dienen, im Vereine mit ihr die sämtlichen Arbeiten Mayer's enthalten. Von den kleinen Schriften sind zu erwähnen: die Dissertation (1838) über das Santonin, das Tagebuch der Reise nach Ostindien (1840), die erste Fassung des ersten Aufsatzes aus Bd. I nach dem Manuscripte im Nachlasse von Poggendorff (1841), kleine Aufsätze aus den Jahren 1845 bis 1866, sechs Mitteilungen an die Pariser

Akademie, von denen zwei (aus den Archiven dieser Akademie) noch nicht gedruckt waren, die vier anderen den Prioritätsstreit mit Joule betreffen, autobiographische Aufzeichnungen aus den Jahren 1863 bis 1877, Rezensionen und kleinere Mitteilungen. Unter den Briefen beanspruchen das grösste wissenschaftliche Interesse der Briefwechsel mit Carl Baur und der mit Griesinger (letzterer schon 1889 von Preyer veröffentlicht), weniger bedeutsam ist schon der mit Gustav Reuschle. Für die Beurteilung des Menschen Robert Mayer sind wichtig und interessant die Familienbriefe und die vereinzelten Schreiben an einige Freunde. Zur Vervollständigung der Acten zu dem Lebensbilde Mayer's hat der Herausgeber dann noch eine grössere Anzahl von Documenten aufgenommen, die sich auf entscheidende Ereignisse im Leben des Heilbronner Gelehrten beziehen, nach Mach „einer von den Einflüssen der Schule freien modernen Galilei'schen Natur". Wir erwähnen die Beurteilungen der Schriften, den „Zwischenfall mit Seyffer" 1849-1850, der den verhängnisvollen Sprung aus dem Fenster zur Folge hatte, ferner Nachrichten über die Krankheit, in Folge deren er zu Göppingen und Winnendahl 16 Monate lang in Irrenanstalten verweilte, die Entstehung der falschen Todesnachricht 1854-1873, Auszeichnungen, die Naturforscherversammlung zu Innsbruck. Der Herausgeber will damit unter anderem die „Bildung von Legenden erschweren", die sich bekanntlich um Mayer schon zu seinen Lebzeiten gerankt hatten. Das Titelbild ist nach einer Photographie des Vierundfünfzigjährigen von 1868 gefertigt; ausserdem ist eine Darstellung des Wohnhauses im Besitze der Familie beigegeben, wo alle Schriften Mayer's entstanden sind (1841-1878). Den Schluss des Werkes bildet ein ausführliches Personen- und Sachregister. Lp.

---

WILHELM WEBER's Werke. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Berlin. Julius Springer. gr. 8°.

Erster Band: Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre. Besorgt durch WOLDEMAR VOIGT. Mit dem

Bildnis Wilhelm Weber's, XIII Tafeln und in den Text gedruckten Abbildungen. VII und 600 S.

Zweiter Band: Magnetismus. Besorgt durch EDUARD RIECKE. Mit X Tafeln und in den Text gedruckten Abbildungen. VIII u. 380 S.

Bald nach dem Tode Wilhelm Weber's, der 56 Jahre der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften als Mitglied und dann noch 4 Jahre als Ehrenmitglied angehört hatte, beschloss diese Gesellschaft die Herausgabe seiner gesammelten Werke und stellte einen kurzen Termin für die Beendigung der neuen Veröffentlichung. Mit dankenswerter Schnelligkeit sind die mit der Arbeit betrauten Männer vorgegangen und haben in der vorgeschriebenen Zeit die sechs stattlichen Bände fertig gestellt, in denen uns das Lebenswerk des Göttinger Gelehrten vorliegt, der die Traditionen der glänzenden Gauss'schen Periode der Georgia Augusta bis in unsere Tage fortführte. Durch solche rasche Beendigung, die vor anderen ähnlichen Unternehmungen vorteilhaft ausgezeichnet ist, wird den lebenden Physikern erheblich genützt. Auch der Verlagsbuchhandlung ist es als Verdienst anzurechnen, dass sie die Bewältigung einer solchen Aufgabe bereitwillig ermöglicht und das Ganze in würdiger Weise ausgestattet hat.

In das Berichtsjahr fallen die ersten beiden Bände; das Referat über die folgenden muss für den nächsten Band des Jahrbuchs verschoben werden. Die Akustik des ersten Bandes umfasst 23 Nummern; die Mechanik, Optik und Wärmelehre 16. Die akustischen Aufsätze aus den Jahren 1825-1835, also der frühesten Schaffensperiode Weber's angehörig, gliedern sich in zwei Serien; die erste (I-XIII) enthält Aufsätze, die über die akustischen Arbeiten anderer berichten, sie prüfend weiterführen. Unter unmittelbarem Einflusse Chladni's entstanden, wird diese Reihe durch die Biographie desselben geschlossen, der ein Referat über Chladni's Akustik folgt. Die zweite Serie enthält grundlegende Beobachtungen Weber's aus der Akustik, hauptsächlich zur Theorie der Zungenpfeifen. Die Chladni'sche Besprechung der unter No. XIV abgedruckten Habilitationsschrift über die Gesetze der Zungenpfeifen, welche mit der verloren ge-

gangenen Dissertation wahrscheinlich inhaltlich übereinstimmt, steht am Ende der akustischen Abteilung.

Die im zweiten Teile dieses Bandes vereinigten Abhandlungen sind weniger im Zusammenhange entstanden; auch von ihnen gehört die Mehrzahl den früheren Lebensjahren des Verfassers an. Nur eine ist 1883 erschienen, 4 in den Jahren 1861 und 1866, die anderen (11) von 1828 bis 1841, unter diesen letzteren die wichtigeren. Der Herausgeber weist besonders auf die Aufsätze V bis VII hin, in denen nach einer geistvollen Methode von Gauss die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung wohl zum ersten Male einer exacten Untersuchung unterworfen sind; ferner auf No. XVI, wo eine sehr sinnreiche Methode zur Beobachtung des Unterschiedes der adiabatischen und isothermischen Dilatation fester Körper mitgeteilt und angewandt wird.

Mit dem zweiten Bande, der die Arbeiten aus dem Gebiete des Magnetismus in chronologischer Folge (1836 - 1854) enthält, treten wir in die Göttinger Periode ein, deren erstes bedeutsames Jahrzehnt mit Gauss verlebt wurde. Den grösseren Teil der in diesem Bande vereinigten Abhandlungen bilden die Beiträge Weber's zu den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. „Die Bedeutung dessen, was Gauss und Weber in dem Jahrzehnt ihrer gemeinsamen Arbeit geschaffen haben, geht über das zunächst verfolgte Ziel weit hinaus. Ein grosser Teil unserer jetzigen Beobachtungskunst hat sich an den von ihnen behandelten Problemen entwickelt, und es ist vor allem Weber's Verdienst, die strengen von Gauss eingeführten Principien auf die Messungen des Galvanismus ausgedehnt zu haben“. Es ist nicht möglich, hier die 29 Abhandlungen einzeln durchzugehen. Wir wollen nur darauf hinweisen, dass viele von den Experimentaluntersuchungen noch heute mehr als ein historisches Interesse haben, so die Untersuchung über die Abhängigkeit des Stabmagnetismus von der Temperatur, die Arbeiten aus dem Gebiete der Magnetelektricität vermöge ihrer eigenen Bedeutung und wegen ihrer Beziehungen zu den elektrodynamischen Massbestimmungen, die Anwendung der Magnetinduction auf die Messung galvanischer Widerstände. Die Erläuterungen zu den Terminsbeobachtungen des magnetischen

Vereins für die vier letzten Jahrgänge der „Resultate" sind nur in Auszügen wiedergegeben. Lp.

---

H. Weber. Wilhelm Weber; eine Lebensskizze. Breslau. 120 S.

---

John Couth Adams†. Nature XLV. 301-302, 401-402.

Geb. 5. Juni 1819 zu Lidcot bei Launceston in Cornwall, berechnete gleichzeitig mit Leverrier die Störungen des Uranus und schloss auf die Existenz eines neuen Planeten, gest. 1892. Lp.

---

Sir George Biddell Airy†. Nature XLV. 232-233.

Geb. 27. Juli 1801 zu Alnwick in Northumberland, gest. 2. Jan. 1892; 1826 Professor der Mathematik zu Cambridge, 1828 ebenda Professor der Astronomie, 1836 Director der Sternwarte in Greenwich. Lp.

---

Faye. Notice sur Sir Georges Biddell Airy, Associé étranger de l'Académie. C. R. CXIV. 91-93.

E. Budde. Nachruf an Georg Biddell Airy. Wiedemann Ann. XLV. 601-604.

In der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gesprochen, hebt dieser Nachruf, nach einer kurzen Lebensskizze des berühmten Astronomen (1801-92), hauptsächlich dessen Verdienste um die Förderung der Physik und des Studiums der Physik hervor. Tn.

---

F. Brioschi. Enrico Betti, annuncio necrologico. Annali di Mat. (2) XX. 256.

E. Beltrami. Enrico Betti. Palermo Rend. VI. 245-246.

E. Pascal. Il senatore Enrico Betti. Rivista di Mat. II. 151-153.

G. Basso. Parole in commemorazione di Enrico Betti. Torino Atti XXVIII. 3-6.

Die erste der vorstehend angegebenen Notizen ist wesentlich

Todesansage; die zweite verkündet die Herausgabe der Schriften Betti's durch die Acc. dei Lincei und wirft einen Blick auf die mathematisch-physikalischen Arbeiten des Verstorbenen; die dritte gedenkt seiner Persönlichkeit und seiner Verdienste um die Universität Pisa; die vierte giebt einen Lebensabriss (1823 - 92) und eine kurze Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen.

Tn.

V. Volterra. Enrico Betti. Nuovo Cimento (3) XXXII. 5-7.

L. Pinto. Per Enrico Betti. Poche parole. Napoli Rend. (2) VI. 143-144.

Enrico Betti, einer der ausgezeichnetsten Pfleger der mathematischen Physik in Italien, geboren in Pistoja den 21. October 1823, starb in Pisa den 11. August 1892. Seine gesammelten Werke werden auf Veranlassung der Accademia dei Lincei demnächst erscheinen.

Vi.

O. Bonnet et E. A. B. Mouchez†. C. R. CXIV. 1509-1510.

Nekrologe. C. R. CXV. 1113-1119.

Kurze Rückblicke auf Leben und Arbeiten von P. O. Bonnet (1819-92), von E. A. B. Mouchez, dem Nachfolger Le Verrier's, von G. B. Airy (1801-92), der 46 Jahre lang die Sternwarte von Greenwich leitete, und von L. L. Chr. Lalanne, dem Erfinder des Arithmoplanimeters.

Tn.

Tisserand. Discours prononcé aux funérailles de M. Ossian Bonnet, le 24 juin 1892. Annuaire du Bur. des Long. pour 1893. D, 3 S.

Faye, Bouquet de la Grye, Loewy. Discours prononcés aux funérailles de M. Mouchez, le mardi 28 juin 1892. Annuaire du Bur. des Long. pour 1893. E. 16 S.

Den Reden über Mouchez entnehmen wir, dass Amédée Ernest Barthélemy M. in Madrid am 24. August 1821 von französischen Eltern geboren und in Versailles erzogen ist. Mit sechzehn Jahren

trat er in die École de marine ein und wurde Marineoffizier; als solcher beschäftigte er sich besonders mit der genauen geographischen Ortsbestimmung und der Küstenaufnahme (in Brasilien, Algier); 1874 erfolgreicher Führer der Expedition zur Beobachtung des Venusdurchganges auf der Insel Saint-Paul, in Folge davon Mitglied der Akademie, seit 1878 Director der Sternwarte als Nachfolger Leverrier's, fast gleichzeitig zum Contreadmiral ernannt; gestorben den 25. Juni 1892. Lp.

---

J. Boussinesq. Notice sur les travaux de M. de Caligny. C. R. CXIV. 797-802.

Anatole-François Hüe, Marquis de Caligny (1811-91) hat sich in hervorragender Weise mit Hydraulik beschäftigt; seine Leistungen, insbesondere sein double siphon oscillant, der ihm (1839) den Montyon-Preis brachte, werden gekennzeichnet, ebenso seine Arbeiten über schwingende Bewegungen von Flüssigkeiten und sein Vorschlag zur Entsumpfung gewisser Gebiete. Tn.

---

E. Bertini. Commemorazione del M. E. prof. Felice Casorati. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1206-1236.

Bertini entwirft in dieser Gedächtnisrede ein Lebensbild Casorati's (1835-90) und giebt dann, bezugnehmend auf die S. 1228-1232 mitgeteilte Zusammenstellung seiner 49 veröffentlichten mathematischen Arbeiten, eine Besprechung und Würdigung derselben, indem er dabei 7 Gruppen unterscheidet. Tn.

---

Nachruf für Prof. Dr. Lorenz End. Hoffmann Z. XXXIII. 636-637.

Geb. 1830, gest. 20. Jan. 1892 als Mathematiker des Realgymnasiums zu Würzburg. Lp.

---

E. Fergola. Per Annibale de Gasparis. Napoli Rend. (2) VI. 65-66.

Geb. zu Bugnara in der Provinz Aquila 9. Novbr. 1819. stu-

dirte de Gasparis unter Tucci und de Angelis 1838 zu Neapel; 1840 von Capocci als Zögling und Observator der Sternwarte von Capodimonte angenommen, wurde er 1851 Professor der Astronomie, nachdem er in den beiden vorangehenden Jahren die Planeten Hygiea, Parthenope, Egeria entdeckt hatte, Director der Sternwarte seit 1864; er entdeckte ferner Eunomia, Psyche, Massalia, Themis, Ausonia, Beatrix, verfasste viele theoretische Schriften aus der reinen Mathematik und der theoretischen Astronomie; gestorben 21. März 1892. Lp.

---

E. Rouché. Notice sur C. Gérono. Nouv. Ann. (3) XI. 538-542.

Schildert Gérono (1799-1891), den Mitbegründer der Nouvelles Annales (1842), als Ehrenmann, als verdienten Lehrer, als bescheidenen und hervorragenden Gelehrten. Tn.

---

P. Mansion et J. Neuberg. Louis-Philippe Gilbert. Mathesis (2) II. 57.

P. Mansion. Notice sur Ph. Gilbert. Brux. S. sc. XVI A. 102-110.

Dieser Aufsatz ist in einer Schrift abgedruckt, die 1893 besonders erschienen ist und im nächsten Bande des Jahrbuchs angezeigt werden wird. Gilbert wurde am 7. Febr. 1832 zu Beauraing geboren und starb zu Löwen am 4. Febr. 1892. Von den zahlreichen Arbeiten, die man ihm verdankt, seien angeführt seine Untersuchungen über die Diffraction, über die Rotation der Körper und seine geschichtlichen Abhandlungen über Galilei.

Mn. (Lp.)

---

P. Mansion. Louis-Philippe Gilbert. — Liste des publications de L. Ph. Gilbert. Revue des q. sc. (2) I. 620-627, 627-641.

Der Aufsatz ist aus den Annales de la Soc. scientifique XVI A. 102-110 abgedruckt. Die Liste ist vervollständigt in der Schrift des Verfassers von 1893 erschienen. Mn. (Lp.)

---

C. A. Laisant. Louis-Philippe Gilbert. Note sommaire sur sa vie et ses travaux. Soc. Philom. Bull. (8) IV. 138-146.

Kurze Notiz über das Leben Gilbert's (7. Febr. 1832 - 4. Febr. 1892) nach der biographischen Skizze von Hrn. Mansion in Brux. S. sc., nebst einer ausführlichen Liste seiner Schriften. Lp.

---

Robert Grant †. Nature XLVII. 36-37.

Geb. zu Grantown-on-Spey, gest. im Alter von 78 Jahren ebenda am 24. Oct. 1892, Verfasser der History of Physical Astronomy from the earliest ages to the middle of the nineteenth century, 1852; seit 1859 Professor der Astronomie an der Universität zu Glasgow. Lp.

---

A. Gutzmer. Zur Erinnerung an Paul Günther. Schlömilch Z. XXXVII. Hl. A. 46-49.

Eine Würdigung des Strebens und der Arbeiten Günther's (1867-91). Tn.

---

Thomas Archer Hirst †. Nature XLV. 399-400.

Geb. zu Heckmondwike in Yorkshire 22. April 1830, gest. 16. Febr. 1892. Lp.

---

K. A. Andreiew. W. G. Imschenetzky. Chark. Ges. (2) III. (Russisch.)

T. Suworow. W. G. Imschenetzky. Kasan Ges. (2) II. (Russisch.)

Kurze biographische Notizen über W. G. Imschenetzky (gest. 24. Mai/5. Juni 1892). Hr. Andreiew verspricht eine ausführliche Biographie des ehrwürdigen russischen Mathematikers. Wi.

---

G. Mittag-Leffler. Sophie Kovalevsky. Notice biographique (avec le portrait de S. Kovalevsky). Acta Math. XVI. 385-392.

Giebt Auskunft über das Leben der bedeutenden Frau, ins-

besondere über ihre durch den Verf. erwirkte Professur zu Stockholm, über ihre Leistungen und über ihre Persönlichkeit. Beigegeben ist ein Verzeichnis ihrer veröffentlichten mathematischen Arbeiten (in der Zahl 10) und ihrer Vorlesungen (12 in den Jahren 1884-90). Tn.

---

CH. HERMITE. Note sur M. Kronecker. C. R. CXIV. 19-21.

E. LAMPE. Leopold Kronecker†. Nachruf. Naturw. Rundschau. VII. 128-129.

Leopold Kronecker. Nekrolog. Naturw. Wochenschr. VIII. 591-593.

E. LAMPE. Nachruf an L. Kronecker. Wiedemann Ann. XLV. 595-601.

Hermite würdigt die Verdienste Kronecker's, insbesondere die um die Zahlentheorie und die elliptischen Functionen; Lampe gedenkt hauptsächlich der Entwickelung Kronecker's und seiner Beziehungen zu Kummer sowie der Art seines Arbeitens; der dritte Nekrolog geht auf den äusseren Lebensgang und das Persönliche ein; der letzte „Nachruf“ giebt die Ansprache wieder, welche Lampe in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 29. Januar 1892 hielt und ist fast übereinstimmend mit dem obigen zweiten Aufsatze. Tn.

---

P. MANSION et J. NEUBERG. Léopold Kronecker. Mathesis (2) II. 19, 136-137.

Die Verfasser heben besonders die Wichtigkeit der arithmetischen Theorien Kronecker's hervor. Mn. (Lp.)

---

H. B. FINE. Kronecker and his arithmetical theory of the algebraic equation. New York M. S. Bull. I. 173-184.

Der Verfasser, ein Schüler Kronecker's, schildert kurz den Lebensgang und den Charakter des Verstorbenen, kennzeichnet seine Hauptarbeitsgebiete und geht an der Hand der „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen“ genauer auf Kronecker's Auffassungen im Zahlengebiete ein. Lp.

---

A. Brialmont. Notice sur Jean-Baptiste-Joseph Liagre. Annuaire Belg. LVIII. 323-376.

J. B. J. Liagre, geb. zu Doornik am 18. Febr. 1815, starb zu Brüssel am 13. Jan. 1891. Er war ständiger Sekretär der Akademie seit dem 5. Mai 1874. Im Jahre 1852 veröffentlichte er sein Buch: „Calcul des probabilités et théorie des erreurs avec des applications aux sciences d'observation en général et à la géodésie en particulier“, von dem 1879 eine neue Auflage erschienen ist. Verschiedene Abhandlungen aus der Astronomie und Geodäsie, Untersuchungen über die Organisation der Wittwenkassen, über militärische Pensionen und über das Versicherungswesen; endlich einige populäre Werke (Geometrie, Topographie, Astronomie). Mn. (Lp.)

---

E. Czuber. Franz Machovec und Anton Winckler. Monatsh. f. Math. III. 403-406.

Geb. 24. Decbr. 1855 zu Schlüsselburg in Böhmen, studirte Machovec 1872/75 an der technischen Hochschule in Prag, Lehrer seit 1876, gest. 8. Oct. 1892 zu Karolinenthal in Böhmen.

Winckler, geb. 3. Aug. 1821 zu Riegel bei Freiburg im Breisgau, studirte in Karlsruhe und bestand 1844 die Staatsprüfung als Ingenieur; studirte 1845 Astronomie bei Nikolai in Mannheim, dann bald darauf in Berlin Mathematik bei Dirichlet, Steiner, Encke, Eisenstein, promovirte 1847 in Kiel, Assistent in Karlsruhe 1848/51, Privatgelehrter daselbst 1851/53, Professor der praktischen Geometrie zu Brünn 1853/59, der reinen Mathematik am Johanneum zu Graz bis 1866, seitdem Professor der Mathematik an der technischen Hochschule in Wien. Seine Arbeiten betreffen vorzugsweise die Integralrechnung und die Theorie der Differentialgleichungen. Er starb am 30. Aug. 1892. Lp.

---

P. Duhem. Emile Mathieu, his life and works. New York M. S. Bull. I. 156-168.

Dieser nach einem Manuscripte des Verfs. von Herrn A. Ziwet übersetzte Aufsatz bespricht in höchst sachkundiger Weise die her-

vorragenden Leistungen von Mathieu, der sich zuerst mit der Algebra beschäftigte, später aber seine ganze Arbeitskraft der mathematischen Physik zuwandte. Das grosse Werk, in welchem er das gesamte Gebiet bearbeiten wollte, war auf elf Bände berechnet; acht sind beendigt gewesen, als dem fünfundfünfzigjährigen Gelehrten die Feder entsank. Bitter klagt Duhem sein Vaterland an, dass es den echten Nachfolger der Cauchy, Poisson, Lamé ohne Anerkennung in einer Provinzialstadt belassen habe; seit dem Tode Lamé's sei eben die mathematische Physik ausser Mode gekommen. Geboren wurde Mathieu am 15. Mai 1835 zu Metz, Zögling der École Polytechnique, Doctor am 28. März 1859, in einem für Frankreich ungewöhnlich frühen Alter, Assistent am Lycée St. Louis und Charlemagne; 1867 wurde ihm der cours complémentaire für mathematische Physik an der Sorbonne übertragen, 1869 Professor der reinen Mathematik zu Besançon, 1873 zu Nancy bis zu seinem Tode 1890 im September. Lp.

---

G. Van der Mensbrugghe. Notice sur Charles-Marie-Valentin Montigny. Annuaire Belg. LVIII. 285-322.

Ch. M. V. Montigny, geb. zu Namur am 8. Jan. 1819, starb am 16. März 1890 zu Schaerbeek-lez-Bruxelles. Man verdankt ihm eine neue Theorie des Funkelns der Sterne und einen neuen Apparat zum Messen desselben (scintillomètre), ausserdem andere physikalische und meteorologische Untersuchungen.

Mn. (Lp.)

---

Necrologia di Enrico Novarese. Rivista di Mat. II. 35. Lp.

---

C. Segre. Riccardo de Paolis; cenni biografici. Palermo Rend. VI. 208-224.

R. de Paolis (1854-92) war Schüler von Cremona, Battaglini und Beltrami (1872-75), dann Lehrer der Mathematik in Caltanisetta, in Rom, Bologna (1879), Pavia (1880), endlich in Pisa, wo er starb. Segre zeichnet seinen Lebensgang und bespricht der

Zeitfolge nach seine Arbeiten, ihre Entstehung und wissenschaftliche Beziehung und Bedeutung, sowie seine Lehrthätigkeit.

Tn.

---

L. PINTO. Per Dino Padelletti — poche parole. Napoli Rend. (2) VI. 49-50.

G. Torelli. Lista delle pubblicazioni di Dino Padelletti. Palermo Rend. VI. 68-72.

Geb. 1852 zu Montalcino bei Siena, gest. an einem Tage mit seiner Mutter 1892, studirte zu Pisa, Zürich, Dresden, Berlin, London, Lehrer für theoretische Maschinenlehre zu Mailand 1875, ausserordentlicher Professor der analytischen Mechanik zu Palermo 1877, 1879 zu Neapel, ordentlicher Professor seit 1884. Seine Arbeiten, deren Liste von Hrn. Torelli gegeben ist, gehören der theoretischen Mechanik an. Lp.

---

Gustav Plarr†. Nature XLV. 419.

Geb. zu Kupferhammer bei Strassburg am 27. August 1819, gest. zu Toxbridge am 11. Jan. 1892, Freund von Sir William Rowan Hamilton und Verbreiter der Theorie der Quaternionen.

Lp.

---

R. ZAMPA. Armando de Quatrefages. Commemorazione. Rom. Acc. P. d. N. L. XLV. 38-39.

---

O. BÖKLEN. F. E. Reusch. Böklen Mitt. V. 1-18. (Mit dem Bildnis von Reusch.)

Giebt einen Lebensabriss des Tübinger Professors Reusch (1812-91), teilt bei der Leichenfeier gesprochene Worte der Würdigung mit, zählt seine Arbeiten auf und erläutert deren Entstehung und geschichtliche Beziehung sowie ihre Bedeutung. Tn.

---

Lewis Morris Rutherfurd†. Nature XLVI. 207-208.

Geb. zu Morrisania (New Jersey) 25. Novbr. 1816, gest.

30. Mai 1892 auf seinem Landgute Tranquillity in New Jersey; Astronom. Lp.

---

G. Torelli. Achille Sannia; commemorazione. Palermo Rend. VI. 48-51.

Geb. 22. April 1823 zu Campobasso, gest. zu Neapel 8. Febr. 1892. Sannia war zuerst gesuchter Privatlehrer für Mathematik zu Neapel 1853/65; seit 1865 gehörte er der Universität als Lehrer an. Mit seinem Schüler d'Ovidio zusammen verfasste er den „Trattato di geometria elementare“; jüngst noch veröffentlichte er die „Geometria projettiva“ (F. d. M. XXIII. 1891. 631 ff.); er genoss als Lehrer eines hohen Rufes. Lp.

---

Felix Müller. Karl Heinrich Schellbach. Gedächtnisrede gehalten in der Aula des Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums am 29. October 1892. Berlin. G. Reimer. 35 S. 8°.

F. Poske. Karl Heinrich Schellbach†. Poske Z. V. 301-303.

Nekrolog Schellbach („Der alte Schellbach“). Hoffmann Z. XXIII. 315-317, 637-638.

88-jährig, nach 60 Jahren der Lehrthätigkeit, darunter 48 an derselben Schule, sank 1892 Schellbach ins Grab, der Nestor der deutschen Mathematiklehrer, ihr Vorbild und Meister. Sein Leben und Arbeiten, sein anregendes Wirken auf verschiedenen Gebieten, seine Verdienste um den Wandel in der Methode des mathematischen Unterrichtes, seine wissenschaftlichen Leistungen werden in der obigen ersten Schrift warm vorgetragen — nur möchte man in den „Anmerkungen“ noch mehr Einzelnheiten behandelt wünschen. Tn.

---

R. Wolf. Notizen zur schweizerischen Culturgeschichte. (Joh. Jak. Schmalz†.) Wolf Z. XXXVII. 228-232.

Würdigung des in kleinen Verhältnissen lebenden Geometers

und Ingenieurs Schmalz (1820-92) zu Büren (Bern), der eifriger Liebhaber der praktischen Optik und der Astronomie war. Tn.

---

R. Sturm. Heinrich Schröter. (Nekrolog.) J. für Math. CIX. 358-360.

R. Sturm. Heinrich Schröter. Chronik d. Univ. Breslau 1891/92. 10 S.

Heinr. Vogt. Heinrich Schröter†. Hoffmann Z. XXIII. 230-232.

Schröterfeier. Aus: Schlesische Ztg. 1893. No. 511. 6 S. 8⁰.

Der erste dieser Artikel ist ein kurzer Nachruf, der, den Lebensgang Schröter's (8. Jan. 1829 - 3. Jan. 1892) skizzirend, seine Verdienste um die synthetische Geometrie und den Vorzug seiner Darstellung hervorhebt; der zweite ist ausgeführter, zumal betreffs der persönlichen Verhältnisse und kennzeichnet die fünf Gebiete der Geometrie, in denen er sich forschend und darstellend bewegte; der letzte Artikel schildert den Verlauf der in Breslau am 9. Juli 1893 abgehaltenen Schröterfeier, bei welcher der Universität ein Medaillonbild Schröter's aus Bronze gestiftet ward, und hebt in der Weiherede Sturm's mit der Bedeutung Schröter's auch die seiner Vaterstadt Königsberg für die Pflege der Mathematik hervor. Tn.

V. Strouhal. „Dr. August Seydler, sein Leben und gelehrtes Wirken.“ Časop. XXI. 193. (Böhmisch.)

Enthält eine mit liebevoller Gründlichkeit abgefasste Lebensskizze des leider zu früh verstorbenen Professors der Astronomie und mathematischen Physik an der k. k. böhmischen Universität in Prag, Dr. August Seydler, geb. 1. Juli 1849 zu Senftenberg, gest. 22. Juli 1891 zu Prag. Seine physikalische Thätigkeit wird von Hrn. Fr. Koláček, die astronomische von Hrn. G. Gruss eingehend besprochen, und schliesslich ein vollständiges Verzeichnis seiner Publicationen beigefügt. Std.

Werner von Siemens. Lebenserinnerungen. Berlin.

---

Ernst Werner von Siemens†. Nature XLVII. 153-155.

---

Professor James Thomson†. Nature XLVI. 129-130.

Geb. 1821 zu Belfast, gest. 8. Mai 1892, Bruder von Sir William Thomson (jetzt Lord Kelvin), Entdecker der Erniedrigung des Schmelzpunktes des Eises durch den Druck (1850), Professor der Ingenieur-Wissenschaften in Belfast (1857-72) und Nachfolger von Rankine in Glasgow (1872-1889). Lp.

---

E. Paladini. Commemorazione di Domenico Turazza. Politecnico XL. 170-180.

D. Turazza, ein ausgezeichneter Hydrauliker, geboren in Malcesine am Garda-See den 29.(?) Juli 1813, starb in Padua den 12. Januar 1892 als Professor der rationellen Mechanik und Hydraulik an der dortigen technischen Hochschule. Vi.

---

A. Favaro. Della vita e delle opere del Senatore Domenico Turazza. Commemorazione letta nell'Aula Magna della R. Università di Padova addì 27. Maggio 1892. Padova. Tip. G. B. Randi. 82 S.

Domenico Turazza wurde den 30.(?) Juli 1813 in Malcesine am Garda-See geboren. Seit 1824 besuchte er das Gymnasium in Verona, seit November 1831 die Universität von Padua, wo er am 22. Januar 1835 die philosophische Doctorwürde erlangte. Am 17. October 1834 wurde er zum Assistenten der Professur für Ackerbau gewählt; in dieser Stellung blieb er drei Jahre. Dann wurde er 1839 zum ordentlichen Professor der Mathematik und Mechanik am Gymnasium zu Vicenza ernannt, nachdem er während zwei Jahre diesen Lehrstuhl als Substitut gehabt hatte. 1841 wurde er Professor der darstellenden Geometrie an der Universität von Pavia und das nächste Jahr Professor der Geodäsie und Hydrometrie an derjenigen von Padua. In dieser Stadt blieb er den übrigen Teil seines Lebens (d. h. bis zum 12. Januar 1892), lehrte

verschiedene Zweige der angewandten Mathematik und wurde Gründer und Director der dortigen Polytechnischen Schule. Sehen wir von seiner litterarischen Thätigkeit ab, so betreffen die Arbeiten von Turazza meistenteils die theoretische und praktische Hydraulik, eine Wissenschaft, in der er eine wahre Autorität ersten Ranges war. Ein Verzeichnis seiner (neunzig) gedruckten und ungedruckten Arbeiten, welches einen Anhang der verdienstlichen und liebevollen Rede des Herrn Favaro (des Schwiegersohns des Verstorbenen) bildet, kann sehr wohl eine Idee von den Turazza'schen Verdiensten geben. La.

---

A. Cayley. Collected mathematical papers, VI. Cambridge. University Press.

Der sechste Band ist jetzt erschienen; mit ihm steigt die Anzahl der Artikel nun auf 416. Gbs. (Lp.)

---

Errichtung der Helmholtz-Stiftung und Verleihung ihrer ersten vier Medaillen. Berl. Ber. 1892. 610-611.

Die Medaille, zur Auszeichnung wissenschaftlicher Forscher aller Länder bestimmt, welche die in der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie vertretenen Wissenschaften oder die Erkenntnislehre durch hervorragende Leistungen gefördert haben, wurde auf Vorschlag des Hrn. von Helmholtz erstmalig verliehen an die Herren Emil du Bois-Reymond, Karl Weierstrass, Robert Wilhelm Bunsen, Lord Kelvin. Später erfolgt die Verleihung einer Medaille alle zwei Jahre, zuerst wieder für 1898. Lp.

---

Ansprache an Se. Excellenz Hrn. von Helmholtz zur Feier seines fünfzigjährigen Doctorjubilaeums am 2. November 1892. Berl. Ber. 1892. 905-909.

---

G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Erster Band.

1890-91. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes. Berlin. Georg Reimer. IV + 292 S. gr. 8°.

Dieser Jahresbericht der auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Bremen 1890 ins Leben getretenen Deutschen Mathematiker-Vereinigung enthält im ersten Teile (S. 1-20) die auf die Entstehung der Vereinigung bezüglichen Schriftstücke, kurze Nekrologe auf die im Berichtsjahre verstorbenen Mitglieder Benno Klein (5. Oct. 1846 - 26. März 1891) und Paul Günther (2. April 1867 - 27. Septbr. 1891), den Bericht über die geschäftlichen Sitzungen der Versammlung zu Halle, endlich die Statuten und das Mitgliederverzeichnis. Im zweiten Teile folgen kurze Auszüge aus den 24 in den wissenschaftlichen Sitzungen gehaltenen Vorträgen, über die in diesem Bande an passender Stelle berichtet wird. Der dritte, umfangreichste Teil (S. 79-292), der dem vorliegenden Bande seinen Charakter und besonderen Wert verleiht, enthält den Bericht des Herrn Franz Meyer über die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. Aehnliche Berichte über die verschiedenen Zweige der Mathematik sollen veranlasst werden und allmählich in den Jahresberichten erscheinen.

Lp.

---

L. Kronecker. Auszug aus einem Briefe an Herrn Prof. G. Cantor. Deutsche Math. Ver. I. 23-25.

Am Erscheinen in Halle bei der ersten Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung verhindert, legt Kronecker in diesem Schreiben die Gedanken kurz dar, welche er in dem übernommenen einleitenden Vortrage hatte ausführen wollen.

Lp.

---

A. Ziwet. The annual meeting of German mathematicians. New York M. S. Bull. I. 96-102.

Bericht über die Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Halle auf Grund von Nachrichten, die Herr H. Wiener, Schriftführer in Halle, gesandt hatte. Lp.

---

E. Narducci. Catalogo di Manoscritti ora posseduti da D. Baldassare Boncompagni. 2ª ediz. Roma. 4°.

## B. Geschichte einzelner Disciplinen.

G. Loria. L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della storia delle scienze esatte. Relazione fatta al 5. congresso storico italiano 22. 9. 1892. Quinto Congresso storico Italiano. 1892. 17 S.

Ist eine im besten Sinn gehaltene Agitationsrede für eine lebhaftere und erfolgreichere Pflege der Geschichte der exacten Wissenschaften in Italien, für eine Verbündung der reinen Forscher und der Vertreter von Geschichte und Philologie zu gemeinsamer Arbeit. Zur Förderung dieses Gedankens stellt Loria die Notwendigkeit und Nützlichkeit geschichtlicher Forschung dar, ihre Methode, ihre Förderungen, ihre Hemmungen, ihre Schwierigkeiten, wechselnd je nach den Zeiten, auf welche sie sich beziehen, ihre thatsächlichen Erfolge und die, welche sich in und für Italien in nächster Zukunft leicht ergeben können, in diesem an Handschriften so reichen, an Cultureinflüssen so bedeutsamen Lande.

Tn.

Fr. Th. Köppen. Notiz über die Zahlwörter im Abacus des Boëthius. Bulletin de l'Acad. St. Pétersb. Nouvelle série III. 30.

Es handelt sich um die Erklärung der rätselhaften Wörter, welche in dem Capitel „de ratione abaci“ der dem Boëthius zugeschriebenen „Geometria“ sich oberhalb der „pythagoreischen“ Zahlzeichen befinden und jedenfalls die Benennung dieser letzteren darstellen. Vincent hat diesen Wörtern teils semitischen, teils griechischen Ursprung zugeschrieben; derselben Meinung waren Woepcke und Lenormant. Der Verf. erklärt die Wörter ormis, celentis und igiss aus der magyarischen Sprache und spricht sich energisch gegen die symbolische Deutung derselben aus, sowie gegen ihre Verknüpfung mit den neupythagoreischen Lehren.

Wi.

G. Vivanti. Notice historique sur la théorie des ensembles. Bibl. Math. (2) VI. 9-25.

Eine historische Notiz über die von Hrn. Georg Cantor vor etwa 20 Jahren geschaffene Theorie der Punktmengen. Der Verfasser berichtet über die verschiedenen Fragen, welche bei der Ausbildung dieser Theorie behandelt worden sind, nennt die Gelehrten, welche dabei thätig waren, und giebt zuletzt ein chronologisch geordnetes Verzeichnis der bezüglichen Schriften. E.

---

E. Wappler. Bemerkungen zur Rhythmomachie. Schlömilch Z. XXXVII. Hl. A. 1-17.

Hier wird S. 12-17 der vollständige Text zweier Anleitungen zum „Zahlenkampfspiel“ oder Rhythmomachie veröffentlicht, beide aus dem cod. Monac. 14836 s. XI; die erste soll von Herimannus Contractus herrühren, die zweite stammt von einem Würzburger Kleriker Asilo. Hr. Wappler geht auch (S. 1-12) den erhaltenen Rhythmomachien nach und findet deren zwei oder drei aus dem 11., zwei aus dem 12., eine aus dem 13., eine aus dem 14., eine aus dem 15. und endlich die erste deutsche aus dem 16. Jahrhundert. Tn.

---

H. Weissenborn. Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. Berlin. Mayer u. Müller. 123 S. 8⁰.

In 20 Nummern von sehr ungleicher Ausdehnung wird der Stoff dargestellt; ihnen folgen (S. 82-123), ein Drittel des Buches ausmachend, reiche Anmerkungen. Es handelt sich, in weiterer Ausführung früherer Studien über „die Boëtiusfrage“ (1879) und über „Gerbert“ (1888), wesentlich um die Aufklärung über den von Gerbert als seinen Vorgänger im Ziffernrechnen erwähnten „Josephus Sapiens“ oder „Ispanus“: nach eingehender Erörterung der Verhältnisse des 10. Jahrhunderts, insbesondere Spaniens und der Juden, und nach Aufführung und Besprechung aller jemals erwähnten christlichen, muhammedanischen und jüdischen Josephs (S. 17-74) findet sich als Ergebnis die Vermutung (S. 75 u. 77),

dass besagter Joseph ein sogenannter Schutzjude des Grafen von Barcelona gewesen sei, der den jungen Gerbert im Rechnen unterwiesen habe; die Fragen nach Gerbert's Abakus und seinen Divisionsregeln, bezw. nach ihrer Entstehung bleiben auch jetzt ohne Aufklärung (S. 79). Tn.

---

L. Saalschütz. Ueber Zahlzeichen der alten Völker. Königsberg, Schriften phys. ökon. Ges. 5 S. 4°.

---

C. Le Paige. Sur l'origine des signes d'opération. Brux. S. sc. XVI A. 56-57, B. 70-83.

Der Verfasser beweist in einer nach unserer Ansicht unanfechtbaren Weise, dass das Zeichen + eine Abwandlung des lateinischen Wortes et (und) ist. Er stellt gleichzeitig betreffs des Ursprunges der Zeichen — und × die folgende Vermutung auf: Beide Zeichen entspringen vielleicht aus den Stäben mit sich kreuzender Richtung, die oft in den mittelalterlichen Rechenbüchern gebraucht werden. Mn. (Lp.)

---

G. Loria. Congetture e ricerche sull'aritmetica degli antichi Egiziani. Bibl. Math. (2) VI. 97-109.

Enthält einen interessanten Beitrag zur Frage, auf welche Weise die im Papyrus Rhind vorkommenden Zerlegungen in Stammbrüche ausgeführt worden sind. Herr Loria giebt eine einfache Methode an, durch welche alle Zerlegungen, mit Ausnahme von nur zwei, erhalten werden können, sobald man bestimmt hat, ob der Bruch eine Summe von 2, 3 oder 4 Stammbrüchen sein wird. Warum der eine Bruch in zwei, der andere in drei oder vier Stammbrüche zerlegt werden soll, diese Frage kann freilich Herr Loria ebenso wenig als seine Vorgänger beantworten. E.

---

F. J. van den Berg. De oudste rekentafels der wereld. Nieuw Archief XIX. 211-215.

Uebersicht der in der Vossischen Zeitung Nr. 38 und 39 er-

schienenen geschichtlichen Notizen von Prof. H. Brugsch, die ältesten Rechentafeln betreffend. Mo.

---

L. Delbos. Les mathématiques aux Indes orientales. Darboux Bull. (2) XVI. 93-112, sep. Gauthier-Villars et Fils.

Ist ein Auszug der Elemente von Bhaskaras Lilavati, eingeleitet durch eine Darstellung des heutigen indischen Schulrechnens. Tn.

---

F. J. Studnička. Ueber den Algorismus Křištans von Prachatic. Prag. Ber. 1892.

---

G. Loria. Aggiunte all'articolo „Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche". Rivista di Mat. II. 37-38.

Loria giebt wenige mehr litterarische Ergänzungen zu seiner in diesem Jahrb. (XXIII. 34) erwähnten Arbeit. Tn.

---

H. Burkhardt. Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini. Schlömilch Z. XXXVII. Suppl. 119-159.

Es wird hier zunächst die Entwickelung der Lehre von der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen gegeben, wie sie sich von 1670 bis 1770 durch die Arbeiten von Hudde, Saunderson, Le Seur, Waring, Vandermonde und hauptsächlich von Lagrange gestaltet hatte, ganz besonders rücksichtlich der dabei verwerteten combinatorischen Betrachtungen. Hierauf werden die sechs einzelnen Gestaltungen des Unmöglichkeitsbeweises von Ruffini (1799, 1801, 2, 5, 6, 13) dargelegt und kritisch gewürdigt, und hierbei wird besonders seinen substitutionentheoretischen Entwickelungen Aufmerksamkeit geschenkt. Eine Vergleichung mit Cauchy's diesbezüglichen Verdiensten macht den Abschluss. Tn.

---

Fr. Meyer. Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. Deutsche Math. Ver. I. 79-292. [New York M. S. Bull. III. 187-190, Anzeige von F. Franklin.]

Der Bericht beginnt mit einem „Rückblick auf die ältere Periode von 1841-1867“, in welcher die Mathematiker Boole, Cayley, Aronhold, Sylvester, Hermite und andere die Invariantentheorie begründeten. Ehe dann der Verfasser zur neueren Periode übergeht, erscheint ihm vor allem eine angemessene Abgrenzung des Stoffes geboten, zumal da die Theorie der linearen Transformationen während ihrer weiteren Entwickelung in fast alle Gebiete der Mathematik mit Erfolg eingegriffen hat. In Kürze kann das zur Behandlung kommende Gebiet als die Algebra derjenigen linearen Transformationen charakterisirt werden, deren Coefficienten stetig veränderliche Grössen sind, so dass insbesondere die „arithmetischen“ und die „transcendenten“ Invarianten ausgeschlossen bleiben.

Nach einer kurzen Auseinandersetzung der stufenweisen Entwickelung des Invariantenbegriffs folgt die Darstellung der „neueren Periode“ der Invariantentheorie, welche mit dem Gordan'schen Beweise für die Endlichkeit des vollen Invariantensystems beginnt. Als oberstes Einteilungsprincip sind dabei die Gesichtspunkte der „Aequivalenz“ und der „Formenverwandtschaft“ massgebend.

Der erste grosse, mit „Aequivalenz“ überschriebene Abschnitt enthält die Theorie der quadratischen und bilinearen Formen, das Aequivalenzproblem der nicht quadratischen Formen und die Theorie der Formen mit linearen Transformationen in sich.

Der zweite, mit „Formenverwandtschaft“ betitelte Abschnitt behandelt hauptsächlich die Sätze über die Endlichkeit der Invarianten und die Aufstellung voller Invariantensysteme, die Theorie der irrationalen Invarianten, die symbolische Methode, die unsymbolischen Invariantenprocesse, sowie die Theorie der besonderen invarianten Bildungen (Semiinvarianten, Combinanten, Resultanten, Discriminanten).

Dies ist das Fachwerk, in welches der Verfasser mit grossem Geschick die Fülle des Stoffes einordnet und trotz der Verschie-

denartigkeit der einzelnen Theorien und Vorstellungsweisen so übersichtlich gruppirt, dass der Leser jedes gewünschte Gebiet in dem Buche leicht auffindet. Dabei hat der Verfasser die Litteratur mit solcher Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit gesammelt, dass wohl kaum irgend ein Resultat eines Forschers mit Stillschweigen übergangen ist, und das Werk somit auch in dieser Hinsicht den strengsten Anforderungen genügt. Alle Freunde der algebraischen Invariantentheorie und der mit ihr verwandten mathematischen Wissenszweige sind dem Verfasser zu grossem Dank verpflichtet.

Ht.

---

A. Martin. Note on an error in Ball's History of Mathematics. New York M. S. Bull. II. 10-11.

Berichtigt die Angabe, Diophant solle behauptet haben, die Summe der Quadrate dreier ganzen Zahlen könne nicht gleich der Summe zweier Quadrate sein. Lp.

---

J. Fontès. Étude historique sur les carrés magiques. Assoc. Franç. Pau XXI. [1]. 158.

Abgedruckt ist ein kurzer Auszug des Vortrages, der sich vornehmlich auf die ältere Zeit erstreckt zu haben scheint.

Lp.

---

E. Lampe. La formule de Snell ou d'Ozanam appartient à Nicolas de Cusa. Mathesis (2) II. 230-231.

Es handelt sich um die Näherungsformel:

$$\varphi = \frac{3\sin\varphi}{2+\cos\varphi}.$$

Mn. (Lp.)

---

C. G. Knott. Recent innovations in vector theory. Edinb. Proc. XIX. 212-237.

Eine Streitschrift, welche für die Ueberlegenheit der Hamilton'schen Quaternionentheorie eintritt gegenüber den von den Herren Gibbs, Heaviside und Macfarlane entwickelten Vectortheorien. Der

Verf. geht auf einige bemerkenswerte Abhandlungen von O'Brien zurück, die zwischen den Jahren 1846 und 1852 erschienen sind, gerade zu der Zeit, als Hamilton seine Quaternionenrechnung entwickelte. Cly. (Lp.)

---

P. Mansion. Sur les recherches de Schering en métagéométrie. Brux. S. sc. XVI A. 51-53.

Beiträge zur Geschichte der Metageometrie. 1. Schering hat zuerst in den Jahren 1870 und 1873 einen nicht-euklidischen Raum durch die Relation zwischen den Entfernungen von $n+2$ Punkten gekennzeichnet, wenn $n$ die Anzahl der Dimensionen des betrachteten Raumes ist. 2. Bis jetzt ist kein Beweis vorhanden, dass Gauss vor Lobatscheffsky die Kenntnis des metrischen Teiles der nicht-euklidischen Geometrie besessen hat. Dagegen hat er durch Bartels und W. Bolyai als Mittelspersonen einen Einfluss auf Lobatscheffsky und J. Bolyai ausgeübt. Mn. (Lp.)

---

H. Poincaré. Non-Euclidean Geometry. Nature XLV. 404-407.

H. Poincaré. Nicht-euklidische Geometrie. Wöchentl. Uebersicht 1892. 187-195. (Polnisch.)

Uebersetzt aus der Revue générale des sciences pures et appliquées, Decbr. 1891. Lp.

---

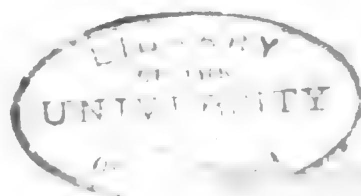
E. McClintock. On the non-Euclidian geometry. New York M. S. Bull. II. 21-33.

Eine durch die englische Uebersetzung von Lobatscheffsky's „Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien" (vergl. diesen Band S. 20) veranlasste Darstellung der Hauptgesichtspunkte, wie man sie bei den Urhebern dieser Theorie findet. Lp.

---

Lindemann. Ueber die uns erhaltenen Bücher aus der Bibliothek des Copernicus. — Ueber die Hypothesen der Geometrie. (Aus „Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg".) Königsberg. Koch. 4 S. gr. 4°.

---



G. Bellacchi. A proposito di un lavoro sulla storia delle matematiche. Periodico di Mat. VII. (1892) 81-88, 113-118, 169-171; VIII. (1893) 25-28, 29-62, 113-116, 137-144.

Die Abhandlung des Ref. „Il periodo aureo della geometria greca" (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 10) bietet Herrn Bellacchi die Gelegenheit, einige Bemerkungen über die alten Untersuchungsmethoden bekannt zu machen; insbesondere macht er auf die Anwendungen derselben aufmerksam, welche einige neuere Geometer (z. B. Leonardo der Pisaner, Luca Paciuolo, Borelli, Huygens, Kepler) machten, wie auch auf die Entwickelungen und Veränderungen, welche sie erfahren haben. Diese Bemerkungen sind zu zerstreut, um in wenigen Sätzen wiedergegeben zu werden.

La.

---

H. Suter. Einiges aus Nassir ed-Din's Euklidausgabe. Bibl. Math. (2) VI. 3-6.

Herr Suter bemerkt, dass die Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes, welche die Gleichheit der Quadrate über den Katheten und der Rechtecke, in welche das Hypotenusenquadrat durch die Fortsetzung der Höhe geteilt wird, durch das Mittelglied von Rhomboiden statt von Dreiecken darlegen, wahrscheinlich Nassir ed-Din zu verdanken sind, und teilt einige Belegstellen mit. Er bemerkt auch, dass ein Vorwurf, den Kästner gegen Nassir ed-Din bezüglich des Versuchs, das 13. Axiom zu beweisen, gemacht hat, nicht ganz gerecht ist. Zuletzt lenkt er die Aufmerksamkeit darauf, dass Nassir ed-Din nicht, wie Herr Heiberg angegeben hat, Euklid als aus Thus herstammend bezeichnet. E.

---

H. G. Zeuthen. Om Konstructionen som Existensbevis i den graeske Mathematik. Nyt Tidss. for Math. III A. 105-113; Naturforskermöde 351.

Diese kleine Abhandlung ist eine Wiedergabe eines in der skandinavischen Naturforscherversammlung 1892 gehaltenen Vortrags.

Herr Zeuthen macht hier geltend, dass die Construction bei

Euklid wesentlich die logische Bedeutung hat, zu zeigen, dass eine Figur wirklich existirt. So muss Euklid (1. Buch 16) durch Construction beweisen, dass zwei Punkte einen Halbirungspunkt der durch sie bestimmten Strecke haben, ehe er den Mittelpunkt in einem Beweise verwenden darf. Herr Zeuthen meint hierdurch eine Erklärung der Thatsache zu finden, dass die Griechen immer die Möglichkeitsbedingungen einer Construction zuerst discutiren, bevor die Construction ausgeführt wird, und dass sie sich bei der Construction niemals darum bekümmern, wie viele Lösungen eine Construction giebt. Er meint nämlich, dass die Absicht der Griechen im wesentlichen die ist: die notwendigen und zulänglichen Bedingungen für die Existenz einer Figur zu geben.

Die Discussion giebt dann die notwendigen Bedingungen, die Construction zeigt, dass sie auch zulänglich sind. Da aber dieses die Hauptabsicht ist, so bedarf man nur einer Lösung. Diese Bedeutung der Construction erklärt auch die Vorliebe der Griechen für Constructionen mittels Kegelschnitte, wenn Kreise und gerade Linien nicht ausreichen.

Die Erfindung der Kegelschnitte von Menaichmos soll mit der Anwendung auf die Construction der beiden Mittelproportionalen verknüpft sein, mit Hülfe der Curven, deren Gleichungen in rechtwinkligen Coordinaten

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx, \quad xy = ab$$

sind. Die Kegelschnitte wurden als geometrische Oerter vermöge der Eigenschaften definirt, welche wir in der Form der obigen Gleichungen geben. Man konnte dann diese Curven unmittelbar zur Construction der Mittelproportionalen verwenden. Doch steckte hierin ein logischer Mangel. Man wusste nicht, oder meinte, es wäre nicht erlaubt, zu wissen, dass diese Curven existirten, obgleich man eine unbegrenzte Anzahl ihrer Punkte construiren konnte (die Punkte könnten discontinuirlich liegen).

Diese Schwierigkeit wurde von Menaichmos auf die Weise überwunden, dass er die Curven als Schnitte von Kegeln darstellte. Die Kegel waren nämlich infolge ihrer Definition continuirliche Flächen, ihre Schnitte mit Ebenen also continuirliche Curven.

Die Kegelschnitte wurden als ebene Schnitte senkrecht auf

einer erzeugenden Geraden in einem Umdrehungskegel definirt. Diese Definition wurde nicht gewählt, weil man auf diese Weise am leichtesten die Eigenschaften der Kegelschnitte erforschen konnte, sondern nur deswegen, weil man auf diese Weise eine leichte Definition eines jeglichen Kegelschnittes hatte, und weil eine einzige Lösung der Aufgabe, durch einen Kegelschnitt einen Kegel zu legen, genügte.

Daher wurde diese Definition beibehalten, obgleich man schon lange wusste, dass auch andere Schnitte von Kegeln „Kegelschnitte" wären. V.

---

Nassiruddin-el-Toussy. Traité du quadrilatère. Texte arabe avec traduction française par Al. Pacha Carathéodory. Constantinople. 157 + 214 S. 8°. (1891). [Darboux Bull. (2) XVI. 147-152.]

---

F. Rudio. Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch herausgegeben und mit einer Uebersicht über die Geschichte des Problemes von der Quadratur des Cirkels, von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage, versehen. Leipzig. B. G. Teubner. VIII + 166 S. 8°.

Fast die Hälfte der Schrift nimmt die geschichtliche Uebersicht ein, welche in vier Capiteln das Problem selbst und die Epochen seiner Geschichte, dann diese letztere bis 1670, bis 1766, endlich bis zur Gegenwart behandelt. Dieser Teil ist eine Umarbeitung und wesentliche Erweiterung einer früher veröffentlichten Arbeit. Den Schluss bildet die Uebersetzung bezw. Wiedergabe der grundlegenden Arbeiten der genannten vier Männer.

Tn.

---

É. Vigarié. Les progrès de la géométrie du triangle en 1891. Journ. de Math. élém. (4) I. 7-10, 34-36.

Wie für das Jahr 1890 (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 38) hat Hr. Vigarié auch über die im Jahre 1891 gemachten Fortschritte

in der Geometrie des Dreiecks eine Uebersicht zusammengestellt und die betreffenden Arbeiten nach folgenden Gesichtspunkten gruppirt: 1. Transformationsmethoden. 2. Aehnliche Figuren. 3. Coordinatensysteme. 4. Entfernung zweier Punkte. 5. Allgemeines. 6. Orthologische Dreiecke. 7. Artzt'sche Parabeln. 8. Feuerbach'sche Punkte und Geraden. 9. Brocard'sche Ellipse. 10. Tripolare Coordinaten. 11. Inverse Kreise. 12. Selbständige Werke. 13. Hinweis auf einige den in Rede stehenden Gegenstand betreffende Mitteilungen, welche auf der Versammlung der Association française pour l'avancement des sciences zu Marseille 1891 gemacht worden sind, die aber zur Zeit der vorliegenden Zusammenstellung noch nicht im Drucke vorlagen. Gz.

---

C. Segre. Intorno alla storia del principio di corrispondenza e dei sistemi di curve. Bibl. Math. (2) VI. 33-47.

Herr Segre bemerkt, dass man gewöhnlich Chasles als Entdecker des Correspondenzprincips bezeichnet hat, zeigt aber, dass dies nicht ganz richtig ist, da Herr de Jonquières früher als Chasles von diesem Princip Anwendung gemacht hatte. In der That hat Chasles das Princip zum ersten Mal in einer Note vom Jahre 1864 angegeben, während de Jonquières schon 1861 sich mit demselben vertraut zeigte. E.

---

A. v. Braunmühl. Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Curven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Katalog d. Math. Ausst. Nürnberg. 54-88.

Behufs geschichtlicher Orientirung bei der geplanten mathematischen Ausstellung gelegentlich der deutschen Mathematiker-Vereinigung zu Nürnberg verfasst, verfolgt dieser Teil des Katalogs sein Ziel von den ältesten Spuren ab bei den Griechen und Arabern, stellt die Bemühungen der Praktiker-Künstler und der Gelehrten des 16. Jahrhunderts dar, geht auf Descartes' und Schooten's Leistungen ein, sowie auf die von Bramer und auf die Ausführungen hauptsächlich

Suardi's, um die durch die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft bekannt gewordenen neuen Curven instrumental darzustellen. 23 Figuren, darunter 12 solche von ausgeführten Instrumenten, verdeutlichen den Text. Tn.

---

R. E. ALLARDICE. The barycentric calculus of Möbius. Edinb. M. S. Proc. X. 2-21.

Ein kurzer Bericht über den barycentrischen Calcul und seine Methoden. Gbs. (Lp.)

---

FELIX KLEIN. Ueber neuere englische Arbeiten zur Mechanik. Deutsche Math. Ver. I. 35-36.

Der kurze Auszug des gehaltenen Vortrages enthält nur einige Bemerkungen über die Entstehungsgeschichte von Hamilton's Integrationstheorie der Mechanik (aus den Untersuchungen in der Undulationstheorie des Lichtes). Lp.

---

W. W. ROUSE BALL. A Newtonian fragment relating to centripetal forces. Lond. M. S. Proc. XXIII. 226-231.

Unter den zahlreichen Blättern von Newton's Hand mit Entwürfen und Rechnungen in der Portsmouth-Sammlung befindet sich ein Bruchstück über das Gesetz der centripetalen Kraft, unter welchem eine beliebige Bahn und insbesondere eine Parabel beliebiger Ordnung beschrieben werden kann. Der Satz, zu dem die Analyse führt, ist für astronomische Anwendungen nicht geeignet und aus diesem Grunde wahrscheinlich nicht in die Principia aufgenommen worden. Das Interesse des abgedruckten Stückes liegt darin, dass es ein Licht wirft auf die Methode, nach welcher Newton arbeitete. Während nämlich in den Principia mit einer Ausnahme die geometrische Beweismethode angewandt ist, arbeitet hier Newton mit seinen Fluxionen. Das Datum des Bruchstücks ist etwa um 1694 zu setzen, jedenfalls nach der ersten Auflage der Principia und vor die zweite (1713). Lp.

G. Fouret. Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate. S. M. F. Bull. XX. 38-39.

Die Curve, auf welcher sich ein schwerer Punkt ohne Anfangsgeschwindigkeit in einer verticalen Ebene bewegen muss, wenn der Bogen in derselben Zeit durchlaufen werden soll wie die zugehörige Sehne, ist eine Lemniskate nach einem Satze, der bald Saladini, bald Fuss zugeschrieben wird. Herr Fouret macht darauf aufmerksam, dass dieser Satz schon in Euler's Mechanik 1736 vorkommt. Hiernach ist u. a. die bezügliche Angabe in einer früheren Arbeit des Verfassers zu verbessern, wo das verallgemeinerte Problem behandelt wurde (F. d. M. XVIII. 1886. 861). Lp.

---

E. Gerland. Geschichte der Physik. (Weber's naturwissenschaftliche Bibliothek, No. 4.) Leipzig. J. J. Weber. V u. 356 S. Mit 72 Abbild. 8°.

---

H. Hentschel. Kurzer Abriss einer Geschichte der Physik. Teil I und II. Zschopau. 58 u. 64 S. (1891 u. 1892).

---

N. A. Lubimoff. Geschichte der Physik. Teil I: Periode der griechischen Wissenschaft. St. Petersburg. 214 S. gr. 8°. (Russisch.)

---

E. Mach. Zur Geschichte der Akustik. Prag. Math. Ges. 1892. 12-18.

Hr. Mach bespricht hier die grundlegenden Untersuchungen von Sauveur aus den Jahren 1700 und 1701, zeigt das Schwanken seiner Erklärungsweise, verfolgt die Fortführung solcher Erklärung durch Smith (1749) mit Annäherung an Helmholtz und weist auf die Vorsicht hin, die man auch der Theorie des letztgenannten Forschers gegenüber üben müsse. Tn.

---

K. VonderMühll. Ueber die theoretischen Vorstellungen von Georg Simon Ohm. Wiedemann Ann. XLVII. 163-168.

Der Aufsatz wendet sich gegen ungerechte Vorwürfe, die zuerst Kirchhoff, dann Clausius gegen Ohm vorgebracht haben: er weist nach, dass Ohm's Worte nicht genau genug aufgefasst worden sind, insbesondere sein Begriff der Dichtigkeit der Elektricität etwas ganz anderes ist als der der Dichtigkeit der freien Elektricität. Tn.

---

Gu. Gilberti Colcestrensis de magnete, magneticisque corporibus, et de magno magnete tellure; physiologia noua, plurimis argumentis, experimentis demonstrata. Londini. 1600. Facsimile-Druck. Berlin. Mayer und Müller. XVIII + 240 S. mit Fig. und 1 Tafel. gr. 4°.

---

L. Schnaase. Gilbert's Physiologia nova de magnete. Pr. (No. 40) Gymn. Pr. Stargard. 16 S. 4°.

Der Verf. giebt hier zusammengefasst den Inhalt der drei ersten Bücher des aus sechs Büchern bestehenden, geschichtlich so wichtigen Buches von Gilbert (1600) wieder und leitet seine Wiedergabe ein durch Betonen der Bedeutung des geschichtlichen Elementes im physikalischen Unterricht und durch kurze Angabe der Lebensverhältnisse Gilbert's. Tn.

---

J. Kowalski. Uebersicht über einige neuere Fortschritte in der Thermodynamik. Prace mat.-fiz. III. 143-178. (Polnisch.)

Ein Referat über die Arbeiten und die Ergebnisse der Forschungen von Gibbs, Duhem und Planck. Dn.

---

E. Mach. Zur Geschichte und Kritik des Carnot'schen Wärmegesetzes. Wien. Ber. CI. 1589-1612.

Der Verf. weist hin auf seine Schrift von 1872, in welcher er schon den Carnot'schen Gedanken verallgemeinerte. Er führt diese Verallgemeinerung nun weiter (S. 1595) und zeigt erneut den Parallelismus auf im Verhalten verschiedener Energieformen, weist dann aber auch auf die Unterschiede hin, welche der Wärme gegenüber den anderen Formen zukommt (S. 1597 ff.). Zum Schluss

wird der Vorgang der Entwickelung des Energiebegriffs studirt, und es zeigt sich, dass dieser in einer eigentümlichen Form der Auffassung der Thatsachen besteht, dass deren Anwendungsgebiet jedoch begrenzt ist. Tn.

---

J. J. Waterston. On the physics of media that are composed of free and perfectly elastic molecules in a state of motion. Lond. R. S. Phil. Trans. CLXXXIII. 1-79.

Lord Rayleigh. Waterston's theory of gases. Nature XLVI. 30 - 33.

Dies ist eine Abhandlung, welche im December 1845 eingereicht und im März 1846 gelesen ist, welche aber, obschon stets zugänglich in den Archiven der Royal Society, ganz unbeachtet geblieben zu sein scheint. Sie ist nun mit einem Vorworte von Lord Rayleigh gedruckt worden; derselbe hebt hervor, in welcher Hinsicht die übliche Gastheorie von Waterston vorweggenommen war, und äussert einige Mutmassungen in Bezug auf den Ursprung mancher Irrtümer und Mängel in den Ansichten des Verfassers. Dieses Vorwort ist in der Nature abgedruckt. Cly. (Lp.)

---

J. D. Lucas. Éphémérides planétaires des Chaldéens. Revue des q. sc. (2) I. 50-77.

Uebersicht über die chaldäische planetarische Astronomie nach den Arbeiten der Herren Strassmaier und Epping. Zum Schlusse des Artikels werden die in diesem Aufsatze und in zwei früheren (October 1890 und März 1891 derselben Revue) dargelegten Ergebnisse zusammengestellt. Danach kannten die Chaldäer sicher die Bewegung des Mondes, der Sonne und der Planeten.

Mn. (Lp.)

---

M. Steinschneider. Die arabischen Bearbeiter des Almagest. Bibl. Math. (2) VI. 53-62.

Notizen über mehr als zwanzig arabische Bearbeiter des Almagest, von welchen viele auch durch andere mathematische Leistungen bekannt sind, z. B. Thabit ben Kurra und Nasir eddin.

E.

---

K. ISRAEL HOLZWART. Das System der attischen Zeitrechnung auf neuer Grundlage. Frankfurt. 34 S. 4°.

---

J. F. DE SOUSA PINTO. Algumas informações sobre o observatorio astronomico da universidade de Coimbra desde 1872. Instituto de Coimbra XL.

Nachricht über die auf der Sternwarte der Universität zu Coimbra seit 1872 ausgeführten Arbeiten. Tx. (Lp.)

---

W. FÖRSTER. Entwickelungsgeschichte der Berliner Sternwarte, nebst Betrachtungen über die Geschichte und Aufgabe der Astronomie. Berlin. 22 S. 4°.

---

E. MAHLER. Der Kalender der Babylonier. I, II. Wien. Ber. CI. 337-353, 1685-1693.

Angeregt durch die in diesem Jahrbuch (XXI. 44) erwähnte Arbeit von Epping-Strassmaier, erforschte der Verf. die Bildung des babylonischen Kalenders. Er findet (S. 350 und 1693), dass dieser nach einem 19-jährigen Schaltcyklus mit 235 synodischen Monaten gestaltet war, und dass mit Jahren von 354 oder 355 Tagen das 3., 6., 8., 14., 16., 19. Jahr als Schaltjahr mit 384 und das 11. mit 383 Tagen abwechselte. Zugleich wird festgestellt (S. 352), dass auch der jüdische Schaltcyklus dem babylonischen entlehnt ist, und gegen Strassmaier wird verteidigt (S. 1689ff.), dass bei den Babyloniern eine 18-jährige Periode zwar zur Feststellung der Mondfinsternisse, nicht aber zur Kalenderregelung verwandt wurde. Tn.

---

J. NORMAN LOCKYER. The origin of the year. Nature XLV. 487-490; XLVI. 104-107; XLVII. 32-35, 228-230.

Während die Chaldäer die Zeitrechnung nach dem Monde einrichteten (woraus die hohen Alterszahlen von Methusalem etc. erklärt werden, die also auf ein Zwölftel etwa zu reduciren sind),

wurden die Aegypter durch die Ueberschwemmungen des Nils auf die jährlichen Perioden hingewiesen. Aus der Annahme eines ursprünglichen Sonnenjahres von 12 Monaten zu 30 Tagen, einer Annahme, die viele Gründe für sich hat, ergiebt sich eine rasche Verschiebung des Datums der Nilüberschwemmung über das Jahr. Der Verf. verbreitet sich in einer Schilderung der hierdurch notwendig gemachten Einrichtungen des Kalenders über die in den Händen der Priester liegenden Mittel zur genauen Festsetzung des Datums der Nilüberschwemmung und über den allmählichen Uebergang eines Jahres von 365 Tagen in das Jahr von $365\frac{1}{4}$ Tagen, dessen Einführung in dem Decretum von Tanis (239 v. Chr.) gefunden wird. Lp.

---

J. Norman Lockyer. On some points in ancient Egyptian astronomy. Nature XLV. 296-299, 373-375.

Der Verfasser entwickelt die Schlüsse, welche ihn bei seinen Vorstellungen über die Orientirung der ägyptischen Tempel geleitet haben, und begründet seine Ansicht über das Datum der Erbauung desjenigen zu Denderah (4400 v. Chr.), zu welcher Zeit $\gamma$ Draconis und $\alpha$ Lyrae an derselben Stelle des Horizontes aufgingen. Zuletzt spricht er die Vermutung aus, dass etwa 3200 v. Chr. der Cultus von $\gamma$ Draconis auf den Sirius übergegangen sei. Lp.

---

F. C. Penrose. A preliminary statement of an investigation of the dates of some of the Greek temples as derived from their orientation. Nature XLV. 395-397.

Unter Bezugnahme auf die Gedanken, welche Lockyer über die Orientirung der ägyptischen Tempel entwickelt hat (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 44 und das vorangehende Referat), bestimmt der Verf. die Daten der Erbauung von 18 alten griechischen Tempeln nach dem heliakischen Aufgange gewisser Sterne. Der älteste Tempel wäre hiernach der archaische Tempel der Minerva zu Athen (1495 v. Chr.). Lp.

J. R. EASTMAN. Some problems in the old astronomy. (Address delivered before Section A of the American Association for the advancement of Science). Nature XLVI. 424-428.

Der Ausdruck „alte Astronomie“ ist gebraucht im Gegensatze zu der Astrophysik, die als „moderne Astronomie“ bezeichnet wird. Die Rede erörtert die dieser alten Astronomie zufallenden Probleme an der Hand der historischen Betrachtung. Lp.

---

A. WITTSTEIN. Historisch-astronomische Fragmente aus der orientalischen Litteratur. Schlömilch Z. XXXVII. Suppl. 89-118.

A. WITTSTEIN. Unsere Kenntnisse von alten Erd- und Himmelsgloben. Schlömilch Z. XXXVII. Hl. A. 201-209.

Der erstere Aufsatz bringt mancherlei, wenig gut geordnet. So wird festgestellt, dass von 250 v. Chr. ab keine sichere Kunde vorliege über Anfertigung von Himmels- oder Erdgloben bis ins 13. Jahrhundert n. Chr.; es wird gehandelt von einem alten Nilpegel, von der Pflege der Astronomie in Marokko, von der Geschichte der Wasseruhren, von Ortsbestimmungen in Persien, von einer falschen Angabe über eine Conjunction von Jupiter und Saturn im Jahre 1007, endlich werden zur Geschichte der Astronomie gehörige Litteraturangaben zusammengestellt.

Im zweiten Aufsatz stellt der Verf. durch Prüfung aller einschlägigen Quellen fest, dass seine vorhin mitgeteilte Angabe über Anfertigung von Globen richtig sei. Tn.

---

F. REULEAUX. Die sogenannte Thomas'sche Rechenmaschine. Für Mathematiker, Astronomen, Ingenieure, Finanzbeamte, Versicherungs-Gesellschaften und Zahlenrechner überhaupt. 2. Aufl. Leipzig. A. Felix. VIII + 60 S. Mit 1 Fig.-Taf. 8°.

Vor 30 Jahren schon hat der Verf. auf die Rechenmaschine hingewiesen. Er thut dies erneut in ausführlicherer Darstellung,

weil jetzt die Maschine in Deutschland selbst vervollkommnet hergestellt wird. Die Schrift lehrt die theoretische Grundlage, die Handhabung, die Einrichtung der Maschine, beginnt und schliesst auch mit geschichtlichen Erörterungen, durch die erwiesen wird, dass die „sogenannte“ Thomas-Maschine „in Deutschland sowohl ersonnen als auch erfolgreich ausgeführt worden ist“. Tn.

---

J. M. Brückner. Das Ottojano'sche Problem; eine mathematisch-historische Studie. Leipzig. 25 S. gr. 4°.

---

# Capitel 2.

## Philosophie und Pädagogik.

### A. Philosophie.

E. T. Dixon, St. G. Mivart, E. E. C. Jones. The implications of science. Nature XLV. 125, 222-223, 272-273, 343, 366, 391-392.

Der Vortrag des Hrn. Mivart, über den in F. d. M. XXIII. 1891. 49 kurz berichtet ist, erfährt besonders durch Hrn. Dixon scharfe Angriffe, gegen die sich der Erstere verteidigt. Es handelt sich um die Bedeutung des Satzes vom Widerspruche und von der Stetigkeit des Bewusstseins; dann aber um die Bedeutung der Definitionen (verbale, reale) und der Urteile. Die eigentümlichen Anschauungen des Hrn. Mivart erhellen am besten aus folgenden Unterscheidungen, die er in dem Artikel über Induction und Deduction (Nature XLVII. 10-11) macht: Der Satz, dass die Winkel an der Basis im gleichschenkligen Dreiecke gleich sind, könne bedeuten: 1) das zur Erläuterung des Satzes gebrauchte Dreieck hat gleiche Seiten, daher hat es gleiche Winkel; 2) ich habe mir ein Dreieck vorgestellt, das gleiche Seiten hat, daher habe ich mir eins vorgestellt, das gleiche Winkel hat; 3) die durch das Adjectiv

„gleichschenklig“ beigelegte Bezeichnung („connotation“) schliesst die Bezeichnung „gleichwinklig“ ein. Lp.

---

K. Pearson, E. T. Dixon, St. G. Mivart, C. G. K. The grammar of science. Nature XLVI. 199-200, 221-222, 247, 269-270.

Eine Polemik, die sich an die etwas absprechende, mit C. G. K. unterzeichnete Kritik des Pearson'schen Buches „The grammar of science“ anschliesst (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 48). Während der Kritiker und Hr. Pearson besonders die Stellung der Newton'schen Bewegungsgesetze in der Mechanik erörtern und dabei die eigentümliche Empfindlichkeit der „Edinburger Schule“ gegen jede leise Berührung dieser Frage zur Sprache kommt, erkennt besonders Hr. Mivart, dass das Buch ein bemerkenswertes sei, das er mit grossem Interesse gelesen habe, und dass es eine bessere Beurteilung verdiene, als ihm zu Teil geworden sei. Er sowohl wie Hr. Dixon gehen genauer auf einzelne Fragen der Erkenntnistheorie ein. Lp.

---

E. E. Constance Jones, Francis C. Russell, E. T. Dixon. Induction and deduction. Nature XLVI. 293-294, 586-588; XLVII. 10-11, 78-79, 127.

Erörterungen über die Frage, ob die üblichen geometrischen Beweise (z. B. für den Satz, dass die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich sind) als inductive oder als deductive zu bezeichnen seien, wobei das Wesen der Induction und der Deduction, sowie der Schlussbildung nach verschiedenen Seiten hin besprochen wird. Lp.

On the permanence of equivalence. Annals of Math. VI. 81-84.

Bericht über eine im Math. Verein der Cornell-Universität stattgehabte Discussion, betreffend die Tragweite des allgemeinen Princips der Permanenz der formalen Gesetze. An der Hand einer Reihe von Beispielen wird gezeigt, dass überall da, wo es sich nicht um eine Erklärung neuer Symbole handelt, eine genaue Fest-

stellung derjenigen Eigenschaften eines Symbols erforderlich ist, welche bei der Ausdehnung desselben auf ein neues Wertgebiet erhalten bleiben sollen. Schg.

---

C. W. v. Baur. Ueber die dialektisch-didaktische Begriffserweiterung in der Mathematik, nachgewiesen an der Lehre vom Negativen. Nach einem Vortrag. Tübingen. Fues. 26 S. 8°. (Sonderdr.)

---

M. Simon (Strassburg). Grenzbegriff. Aus Meyer's Conversations-Lexikon.

Fussend auf Bolzano (Paradoxien des Unendlichen), Cantor (Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre) und Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen?) bespricht Hr. Simon die wichtigsten Grenzbegriffe, das Unendlichgrosse, das Unendlichkleine und die Irrationalzahlen. Die Grundbegriffe der Geometrie sind sämtlich Grenzbegriffe. Mi.

---

E. Papperitz. Ueber das System der rein mathematischen Wissenschaften. Deutsche Math. Ver. I. 36-40.

Der in Halle gehaltene ausführliche Vortrag bezweckte die Klarstellung der logischen Principien, welche zu einer organischen Systematik der rein mathematischen Disciplinen führen können. In der Einleitung wurde auf die praktische Bedeutung hingewiesen, welche die Fragestellung bei litterarischen Unternehmungen gewinnt, die der Mathematik eine geordnete Bibliographie und einheitliche Terminologie verschaffen sollen. Der im Jahresbericht abgedruckte kurze Auszug giebt nur die Hauptgedanken wieder und schliesst mit einer tabellarischen Uebersicht der Einteilung der reinen Mathematik. Lp.

---

A. Macfarlane. On exact analysis as the basis of language. Texas Acad. of Sc. Trans. 1892. 5-10; New York M. S. Bull. I. 189-193.

Die Mathematik besitzt in dem dekadischen Zahlensystem eine exacte Zeichensprache von internationaler Verständlichkeit. Die Grundlage für eine gleich vollkommene Wortsprache ist durch das lateinische Alphabet gegeben, sobald über die Aussprache der einzelnen Zeichen Einheitlichkeit erzielt ist. Der Verf. entwickelt nun Proben einer analytisch begründeten Kunstsprache an den beiden für diesen Versuch besonders bequemen Gruppen der Zahl- und der Verwandtschaftsbegriffe. Die willkürlichen Festsetzungen erscheinen auf das geringste Mass reducirt, und durch consequente Verwendung der einzelnen Buchstaben zur Bezeichnung logischer Beziehungen entstehen ganz von selbst einfache Worte, welche alle diese Beziehungen zum genauen Ausdruck bringen. Wir bemerken hierzu, dass allem Anschein nach die Algebra der Logik berufen ist, das Material zu liefern, mit welchem die Methode des Verfassers auf weitere Gruppen von Begriffen ausgedehnt und so dem Ideal einer wissenschaftlich begründeten Kunstsprache, wie sie zuerst Wilkins versucht und Leibniz geplant hatte, näher gebracht werden könnte. Die vom Verf. mehrfach angestellten Vergleiche mit dem Volapük charakterisiren dasselbe als einen in Folge seines synthetischen Charakters völlig unzulänglichen dilettantischen Versuch.

Schg.

---

A. Nagy. I teoremi funzionali nel calcolo logico. Rivista di Mat. II. 177-179.

Wenn durch $\Psi(a, b)$ ein additiver, multiplicativer oder auch complicirterer Zusammenhang zwischen zwei logischen Grössen $a$ und $b$ ausgedrückt wird, so giebt es Functionen $\mathfrak{F}$, welche die Eigenschaft haben, dass $\mathfrak{F}[\Psi(a, b)]$ durch $\mathfrak{F}(a)$ und $\mathfrak{F}(b)$ ausgedrückt werden kann. Zur Bestimmung solcher Functionen wird eine allgemeine Gleichung aufgestellt. Specialisirungen zeigen, dass im logischen Calcul Analoga zu den verschiedenen Formen des distributiven Princips der Arithmetik existiren, nicht aber, beispielsweise, zu den Additionstheoremen der Trigonometrie.

Schg.

A. Nagy. Lo stato attuale ed i progressi della logica. Roma 1891. 21 S. [Riv. di Mat. II. 80.]

---

E. de Amicis. Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema. Rivista di Mat. II. 113-127.

Sind $a$, $b$, $c$ Elemente eines gegebenen Systems, und bedeutet das Zeichen $\supset$ eine völlig bestimmte Beziehung zwischen denselben, so heisst diese Beziehung 1) reflexiv, wenn $a \supset a$, 2) conversiv, wenn aus $a \supset b$ folgt: $b \supset a$, 3) transitiv, wenn aus $a \supset b$ und $b \supset c$ folgt: $a \supset c$, 4) comparativ, wenn aus $a \supset b$ und $a \supset c$ folgt: $b \supset c$, 5) adäquativ, wenn aus $a \supset c$ und $b \supset c$ folgt: $a \supset b$. Die Beziehung heisst äquiparativ, wenn sie alle diese fünf Fundamentaleigenschaften vereinigt. Die Negirung der vorigen Behauptungen giebt zu ebenso vielen neuen Beziehungen Anlass, welche durch Vorsetzung von „anti" unterschieden werden. Aus $a \supset b$ folgt die inverse Beziehung $b \subset a$. Wagerechte Striche über den Beziehungszeichen heben die Beziehungen auf und geben so zu zwei neuen Beziehungen Anlass, der conträren und der antinomialen. Eine Reihe von Sätzen stellt nun fest, in welchen Fällen aus dem Vorhandensein einer oder zweier von diesen Beziehungen auf die Existenz anderer geschlossen werden kann. Beispiele aus der Zahlenlehre und einige erklärende Anmerkungen dienen zur Verdeutlichung. Schg.

---

G. Vailati. Dipendenza fra le proprietà delle relazioni. Riv. di Mat. II. 161-164.

Einige Bemerkungen über E. de Amicis, Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti di un medesimo sistema, Riv. di Mat. II. 113-127 (s. den vorangehenden Bericht). Vi.

G. Peano. Sommario del libro X d'Euclide. Rivista di Mat. II. 7-11.

G. Peano. Sopra una raccolta di formule. Beilage zur Märznummer der Rivista di Mat. II. 11 S.; desgl. zur Apriln. 20 S.

Der erste Artikel ist die Fortsetzung eines früheren (F. d. M.

XXIII. 1891. 51), in welchem der Verf. den Inhalt der Bücher VII, VIII und IX des Euklid in die Bezeichnungen seiner mathematischen Logik übertragen hatte. Ebenso sind die als Beilagen der Rivista erschienenen Formelsammlungen Erweiterungen der am angeführten Orte besprochenen Formelsammlung nach derselben Bezeichnung. In einem Artikel Seite 76 bis 77 der Rivista: „Sopra la raccolta di formule di Matematica“ entwickelt die Redaction den Plan zu einer vollständigen derartigen Formelsammlung der Mathematik und fordert zur Mitarbeit auf. Lp.

---

G. PEANO. Principios de lógica matematica. Progreso mat. II. 20-24, 49-53.

Dieser Aufsatz giebt die Darlegung der Bezeichnungen und ersten Grundlagen der mathematischen Logik. Tx. (Lp.)

---

P. DUHEM. Quelques réflexions au sujet des théories physiques. Revue des q. sc. (2) I. 139-177.

P. DUHEM. Notation atomique et théorie atomistique. Revue des q. sc. (2) I. 391-455.

Der Verfasser führt den folgenden Satz im einzelnen durch: Die physikalischen Theorien bezwecken die Verknüpfung und die Einordnung der durch die experimentelle Methode erworbenen Kenntnisse. Zwischen zwei physikalischen Theorien, welche einen und denselben Umfang von experimentellen Gesetzen verknüpfen, muss man diejenige vorziehen, welche der wenigsten Hypothesen bedarf oder der dem Experimente zugänglichsten Hypothesen. In dem zweiten Artikel zeigt Herr Duhem, wie man die in dem ersten dargelegten Ansichten auf die Chemie anwenden kann.

Mn. (Lp.)

---

P. DE HEEN. La constitution de la matière et la physique moderne. Belg. Bull. (3) XXIV. 670-687.

Verwendet sich zu Gunsten der kinetischen Hypothese und

der mit ihr verwandten Hypothesen, die hier so angesehen werden, als ob sie eine objective Erklärung der Vorgänge gäben.

Mn. (Lp.)

---

V. Reyes y Prósper. Charles Santiago Peirce y Oscar Honward Mitchell. Progreso mat. II. 170-173.

Notiz über die auf die mathematische Logik bezüglichen Arbeiten dieser beiden Schriftsteller. Tx. (Lp.)

---

V. Reyes y Prósper. Proyecto de clasificación de los escritos lógico-simbólicos especialmente de los post-Boolianos. Progreso mat. II. 229-232.

---

V. Reyes y Prósper. Ernesto Schroeder, sus merecimientos ante la lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras. Progreso mat. II. 33-36.

---

E. Knoch. Ueber den Zahlbegriff und den ersten Unterricht in der Arithmetik. Pr. (No. 49) Real-Progymn. Jenkau. 34 S. 8°.

Hr. Knoch ist der Ansicht, dass der Process der Zahlbildung ein durchaus logischer ist, und dass die Anzahl sich aus der collectiven Eigenschaft des Begriffs ergiebt, dem die Gegenstände untergeordnet sind. Sich an Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen?) anschliessend, acceptirt er dessen Definition der Reihe der natürlichen Zahlen, beschränkt aber die dort allgemein gelassene Bezeichnung $\psi$ dadurch, dass er dieselbe als den Begriff fasst, unter welchem Gegenstände zur Zahlengewinnung zu denken sind. Auch nimmt er die Null in die Zahlenreihe auf und legt nun dar, wie sich die Rechnungsarten für die natürlichen Zahlen (Ordinalzahlen), für die Cardinalzahlen und für die algebraischen Zahlen, insbesondere wie sich die Gesetze der Addition auf Grundlage dieser Idee von den Zahlen stellen. Die Ansicht des Verfassers, dass

hiermit eine für die Schule passende Art der Darlegung gewonnen sei, dürfte allerdings kaum allgemeinen Beifall finden.

Mi.

---

M. Pasch. Ueber die Einführung der irrationalen Zahlen. Math. Ann. XL. 149-152.

Eine Zahlenmenge kann so beschaffen sein, dass jede Zahl, welche sich zwischen zwei Zahlen der Menge einschalten lässt, zu ihr gehört; der Verfasser nennt sie dann eine Schicht, und zwar eine offene Schicht, wenn sie keine endliche rationale Schranke besitzt; weiter bezeichnet er jede Einteilung aller positiven (rationalen) Zahlen in zwei offene Schichten (untere und obere) als einen Schnitt.

Die Vergleichung zweier geraden Strecken $A$ und $B$ führt unter Umständen zu einem Schnitte, indem sich ergiebt, dass die Strecke $A$ grösser als das $r$-fache und kleiner als das $t$-fache der Strecke $B$ ist, wenn $r$ aus der unteren, $t$ aus der oberen Schicht eines gewissen Schnittes beliebig entnommen wird. Diesem Schnitte ordnen wir ein Zeichen zu, etwa $s$, welches wir zu der Redeweise „$A$ ist gleich $sB$“ verwenden, um auszudrücken, dass $A$ immer zwischen $rB$ und $tB$ eingeschlossen bleibt. Dann wird das Zeichen $s$, welches hier den Platz einer Zahl einnimmt, geradezu eine Zahl genannt (analog wie bei der Einführung der gebrochenen Zahlen) und dadurch die Unterscheidung zwischen rationalen und irrationalen Zahlen veranlasst.

Wz.

---

G. Cantor. Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. Deutsche Math. Ver. I. 75-78.

G. Cantor. Sopra una questione elementare della teoria degli aggregati (traduzione di G. Vivanti). Rivista di Mat. II. 165-167.

Es wird der folgende Satz bewiesen, der als eine Verallgemeinerung eines von Hrn. Cantor schon längst aufgestellten Satzes angesehen werden darf:

Sind $m$ und $n$ zwei einander ausschliessende Charaktere, und

ist $M$ ein Inbegriff von Elementen $E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots)$, welche von unendlich vielen Coordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots$ abhängen, deren jede entweder $m$ oder $n$ ist, so giebt es für jede abzählbare Teilmenge $E_1$, $E_2$, ... ein Element $E_0$ von $M$, das mit keinem $E_i$ übereinstimmt.

Durch eine ähnliche Schlussweise gelangt man zu dem wichtigen Ergebnisse, dass für jede gegebene Menge eine andere von grösserer Mächtigkeit gefunden werden kann, dass also die Mächtigkeiten wohldefinirter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben.

Vi.

---

F. Giudice. Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di Cantor. Palermo Rend. VI. 161-164.

Darstellung von Grössenklassen mit unendlich kleinen und unendlich grossen Elementen auf einer Geraden. Ist $AB$ eine bestimmte Strecke, und bezeichnet man durch $a, b, \ldots$ die Abscissen der Punkte $A$, $B$, ... in Bezug auf einen festen Punkt, so wird die folgende Definition der Gleichheit zu Grunde gelegt: Es ist $AM = A'M'$, wenn $m'-a' = (m-a)\dfrac{b-a'}{b-a}$; es ist $A'M' = A''M''$, wenn $A'M' = AM$ und $A''M'' = AM$. Hieraus folgt, dass $MN = M'N'$, wenn $\dfrac{b-m'}{b-m} = \dfrac{b-n'}{b-n}$. Ist nun $A_1$ ein beliebiger Punkt von $AB$, und sind $A_2$, $A_3$, ... derartige Punkte, dass (in obigem Sinne) $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots$ ist, so liegt $A_r$, für jedes noch so grosse $r$, auf $AB$; man kann also $AB$ als „transfinit“ in Bezug auf $AA_1$, $AA_1$ als „subfinit“ in Bezug auf $AB$ betrachten. Nimmt man jetzt einen Punkt $C$ auf der Verlängerung von $AB$, und ist $B_1$ ein bestimmter Punkt von $BC$, so definirt man zwei Teilstrecken von $AB$ und $BC$ als einander gleich, wenn sie zu $AA_1$ bezw. $BB_1$ ein gleiches Verhältnis haben; insbesondere hat man $BB_1 = AA_1$. Ist ferner $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots$, wo $BP = B'P'$, wenn $p'-b' = (p-b)\dfrac{c-b'}{c-b}$, so kann man die Punkte $A$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_\nu$, ..., $B$, $B_1$, $B_2$, ..., $B_\nu$, ..., $C$ als die Abbildungen der Cantor'schen Zahlen 0, 1, 2, ..., $\nu$, ...,

$w$, $w+1$, $w+2$, ..., $w+v$, ..., $w.2$ betrachten; und auf dieselbe Weise kann man so weit fortfahren, als man will. Es ist kaum nötig hinzuzufügen, dass eine solche rein symbolische Repräsentation nichts gegen die Unmöglichkeit von actual unendlich kleinen Strecken beweist. Vi.

---

G. Vivanti. L'infinito nella natura e nella scienza. Discorso. Il Politecnico 1892. 13 S. 4°.

In mehr rhetorisirender als populärer Darstellung bespricht Hr. Vivanti die Grundlagen, die Methode und die Geschichte der Infinitesimalrechnung, ohne sich an irgend einer Stelle zu vertiefen oder etwas Neues zu bringen. Mi.

---

G. Peano. Dimostrazione dell' impossibilità di segmenti infinitesimi costanti. Rivista di Mat. II. 58-62.

Herr G. Cantor hat bekanntlich (Zeitschrift für Philosophie, Bd. 91, S. 112) seinen Beweis von der Unmöglichkeit einer unendlich kleinen Strecke nur unvollständig geliefert, indem er die Behauptung unbewiesen liess, dass, wenn eine solche Strecke $\zeta$ existirt, dass $\zeta n$ für jede noch so grosse endliche Zahl $n$ kleiner ist als die Einheit, dasselbe von $\zeta \nu$ für jede noch so grosse transfinite Zahl $\nu$ folgt. Herr Peano stellt sich die Aufgabe, diese Lücke auszufüllen.

Bezeichnen wir als „Strecke" jede auf einem Halbstrahl $OP$ liegende Punktmenge $u$, welche folgende Eigenschaften besitzt:

a) Sie besteht weder aus einem einzigen Punkte, noch aus sämtlichen Punkten von $OP$.

b) Jeder zwischen $O$ und irgend einem Punkte von $u$ liegende Punkt gehört der Menge $u$ an, und umgekehrt liegen Punkte von $u$ zwischen $O$ und jedem Punkte von $u$. Nach dem Dedekind'schen Postulate hat jede Strecke einen zweiten Grenzpunkt neben $O$; will man aber dieses Postulat nicht benutzen, so darf man diejenigen Strecken als „begrenzt" bezeichnen, von welchen man weiss, dass sie einen zweiten Grenzpunkt besitzen. Die Summe zweier begrenzten Strecken wird wie gewöhnlich definirt;

die Summe zweier beliebigen Strecken $u$, $v$ ist der Ort der Grenzpunkte aller begrenzten Strecken, die man erhält, wenn man eine an einem Punkte von $u$ mit einer an einem Punkte von $v$ endenden begrenzten Strecke auf jede mögliche Weise summirt. Demnach kann man leicht die Vielfachen $u$, $2u$, $3u$, ... einer Strecke $u$ definiren; ihre obere Grenze ist $\infty u$. Ist nun $\infty u$ kleiner als eine endliche Strecke, so kann man $\infty u + u$ oder $(\infty+1)u$ bilden. Diese letzte Strecke ist, wie aus der obigen Definition folgt, der Ort der Grenzpunkte der Strecken, die sich als Summen irgend welcher in $\infty u$ enthaltenen Strecken mit $u$ ergeben, oder die obere Grenze der Strecken $u+u$, $2u+u$, $3u+u$, ...; diese Grenze ist aber offenbar von $\infty u$ nicht verschieden. Hieraus ergiebt sich leicht $2\infty u = \infty u$, $\infty^2 u = u$, und so weiter, was zu beweisen war.

Dieser Beweis hat aber, nach unserer Meinung, im Sinne der Cantor'schen Theorie keine Bedeutung. Ist nämlich $u$ irgend eine eindimensionale Grösse (Strecke, Zahl, Unendlichkeitsordnung, Moment u. s. w.), so bezeichnet $\infty u$ die obere Grenze von $u$, $2u$, $3u$, ..., $nu$, ... und ist folglich identisch mit dem Cantor'schen $\omega u$; $(\infty+1)u$ bezeichnet aber definitionsgemäss die obere Grenze von $u+u$, $2u+u$, $3u+u$, ..., $nu+u$, ... und ist auch identisch mit $\omega u$, aber ganz verschieden von $(\omega+1)u$. Legt man also die Peano'sche Definition der Summe zu Grunde, so folgt hieraus von selbst, dass $(\infty+1)u = \infty u$, welches auch $u$ sei; man kann aber damit nicht behaupten, dass $(\omega+1)u = \omega u$ ist.

Vi.

---

R. Hoppe. Die Willensfreiheit und der physische Determinismus. Hoppe Arch. (2) XI. 339-344.

Das einfachste physikalische Gesetz, das der Schwerkraft, lässt Fälle theoretisch zu, wo die dasselbe unabänderlich befolgende Bewegung in einzelnen Zeitpunkten sich willkürlich ändert, indem irgend welche Integrationsconstanten willkürlich andere Werte annehmen. Dem entsprechend ist, da die dem reflexiven Denken entsprechenden physischen Vorgänge gänzlich unbekannt sind, die Annahme theoretisch zulässig, dass sie singuläre Punkte enthalten, in denen sich die Folgen mit Erhaltung des Causalitätsgesetzes

willkürlich spalten. Die Willensfreiheit widerstreitet also nicht dem ausnahmlosen causalen Zusammenhange der Vorgänge. Aber der Nachweis der logischen Möglichkeit singulärer Unbestimmtheit innerhalb der fortbestehenden Causalität vermindert nicht die Berechtigung, den causalen Determinismus in der Mechanik physischer Körper vorauszusetzen, und also wird der causale Determinismus der leblosen Natur durch den Nachweis der Möglichkeit einer Willensfreiheit nicht berührt. Dass nun nicht alles, was die Menschen thun, vorher bestimmt ist, könnte z. B. die That zweier Menschen A und B beweisen, die in Folge einer Wette eine Zahl aufschreiben, bei der ausgemacht wäre, dass derjenige, der die grössere Zahl aufgeschrieben hätte, gewonnen haben sollte. Die Wahl der Zahlen könnte hier nicht aus allem Vorausgegangenen mit Notwendigkeit hervorgehen: Wo also der Gedanke der That, der in der Beziehung auf das ihm folgende Geschehen, wofern letzteres nicht ursächlich bestimmt ist, Wille heissen muss, bewusstermassen der That vorausgeht, gilt der Satz, dass über alles Thun der Menschen, welches nicht durch Ursachen vollständig bestimmt ist, der Wille entscheidet. Mi.

---

F. C. A. Kaiser. Neue Bahnen in der Weltanschauung und Naturanschauung. Dresden. Druck von T. M. Hofmann. 127 S. 8°.

Hr. Kaiser stellt in seiner Schrift, die vom Materialismus behauptete Ewigkeit des Weltalls leugnend und darlegend, dass der Stoff, aus dem sich das Weltall bis zur Gegenwart entwickelt hat, vor endlicher Zeit durch eine übernatürliche Ursache erzeugt worden sei, ein Urgesetz auf. Da Stoff und Kraft nie additionsfähig sind, sondern nur in der Form eines Verhältnisses in Beziehung zu einander treten und ein einheitliches Product bilden, so ist Urgesetz des Weltalls der Ausgleich der gegensätzlichen Verhältnisse zum einheitlichen Product oder der Dualismusmonismus. Der Dualismusmonismus wird nach Kaiser's Ansicht die Weltanschauung der Zukunft sein. Er bespricht von seiner neuen Weltanschauung aus: die Theorie des Stoffes, des Aethers, das Wesen der Gravi-

tation, das Perigravitationsgesetz (Gesetz der Anziehung von Stoff und Aether), die chemischen und physikalischen Eigenschaften des Stoffs, die Gastheorie und die Lehre von den Aggregatzuständen, eine Gesamttheorie der Natur aufstellend. Mi.

---

H. Keferstein. Die philosophischen Grundlagen der Physik nach Kant's „Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft" und dem Manuscript „Uebergang von den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft zur Physik". Pr. (No. 733) Höh. Bürgersch. Hamburg. 42 S. 4°.

Hr. Keferstein, der dem inductiven Verfahren in der Naturwissenschaft die Befähigung abspricht, die Gewissheit zu geben, dass das, was in allen beobachteten Fällen gilt, auch für alle beobachtbaren gelten müsse, und der mit Kant als Grundlegung der Physik die Vorherbestimmung der inneren activen Verhältnisse des die Wahrnehmungen als zur Einheit der Erfahrung zusammenstellenden Subjectes verlangt, hebt das Verdienst Kant's als philosophischen Naturforschers scharf hervor, indem er dem Gedankengang der „Metaphysischen Anfangsgründe der Natur" und des „Uebergangs von den metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft zur Physik", soweit dieselben von Reicke in den „Altpreuss. Monatsheften" (Band XIX, XX, XXI) veröffentlicht sind, in kritischer Analyse folgt. Er zeigt, wie die „Metaphysischen Anfangsgründe" sich in ihrer Aufgabe beschränken, indem sie sich nur mit der Gesetzmässigkeit der Dinge als äusserer Erfahrung beschäftigen, und die Körperlehre nur nach Principien a priori behandeln, so dass ihre Ergebnisse ganz allgemeiner Natur sein müssen, aus denen die Mannigfaltigkeit der Naturwissenschaften nie ohne weiteres abgeleitet werden kann, wie ferner der „Uebergang", indem er den Begriff der Materie, der in der ersten Schrift nur als der Begriff des erfüllten Raumes gefasst war, in Beziehung auf Physik als Begriff dessen, das durch bewegende Kräfte den Raum empfindbar mache oder realisire, bestimmt und die Aethertheorie der „Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels" fort-

bildet, die Aufgabe vollendet, die sich Kant in Bezug auf die Naturwissenschaft innerhalb seiner Philosophie gestellt hatte, der uns bis auf die Brücke zwischen Metaphysik und Physik führen wollte. — Dass es trotz der Unendlichkeit der Aufgaben der empirischen Naturwissenschaft möglich ist, das Weltall als geschlossenen Kreis im endlichen Geiste abzubilden, das gezeigt zu haben, ist das Verdienst der Naturphilosophie Kant's. Mi.

C. Isenkrahe. Ueber die Zurückführung der Schwere auf Absorption und die daraus abgeleiteten Gesetze. Schlömilch Z. XXXVII. Suppl. 161-204.

Riemann allein hat, nach Hrn. Isenkrahe's Darlegung, die Ansicht vertreten, die Erscheinungen der Schwere seien durch das Verschwinden materieller Substanz an den Punkten, wo sich ponderable Atome im Raum befinden, zu erklären. Vertreter der Ansicht, dass die Erscheinungen der Schwere durch irgend eine Art von Energie-Absorption zu erklären seien, sind Euler, Dellinghausen, Lesage, Thomson, Tolver Preston und Rysánek. Nach Euler's Theorie ist die absorbirte Energie im Aether als Druck einer elastischen Flüssigkeit vorhanden. Sie wird absorbirt von den ponderablen Körpern an ihren äusseren und inneren Oberflächen. Die Verschiedenheit des Drucks, den der angezogene Körper beiderseits erleidet, erklärt das Näherungsbestreben. Auf der dem anziehenden Körper zugewandten Seite ist der Druck geringer, weil diese Seite näher bei dem Orte der Absorption ist. Die Abhängigkeit der absorbirten Energie von der Energie des Mediums bleibt unbestimmt. Im Ausdruck für die Abhängigkeit der Absorption von der Entfernung und in der Einführung der Masse des angezogenen Körpers herrscht bei Euler Willkür. Abweichungen von dem Newton'schen Gesetze hat er nicht auf einen mathematischen Ausdruck gebracht. Dellinghausen's Theorie leidet an dem inneren Widerspruch, dass ihr Vertreter den zweiten Teil des Galilei'schen Trägheitsgesetzes nicht anerkennt und doch das Beharrungsvermögen wieder durch eine Hinterthür in die Erklärung hereinbringt. Die Frage nach der Quelle der absorbirten Energie ist bei Lesage

überhaupt nicht prägnant gestellt, aber die Antwort ergiebt sich daraus, dass er unelastische Stösse zu Grunde legt, unschwer, weil hiernach die Aetheratome aus den gravitirenden Massen mit Energieverlust heraustreten.

Bei Thomson und Tolver Preston bleibt es völlig dunkel, wo die Energie fallender Körper vor dem Falle war, und wie die Umwandlung in Fallenergie mit centripetaler Richtung sich vollzieht. Ebensowenig ist ein bestimmter Ausdruck für die Beziehung der Fallenergie zu der Gesamtenergie, von der sie stammt, in ihrer Stosstheorie aufgestellt, und Abweichungen von dem Newton'schen Gesetz werden nicht in Betracht gezogen. Rysánek, dessen Theorie der Lesage-Tolver-Preston'schen nahe verwandt ist, leitet die Energie der fallenden Körper aus dem postulirten Schweräther her, lässt uns aber ebenfalls völlig im Dunkel darüber, auf welche Weise die Energieabsorption vor sich geht und die Centripetalkraft zu Stande kommt. Bezüglich der Abhängigkeit der Fallenergie von der Energie des Aethers und von der Entfernung der gravitirenden Körper bietet Rysánek's Theorie nichts wesentlich Neues. Bezüglich ihrer Abhängigkeit von der Masse aber wird unter Vernachlässigung einiger kleiner Werte zunächst eine Exponentialfunction entwickelt, und sodann aus dieser, um die Uebereinstimmung mit dem Newton'schen Gesetze zu erzielen, ein einfaches Product abgeleitet, und zwar dadurch, dass die Exponentialreihe gleich hinter dem linearen Gliede abgeschnitten wird. Die von Rysánek aufgestellten Formeln erweisen sich in Bezug auf die wesentlichsten Punkte als specielle Fälle der von Isenkrahe 1879 veröffentlichten Formeln. Mi.

---

W. Gosiewski. Ueber das Princip des wahrscheinlichsten Seins. Prace mat.-fiz. III. 55-68. (Polnisch.)

Eine zusammengesetzte „Qualität“ $W$ (Bewegung, Wärme, Licht u. s. w.) wird als aus den „Componenten“ oder „einfachen“ Qualitäten $A_1$, $A_2$, ..., $A_m$ bestehend definirt. Jede der letzteren sei durch ein entsprechendes Mass („Quantität“) $q$ ausgedrückt; es ist dann $W$ ein System von Quantitäten und kann mit

$W(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ bezeichnet werden. Die Elemente $q_\mu$ sind Functionen der Zeit; das System $W$ ist mit der Zeit veränderlich. Da

$$dq_\mu = \frac{dq_\mu}{dt} dt = q'_\mu dt,$$

wo $q'_\mu$ die „Geschwindigkeit" des Elementes $q_\mu$ bedeutet, so wird das System $(q_1, q_2, \ldots, q_m, q'_1, q'_2, \ldots, q'_m)$ oder kürzer $(q_\mu, q'_\mu)$ den „Zustand" des Systems zur Zeit $t$ darstellen. Die Elemente $q_\mu$ und $q'_\mu$ sind im allgemeinen nicht unabhängig von einander. Ist $\varphi$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Elemente $q_\mu$ und $q'_\mu$ dem Systeme $W(q_\mu)$ angehören, so werden alle wahrscheinlichen Systeme der Ungleichheit

$$1 > \varphi(q_\mu, q'_\mu) > 0$$

genügen, und es kann nach dem „wahrscheinlichsten Systeme" gefragt werden.

Teilt man das Zeitintervall von $t_0$ bis $t_1$ in unendlich kleine Incremente $dt$, so dass $t_1 - t_0 = n.dt$, und bestimmt die den entsprechenden Zuständen zukommende Wahrscheinlichkeit $\varphi$, so wird die Wahrscheinlichkeit der continuirlichen Reihe successiver Zustände gleich dem Producte einzelner $\varphi$, und der Logarithmus von $P$ wird durch das Integral

$$\log P = \frac{1}{dt} \int_{t_0}^{t_1} \log \varphi . dt$$

dargestellt werden können.

Nimmt man, um das Maximum des vorstehenden Integrals zu bestimmen, die Variation desselben, so bekommt man, unter Voraussetzung, dass noch zwischen den $q_\mu$ und $q'_\mu$ $p$ Beziehungen

$$L_\nu(q_\mu, q'_\mu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

stattfinden, folgende Gleichung: $\delta \log P =$

$$\frac{1}{dt} \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_\mu \left\{ \frac{\partial \log \varphi}{\partial q_\mu} + \Sigma_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \log \varphi}{\partial q'_\mu} + \Sigma_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} \right) \right\} \delta q_\mu$$

$$- \frac{1}{dt} \sum_\mu \left( \frac{\partial \log \varphi_0}{\partial q'_{\mu,0}} + \Sigma_\nu \lambda_{\nu,0} \frac{\partial L_{\nu,0}}{\partial q'_{\mu,0}} \right) \delta q_{\mu,0}$$

$$+ \frac{1}{dt} \sum_\mu \left( \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial q'_{\mu,1}} + \Sigma_\nu \lambda_{\nu,1} \frac{\partial L_{\nu,1}}{\partial q'_{\mu,1}} \right) \delta q_{\mu,1},$$

wo $q_{\mu,0}$, $q'_{\mu,0}$, $L_{\nu,0}$, $\lambda_{\nu,0}$, $q_{\mu,1}$, $q'_{\mu,1}$, $L_{\nu,1}$, $\lambda_{\nu,1}$ die Werte von $q_\mu$, $q'_\mu$, $L_\nu$, $\lambda_\nu$ zur Zeit $t_0$, bezw. $t_1$ sind.

Die $\lambda_\nu$ sind hier nachträglich zu bestimmende Factoren. Aus $\delta \log P = 0$ erhält man die Gleichungssysteme:

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial q_\mu} + \Sigma_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial q'_\mu} + \Sigma_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \log \varphi_0}{\partial q'_{\mu,0}} + \Sigma_\nu \lambda_{\nu,0} \frac{\partial L_{\nu,0}}{\partial q'_{\mu,0}} = 0, \qquad \frac{\partial \log \varphi_1}{\partial q'_{\mu,1}} + \Sigma_\nu \lambda_{\nu,1} \frac{\partial L_{\nu,1}}{\partial q'_{\mu,1}} = 0,$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

welche, zusammen mit den $p$ Beziehungen $L_\nu = 0$, zur Bestimmung der $q_\mu$, $\lambda_\nu$ und der Integrationsconstanten dienen.

Aus den $m$ ersten vorstehenden Gleichungen folgt die Formel

$$\varphi = He^{\Sigma_\mu q'_\mu\left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial q'_\mu} + \Sigma_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\right)};$$

$H$ wird hier gleich $\varphi_0 = \varphi_1$. Diese Formel, zusammen mit der Bedingung:

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_\mu q'_\mu \left(\frac{\partial \log \varphi}{\partial q'_\mu} + \Sigma_\nu \lambda_\nu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\right) = \text{Minimum},$$

drückt das „Princip des wahrscheinlichsten Seins“ aus.

Ist $U$ eine Function der $q_\mu$, $T$ eine Function von $q_\mu$ und $q'_\mu$, so ist es erlaubt:

$$\varphi = he^{-(U+T)}$$

zu setzen; $h$ ist eine positive Constante. Berücksichtigt man in diesem speciellen Falle die vorstehenden Gleichungen und nimmt noch $h = H$ an, so gelangt man zu den Formeln:

$$T - U = \sum_\nu \lambda_\nu \sum_\mu q'_\mu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu},$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(2T - \sum_\nu \lambda_\nu \sum_\mu q'_\mu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu}\right) dt = \text{Minimum}.$$

Das System wird dann ein „mechanisches“, durch die Beziehungen $L_\nu = 0$ beschränktes System. Sind ausserdem $L_\nu$ von den $q'_\mu$ unabhängig und noch

$$\sum_\mu q'_\mu \frac{\partial L_\nu}{\partial q'_\mu} = f_\nu(q_\mu, q'_\mu, L_\nu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

wo $f_\nu(q_\mu, q'_\mu, 0) = 0$, dann ist ganz einfach:

$$T - U = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} 2\,T dt = \text{Minimum}.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt das „Princip der Erhaltung der Energie", die zweite das „Princip der kleinsten Wirkung" in ihrer gewöhnlichen Bedeutung dar. Dn.

---

S. P. Thomson, W. Cassie, M. J. Jackson. Printing mathematical symbols. Nature XLVI. 513; XLVII. 8-9, 227.

Zur Erleichterung für den Druck empfiehlt Herr Thomson 1) $dy/dx$, 2) $exp(-ax)$ statt $e^{-ax}$, arctg$x$ statt $\tan^{-1}x$ (was in England üblich). Hr. Cassie will, ausser dem auch bei uns sich einbürgernden Bruchstriche von 1), die Potenzen durch einen Strich \ bezeichnet haben und am Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ stets den oberen Strich weglassen. Hr. Jackson macht auf das Missliche solcher Neuerungen aufmerksam. Lp.

---

## Weitere Litteratur.

L. Clariana. Nuevos puntos de vista en matemáticas. Progreso mat. II. 328-332.

K. Schlichting. Die Gravitation ist eine Folge der Bewegung des Aethers. Lüben. Goldschiener. 15 S. Mit Fig. 8°.

Th. Schwartze. Elektricität und Schwerkraft im Lichte einheitlicher Naturanschauung. Berlin. Polyt. Buchhdl. VI + 62 S. 8°.

C. Goldbeck. Descartes' mathematisches Wissenschaftsideal. Diss. Halle. 8°.

A. Korn. Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen. (In 2 Teilen.) Teil I. Berlin. 64 S. 8°.

G. Hoffmann. Die Anderssohn'sche Drucktheorie und ihre Bedeutung für die einheitliche Erklärung der physischen Erscheinungen. Halle.

V. Hirbec. La rénovation scientifique. Démolition des conceptions dynamiques immatérielles. Revendication par le feu ou calorique de son titre d'agent matériel et unique des forces physiques de la nature. Apparition de l'électricité; ses révélations. Paris. 366 S. 8°.

---

## B. Pädagogik.

Felix Müller. Ueber litterarische Unternehmungen, welche geeignet sind, das Studium der Mathematik zu erleichtern. Deutsche Math.-Ver. I. 59-60.

Befürwortet Sachregister zu den bedeutenderen mathematischen Zeitschriften, die Herstellung eines mathematischen Wörterbuchs, eine Bibliographie zur Einführung in die mathematische Litteratur. Das Material hat der Verf. seit 20 Jahren gesammelt. Lp.

---

W. W. Bobynin. Anwendung der Geschichte der Mathematik auf die Auflösung und Stellung einiger Fragen des mathematischen Unterrichts. Phys.-math. Wiss. IX. 65-76, 97-132. (Russisch.)

Nach interessanten historischen Notizen über die Reden und Dissertationen, welche die Russen des XVIII. Jahrhunderts über den Nutzen der Wissenschaften im allgemeinen und besonders der Naturwissenschaften und der Mathematik in grosser Zahl verfasst haben, wendet sich der Verfasser energisch gegen die wissenschaftsfeindlichen Ansichten Leo Tolstoi's. Wi.

---

V. Faustmann. Didaktische Bemerkungen zur elementaren Mechanik. Pr. Gymn. Czernowitz. 37 S. gr. Lex. 8°.

Bemerkungen über den Unterricht in der Mechanik nach dem Lehrplane der österreichischen Gymnasien, besonders mit Bezug auf die mathematische Behandlung ohne Benutzung der Infinitesimalrechnung. Lp.

---

A. Sadowski. Die österreichische Rechenmethode in pädagogischer und historischer Beleuchtung. Pr. (No. 9) Altstädt. Gymn. Königsberg i. Pr. 17 S. 4°.

Hr. Sadowski empfiehlt die allgemeine Einführung der österreichischen Substractions- und Divisionsmethode auf unseren Schulen von der untersten Stufe ab, indem er das Verfahren kurz erläutert, die Vorzüge desselben vor der Methode des Wegzählens feststellt und auch durch einen Ueberblick über die geschichtliche Entwickelung des Ziffernrechnens die Ueberlegenheit des in Oesterreich, Süddeutschland, der Provinz Brandenburg und in Berlin bereits durchgeführten Verfahrens nachweist. Nach der Erfahrung des Referenten sind es nur eigensinnige Elementarlehrkräfte, die sich gegen die österreichische Methode sträuben. Im Interesse des Unterrichts wäre zu wünschen, dass die Behörden die neue Methode nicht nur empfehlen, sondern vorschreiben. Mi.

---

P. Caspari. Der mathematische Lehrstoff der Secunda an unvollständigen Anstalten und seine Behandlung. Pr. (No. 418) Realprogymn. Oberlahnstein. 25 S. 4°.

Hr. Caspari giebt eine Reihe von methodischen Bemerkungen über die Behandlung des mathematischen Lehrstoffs auf der Oberstufe der Nichtvollanstalten. Die Theorie der Logarithmen soll kurz behandelt werden, dagegen ist der Gebrauch der Logarithmentafeln bis zur mechanischen Festigkeit einzuüben. Das Papier liege beim Aufschlagen der Logarithmen rechts, die Tafel links, die linke Hand schlage auf und markire mit dem kleinen Finger den Numerus, mit dem Zeigefinger den Logarithmus, bis die rechte Hand geschrieben hat. Bei der Behandlung der Gleichungen sollen sofort eingekleidete Gleichungen gelöst werden, damit die Gleichungen den Schülern in ihrem Wesen klar und durch ihre Bedeutung anziehend werden. Bei den gemischt quadratischen Gleichungen ist ausser der algebraischen Lösung auch die geometrische Lösung zur Darstellung zu bringen. Im planimetrischen Unterricht soll der Lehrer den Schüler durch richtige Führung auf dem Wege selbständiger Thätigkeit zum Beweise gelangen lassen; die Aufgaben

sind gruppenweise mit Zugrundelegung einer alle Beziehungen umfassenden Erläuterungsfigur zu lösen. In der Trigonometrie muss weniger auf ein Einprägen der Formeln gegeben als ein stetes Auffinden derselben ermöglicht werden. In der Stereometrie soll das Herauslesen neuer Lehrsätze aus entwickelten Formeln geübt werden. Häusliche Arbeiten sind nicht zu entbehren. Mi.

---

A. Schulte-Tigges. Die Bedeutung der schriftlichen Arbeiten für den physikalischen Unterricht. Pr. (Nr. 469.) Realgymn. Barmen. 29 S. 4°.

In verständiger Weise tritt Hr. Schulte-Tigges für die Anfertigung schriftlicher Arbeiten innerhalb des physikalischen Unterrichts ein, die von Reproductionen zu selbständigeren Leistungen aufsteigen. Er empfiehlt einfach reproducirende Darstellungen von Abschnitten des physikalischen Unterrichts, Beschreibungen von Naturerscheinungen und Experimenten, Darstellungen der inductiven Erforschung eines Gesetzes, des speculativen Aufbaues einer Hypothese, der deductiven Ableitung ihrer Folgerungen, Bearbeitungen umfassenderer Abschnitte nach systematischen Gesichtspunkten, Ableitungen des Besonderen aus Hypothesen und Gesetzen, Zusammenfassungen und Vergleiche, endlich auch Darstellungen des methodischen Gedankenganges, Ueberblicke über geschichtliche Entwickelungen von physikalischen Forschungen, von Darstellungen, von technischen Verwertungen der Naturkräfte, überhaupt qualitative Aufgaben, während bisher die quantitativen Aufgaben im Vordergrund gestanden haben. Die Zeit, die für solche Aufgaben innerhalb des Schulunterrichts gegeben ist, dürfte allerdings nur eine beschränkte sein, aber die Forderungen des Verfassers decken sich im ganzen mit den in den neuen Lehrplänen von 1892 S. 66 enthaltenen Bestimmungen über die Klassenausarbeitungen und verdienen durchweg Beifall. Mi.

---

## Weitere Litteratur.

R. Heyden. Elementare Einführung in die Lehre von den harmonischen Bewegungen. Pr. (No. 101) Luisenst. Oberrealsch. 26 S. 4°.

W. Burckhardt. Mathematische Unterrichts-Briefe. Für das Selbststudium Erwachsener. Mit besonderer Berücksichtigung der angewandten Mathematik bearbeitet. 2. Aufl. I. Kursus (Brief 1-26, Lection 1-51). Gera. Griesbach's Verlag. 452 S. 8°.

J. Sonne und Th. Sänger. Mathematische Repetitionshefte im Anschluss an die neuen Lehrpläne höherer Unterrichtsanstalten. I. und II. Heft. Marburg. Ehrhardt's Univers.-Buchhdlg. III + 27 + 33 S. 8°.

Dressler. Der mathematisch naturwissenschaftliche Unterricht an deutschen Volksschullehrer - Seminaren. Hoffmann Z. XXIII. 1-32.

Die Neuordnung des mathematisch-physikalischen Unterrichts an den preussischen Gymnasien (Beurteilungen aus Fachkreisen). Hoffmann Z. XXIII. 33-40, 171-177.

Heermann. Wie muss sich den neuen preussischen Lehrplänen zufolge das Lehrverfahren beim Unterricht in Mathematik und Naturwissenschaften an den Gymnasien gestalten? Hoffmann Z. XXIII. 401-411.

Lucke und Petzold. Bericht über die Versammlung zur Begründung eines Vereins für Förderung des Unterrichts in der Mathematik und in den Naturwissenschaften, abgehalten in Braunschweig am 5. und 6. October 1891. Hoffmann Z. XXIII. 72-80.

L. Wenzel. Logische Operationen in der Mathematik und beim mathematischen Unterrichte. Teil II. Klagenfurt. 22 S. 8°.

L. Rolla. Alcune considerazioni e proposte sopra l'insegnamento della matematica negli istituti tecnici. Lodi. 20 S. 8°.

# Zweiter Abschnitt.

## Algebra.

### Capitel 1.

### Gleichungen. (Allgemeine Theorie, Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

R. Baldwin Hayward. The algebra of coplanar vectors and trigonometry. London. Macmillan and Co. XXIX + 343 S.

Der Grundcharakter des vorliegenden Werkes dürfte in der Deutung der Symbole der gewöhnlichen Algebra liegen, falls diese nicht „reelle“ Grössen bedeuten, unter Wahrung des Princips der Permanenz gleichwertiger Formen. Wenn man die Frage bei Seite lässt, ob jenes Princip in der That stichhaltig sei, so muss zugegeben werden, dass die Behandlung durchweg äusserst klar ist, die geometrischen Darstellungen bisweilen einzig schön sind, das ganze Werk zugleich durch grosse Frische der Darstellung und Angemessenheit des Ausdrucks ausgezeichnet ist. Nachdem ein Vector definirt und geometrisch dargestellt ist, werden die Gesetze der Addition, der Subtraction, der Multiplication und der Division von Vectoren erörtert und wird die Formel $i^u = \cos u + i \sin u$ aufgestellt, in der $i$ einen Einheitsvector bedeutet, der einen positiven rechten Winkel mit dem Primvector bildet. Die Darstellung hiervon in der Form $(m+ni)/(m^2+n^2)$ leitet zur Einführung des Sinus und Cosinus, sowie zu dem Moivre'schen Satze und seinen geometrischen Anwendungen. Im fünften Capitel wird eine Deu-

tung für einen Vectorindex gesucht, und obschon die Analysis sehr geistvoll, die geometrische Darstellung sehr hübsch ist, so ist es vielleicht hier richtig, dass die der zugrunde liegenden Entwickelungsmethode anhaftenden Schwierigkeiten äusserst lästig sind, und mindestens sind wir zweifelhaft, ob die Behandlung als befriedigend angesehen werden kann. In demselben Capitel wird der verallgemeinerte Logarithmus (oder der sogenannte Logometer nach De Morgan) besprochen, und dann werden in den beiden folgenden Capiteln Anwendungen auf die hyperbolische Trigonometrie und auf die Einheitswurzeln gemacht. Unendliche Reihen, Factoren und Partialbrüche werden in beträchtlicher Länge behandelt, und geometrische Erläuterungen werden häufig in einer sehr wirksamen Art benutzt, wobei die für die Anwendung des Princips der Permanenz nötige Beschränkung bei den unendlichen Reihen angemerkt wird. Ein Capitel über rationale und ganze Functionen, in welchem ein Beweis des Fundamentaltheorems der Algebra gegeben und die Methode der conjugirten Functionen beleuchtet wird, beschliesst den Band. Das Buch dürfte besonders der Beachtung der Lehrer zu empfehlen sein; dieselben finden in ihm einen Reichtum an Stoff, den sie mit Vorteil bei ihrem fortlaufenden Tagewerke verwenden können. Gbs. (Lp.)

---

A. Macfarlane. The imaginary of algebra. Being a continuation of the paper „Principles of the algebra of physics“. Amer. Assoc. f. advanc. of Science Proc. 1892. 33-55. [New York M. S. Bull. III. 235-242.]

A. Macfarlane. The fundamental theorems of analysis generalized for space. Boston. 32 S. 8°.

Ueber die im ersten Titel genannte Arbeit siehe den Bericht im Jahrg. 1891 S. 78 dieses Jahrbuchs. Der erste Aufsatz enthält zunächst einen kritischen Ueberblick über die von älteren und neueren Mathematikern versuchten geometrischen Deutungen der imaginären Einheit. Der Verf. selbst findet das geometrische Aequivalent der letzteren in der Quaternion, welche er zu diesem Zweck in der Form $aa^A$ schreibt, wobei $a$ das arithmetische Ver-

hältnis zweier Strecken darstellt, $A$ den zu ihrem Winkel gehörigen Bogen eines Kreises mit dem Radius 1, und $\alpha$ die im Mittelpunkte dieses Kreises auf seiner Ebene senkrechte Drehungsaxe. Der Ausdruck $\alpha^A$ ist dann ein einfacher Versor. Die Uebereinstimmung zwischen Quaternion und imaginärer Einheit wird an einer Reihe von Formeln der sphärischen und hyperbolischen Trigonometrie erläutert.

In der folgenden Abhandlung zeigt der Verfasser, dass der Ausdruck $\alpha^A$ als vollständiges Aequivalent eines Raumwinkels angesehen werden kann, da letzterer durch die Axe $\alpha$ und den Bogen $A$ des zugehörigen Einheitskreises genau bestimmt ist. Hiernach entspricht der Multiplication zweier Winkel die Addition ihrer Bogen. Es gilt dann die fundamentale Beziehung

$$\alpha^A = \cos A + \alpha^{\frac{\pi}{2}} \sin A.$$

Die Formel $\cos(\alpha^A \alpha^B) = \cos \alpha^{A+B}$, oder in gewöhnlicher Schreibweise $= \cos(A+B)$, vermittelt den Uebergang zu dem Product zweier Winkel mit verschiedenen Axen $\alpha^A \beta^B$. Nunmehr lassen sich die Additionstheoreme des Cosinus und Sinus auf Raumwinkel in verschiedenen Ebenen ausdehnen, und ebenso ergiebt sich durch Bestimmung des Productes dreier Winkel der Moivre'sche Satz. Nach Erledigung des Falles, in welchem $\alpha^A$ durch zwei schiefe Componenten dargestellt ist, erfolgt mittelst der Formel

$$\alpha_w^A = e^{A \cdot \alpha^w}$$

der Uebergang zur allgemeinen Exponentialfunction, die für $w = \frac{\pi}{2}$ wieder in $\alpha^A$ übergeht. Analog zur Quaternion wird der Ausdruck $a . \alpha_w^A$ Quinternion genannt. Es folgt die Bestimmung des Productes zweier Quinternionen, der binomische und der polynomische Satz für dieselben, die Entwickelung von $\log(1+x)$, wenn $x$ eine Quaternion bedeutet, die Behandlung der Hyperbelfunctionen in analoger Weise mit den trigonometrischen und die Differentiation von Versoren und Winkelproducten. Am Schluss ist eine einschlägige ältere Note des Verf. aus den Edinburgh Proc. (1883) abgedruckt.

Schg.

---

L. VAN ELFRINKHOF. De oplossing van lineaire vectorvergelijkingen in bijzondere gevallen. Nieuw Archief XIX. 132-142.

Die Lösung der linearen Vectorgleichung $\varphi\varrho = \alpha$ ist von Hamilton in seinen bekannten „Elementen“ und „Vorlesungen“ für den allgemeinen Fall gegeben. Dabei spielen gewisse Vectorfunctionen und die drei Scalarfunctionen

$$m = \frac{S(\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu)}{S\lambda\mu\nu},$$
$$m' = \frac{S(\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu + \mu\varphi'\nu\varphi'\lambda + \nu\varphi'\lambda\varphi'\mu)}{S\lambda\mu\nu},$$
$$m'' = \frac{S(\mu\nu\varphi'\lambda + \nu\lambda\varphi'\mu + \lambda\mu\varphi'\nu)}{S\lambda\mu\nu}$$

eine wichtige Rolle. Wenn eine dieser Grössen oder mehrere derselben verschwinden, so wird die Hamilton'sche Lösung jedoch ungültig. Der Zweck des Verfassers ist, diese Lücke auszufüllen. Nach einer kurzen Erörterung des allgemeinen Falles wird zuerst der Fall betrachtet, wo $m$ verschwindet. Es zeigt sich, dass die Lösung aus der Hamilton'schen identischen Gleichung

$$m - m'\varphi + m''\varphi^2 - \varphi^3 = 0$$

durch Operation mit $\varphi^{-1}$ übergeht in die Form

$$m'\varrho = m''\varphi\varrho - \varphi^2\varrho + \varphi^{-1}0,$$

wo $\varphi^{-1}0$ die allgemeine Lösung der Gleichung $\varphi\varrho = 0$ bedeutet, welche in diesem Falle stets eine unbestimmte Scalargrösse enthält.

Ausserdem werden die Fälle $m' = 0$, $m'' = 0$ ausführlich erörtert. Mo.

---

A. McAULAY. Quaternions. Nature XLVII. 151.

Zur Beschwichtigung des Streites zwischen den Herren Heaviside und Gibbs (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 81). Lp.

---

J. CARNOY. Cours d'algèbre supérieure. Louvain, Uitspruyt. Paris, Gauthier-Villars et Fils. XII + 537 S. gr. 8°.

I. Determinanten. 1. Fundamentale Eigenschaften. 2. Multiplication. 3. Specielle Determinanten.

II. Theorie der Gleichungen. 1. Grundprincipien. 2. Allgemeine Eigenschaften. 3. Numerische Auflösungen. 4. Simultane Gleichungen. 5. Transformation. 6. Erniedrigung. 7. Algebraische Auflösung. 8. Verschiedene Fragen (Pell'sche Gleichung, Wallis'sche und Stirling'sche Formel, Congruenzen).

III. Einführung in die Theorie der algebraischen Formen. 1. Einleitung. 2. Invarianten und Covarianten. 3. Methoden zur Bildung der Invarianten und Covarianten. Anwendung auf die binären Formen. 4. Principien der deutschen symbolischen Methode. 5. Binäre Formen des zweiten, dritten und vierten Grades.

Das Handbuch des Hrn. Carnoy lässt hinsichtlich der Strenge an einigen Stellen zu wünschen übrig, besonders beim Beweise des Satzes, dass jede algebraische Gleichung $m^{ten}$ Grades $m$ Wurzeln hat (wie übrigens auch die übrigen Lehrbücher, ausgenommen das des Hrn. Lipschitz). Es ist jedoch bündig und klar abgefasst und wird als klassisches Lehrbuch den Lehrern und den Studirenden sehr nützlich sein. Mn. (Lp.)

---

M. A. Tichomandritzky. Lehrbuch der höheren Algebra. 2. Ausgabe. Charkow. VIII + 311 S. (Russisch.)

S. Jahrbuch über die F. d. M. XIX. 1887. 59.

C. H. Chapman. An elementary course in the theory of equations. New York. John Wiley and Sons. VIII + 90 S. 12mo. [Nature XLVI. 199, New York M. S. Bull. II. 11-12.]

W. S. Burnside and A. W. Panton. The theory of equations. 3rd ed. Dublin. 500 S.

C. Metzger. Lehrbuch der Gleichungen dritten und vierten Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen zweiten Grades. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VIII + 243 S. 8°.

---

F. Mertens. Ueber einen algebraischen Satz. Wien. Ber. CI. 1560-1566.

Sind $\varphi$, $\psi$ ganze Functionen der Veränderlichen $x$, $y$, ...

mit unbestimmten Coefficienten, und bezeichnet $u$ irgend einen Coefficienten von $\varphi$, $v$ irgend einen von $\psi$, so lässt sich immer ein Exponent $h$ von der Art angeben, dass das Product $u^h v$ als ganze ganzzahlige Function der Coefficienten von $\varphi$ und von $\varphi\psi$ darstellbar ist, welche in den Coefficienten von $\varphi$ homogen und vom Grade $h-1$ und in denen von $\varphi\psi$ linear-homogen ist. Diesen Satz beweist der Verfasser auf rein arithmetischem Wege zunächst für Formen von einer Veränderlichen und dann für beliebig viele Veränderliche. Um den Nutzen des Satzes für die Lehre vom grössten gemeinsamen Teiler zu zeigen, wird mit Hülfe desselben der Gauss'sche Satz bewiesen, demzufolge der grösste gemeinsame Teiler aller Coefficienten des Productes zweier ganzen ganzzahligen Functionen $\varphi$, $\psi$ der Veränderlichen $x$, $y$, ... gleich dem Product des grössten gemeinschaftlichen Teilers aller Coefficienten von $\varphi$ in den grössten gemeinschaftlichen Teiler aller Coefficienten von $\psi$ ist. Bedeutet nämlich $a$ irgend einen Coefficienten von $\varphi$, $b$ einen Coefficienten von $\psi$, sind ferner $t$, $t'$ die grössten gemeinsamen Teiler aller Coefficienten von $\varphi$ bezüglich $\psi$, und bezeichnet man allgemein eine Summe von Vielfachen der Coefficienten von $\varphi\psi$ mit $L$, so giebt es jenem Satze zufolge einen Exponenten $h$ von der Art, dass das Product $a^h b$ als ganze ganzzahlige Function der Coefficienten von $\varphi$ und $\varphi\psi$ darstellbar ist, welche die Coefficienten von $\varphi\psi$ linear-homogen und die von $\varphi$ homogen und im Grade $h-1$ enthält. Da ein Product von $h-1$ Coefficienten der Function $\varphi$ ein Vielfaches von $t^{h-1}$ ist, so hat demnach jedes der Producte $a^h b$ die Gestalt $t^{h-1}L$. Da ferner $t^h$ der grösste gemeinschaftliche Teiler der $h^{\text{ten}}$ Potenzen aller Coefficienten von $\varphi$ ist, so muss auch $t^h b$ die Gestalt $t^{h-1}L$ haben, und demzufolge hat $tb$ die Gestalt $L$. Da dies für alle Coefficienten $b$ von $\psi$ gilt, so gilt es auch für $tt'$. Andererseits geht $tt'$ in allen Coefficienten von $\varphi\psi$ auf, und hiermit ist der Satz bewiesen. Auf dem Umstande, dass der gegebene Beweis ohne den Begriff der Primzahl auskommt, beruht seine Anwendbarkeit auf allgemeinere Fragen. Der Verfasser beweist zum Schlusse den in der Kronecker'schen Theorie der algebraischen Zahlen fundamentalen Satz, dass der grösste gemeinsame Teiler aller Coefficienten in der Norm

einer ganzen algebraischen Form $F$ gleich dem grössten Teiler der Coefficienten in der Norm derjenigen Linearform ist, welche entsteht, wenn man die Potenzen und Producte der Veränderlichen in $F$ durch beliebige von einander verschiedene Veränderliche ersetzt. Ht.

---

**F. Mertens. Der Fundamentalsatz der Algebra.** Wien. Ber. CI. 415-424.

**F. Mertens. Der Fundamentalsatz der Algebra.** Monatsh. f. Math. III. 293-308.

Der Verfasser spricht die Ansicht aus, „der Fundamentalsatz der Algebra, dass jede Gleichung $f(z) = 0$ Wurzeln hat, könne nur den Sinn haben, dass man im Stande ist, rationale complexe Werte $x+iy$ anzugeben, für welche beide Coordinaten des Einsetzungsresultates $f(x+iy)$ von gewünschter Kleinheit sind". Diese Ansicht erscheint dem Referenten nicht correct. Vielmehr drücken die angeführten Worte nur eine Thatsache aus, aus welcher jener Fundamentalsatz, nämlich die Existenz einer der Gleichung genügenden Fundamentalreihe, sich schliessen lässt.

Der Beweis des Verfassers besteht darin, dass gezeigt wird, wie man durch eine endliche Anzahl von Versuchen zu einem Werte für $z$ gelangen kann, von welchem aus das Newton'sche Näherungsverfahren zur Berechnung einer Wurzel mit Erfolg einsetzt. Ht.

---

**D. Hilbert. Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten.** J. für Math. CX. 104-129.

Der Verfasser beweist in der vorliegenden Abhandlung den folgenden, für die Theorie der Gleichungen principiell wichtigen Satz: „Wenn $F$ eine irreducible ganze ganzzahlige Function der Variabeln $x, y, \ldots, w, t, r, \ldots, q$ bezeichnet, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, für die Variabeln $t, r, \ldots, q$ ganze rationale Zahlen einzusetzen, so dass dadurch $F$ in eine irreducible Function von $x, y, \ldots, w$ übergeht". Der Beweis wird zunächst für den besonderen Fall durchgeführt, dass $F$ nur von

zwei Variabeln $x$ und $t$ abhängt, und sodann wird der allgemeine Fall auf diesen besonderen zurückgeführt. Die wesentlichen Mittel für den Beweis bilden einerseits die Puiseux'schen Entwickelungen, andererseits ein Hülfssatz, der seines interessanten, eigentümlichen Charakters wegen hier erwähnt werden möge. Derselbe lautet: Wenn jedes Element $a_i$ der unbegrenzten Reihe $a_1, a_2, a_3, \dots$ einen der Werte 1, 2, 3, ..., $a$ besitzt, wenn ferner $m$ irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet, so lassen sich die positiven ganzen Zahlen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots, \mu^{(m)}$ stets so bestimmen, dass die $2^m$ Elemente

$$a_{\mu+\varepsilon^{(1)}\mu^{(1)}+\varepsilon^{(2)}\mu^{(2)}+\dots+\varepsilon^{(m)}\mu^{(m)}} \qquad (\varepsilon^{(i)}=0, 1;\ i=1, 2, \dots, m)$$

für unendlich viele Indices $\mu$ gleich der nämlichen Zahl (aus der Reihe 1, 2, ..., $a$) sind.

Nachdem der Verfasser den Satz auf solche ganze rationale Functionen ausgedehnt hat, deren Coefficienten einem beliebigen algebraischen Zahlenkörper angehören (wobei die Irreducibilität eben auf diesen Zahlenkörper zu beziehen ist), geht er dazu über, die gewonnenen Resultate auf die Theorie der Gleichungen anzuwenden. Von den sich hierbei ergebenden Sätzen mögen beispielsweise die folgenden herausgehoben werden, deren principielle Bedeutung unmittelbar einleuchtet: „Es giebt unbegrenzt viele Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades mit ganzzahligen Coefficienten, deren Gruppe im Bereiche der rationalen Zahlen die symmetrische Gruppe ist". Der entsprechende Satz wird für die alternirende Gruppe nachgewiesen. Ferner: „Es giebt unbegrenzt viele Bereiche von bestimmtem Grade $n$, in denen (abgesehen vom Bereiche aller rationalen Zahlen) kein Bereich niederen Grades enthalten ist". Schliesslich bemerkt der Verfasser noch, dass mit den in der vorliegenden Abhandlung benutzten Hülfsmitteln auch der folgende Satz bewiesen werden kann: „Wenn eine algebraische Function von $t$ für alle rationalen, in einem beliebig kleinen Intervalle gelegenen Werte stets selber rationale Werte annimmt, so ist sie notwendig eine rationale Function". Hz.

---

G. Fouret. Sur la détermination d'une limite inférieure des racines d'une équation algébrique. S. M. F. Bull. XX. 4-6.

G. Fouret. Remarques sur les limites des racines d'une équation algébrique. S. M. F. Bull. XX. 35-38.

Zur Aufsuchung einer oberen Grenze für die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung kann die Newton'sche Methode (cf. Serret, Cours d'algèbre § 114) oder die Thibaut'sche Regel (cf. Nouv. Ann. (1) II, p. 517) dienen. Aehnlich erhält man eine untere Grenze, indem man eine Zahl bestimmt, deren Substitution in die Reihe der Functionen, welche bei der einen oder der anderen dieser Methoden gebraucht werden, abwechselnd positive und negative Resultate liefert. F.

F. Giudice. Sopra un criterio del sig. Petersen per calcolare un limite superiore alle radici d'un'equazione numerica. Palermo Rend. VI. 157-159.

Wenn $-a_m$ den ersten negativen und $-a_p$ den dem absoluten Betrag nach grössten negativen Coefficienten einer algebraischen Gleichung bezeichnet, so ist bekanntlich $1+\sqrt[m]{a_p}$ eine obere Grenze für die positiven Wurzeln. Durch die Transformation $x=\frac{y}{\alpha}$ und durch passende Wahl von $\alpha$ hat Herr Petersen (Teoria delle equazioni algebriche, Napoli 1892) aus diesem Kriterium eine andere obere Grenze hergeleitet, welche den Wurzeln näher liegen soll. In der vorliegenden Note weist nun Herr Giudice einen Fehler in der Petersen'schen Entwickelung nach und zeigt an dem Beispiel einer quadratischen Gleichung, dass das von Herrn Petersen angegebene Kriterium nicht correct ist. F.

R. Dedekind. Ueber Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Deutsche Math.-Ver. I. 33-35.

Ist $\alpha$ eine beliebige reelle positive Zahl, so setze man

$$\frac{1}{\alpha}=a_1+\varepsilon_1,\quad \frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2}=a_2+\varepsilon_2,\quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2}=a_3+\varepsilon_3,\quad \frac{4\varepsilon_3}{\alpha^2}=a_4+\varepsilon_4,\quad \ldots,$$

wo die Zahlen $a$ als grösste Ganze bestimmt sind und die Grössen $\varepsilon$ mithin sämtlich der Bedingung

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

genügen. Die beständig convergente Potenzreihe

$$\psi(x) = -1 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x^3}{1.2} + a_3 \frac{x^5}{1.2.3} + a_4 \frac{x^7}{1.2.3.4} + \cdots$$

ist dann eine solche, welche nur die eine reelle Nullstelle $x = \alpha$ besitzt. In der That wegen

$$-1 + a_1 \frac{\alpha}{1} + a_2 \frac{\alpha^3}{1.2} + \cdots + a_n \frac{\alpha^{2n-1}}{n!} = -\varepsilon_n \frac{\alpha^{2n-1}}{n!}$$

verschwindet notwendig $\psi(\alpha)$. Andererseits ist ersichtlich, dass gleichzeitig mit $x$ auch $\psi(x)$ das ganze reelle Gebiet von $-\infty$ bis $+\infty$ stets wachsend durchlaufen muss und folglich nur für den einen Wert $x = \alpha$ den Wert 0 erhalten kann. Bekanntlich gilt für algebraische Gleichungen mit rationalen Zahlencoefficienten der Satz, dass, wenn die irreducible Gleichung $\varphi(x) = 0$ mit der Gleichung $\psi(x) = 0$ eine Wurzel gemein hat, jede Wurzel von $\varphi(x) = 0$ auch Wurzel von $\psi(x) = 0$ ist. Durch das Vorstehende ist die Unzulässigkeit dieses Satzes für transcendente Gleichungen gezeigt. Ht.

---

E. Picard. Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. Journ. de Math. (4) VIII. 5-24.

Die Anzahl derjenigen in einem gewissen Gebiete $\varDelta$ gelegenen, gemeinsamen Wurzeln der Gleichungen:

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \; \ldots, \; f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

für welche die Functionaldeterminante $D$ der $n$ Functionen $f_1, \ldots, f_n$ positiv wird, vermindert um die Anzahl der Wurzeln, für welche dieselbe negativ ist, drückt sich nach einem Theorem von Kronecker durch ein gewisses über die Oberfläche von $\varDelta$ zu erstreckendes $(n-1)$-faches Integral aus. Um mit Hülfe dieses Theorems die Anzahl der Wurzeln selbst zu erhalten, fügt der Verfasser zu jenen $n$ Gleichungen noch die $(n+1)^{\text{te}}$ Gleichung $zD = 0$ hinzu und beschränkt die $(n+1)^{\text{te}}$ Veränderliche $z$ auf ein beliebiges, die 0 enthaltendes Intervall. Wendet man auf das so entstehende Glei-

chungssystem den Kronecker'schen Satz an und berücksichtigt dann, dass die Functionaldeterminante des neuen Functionensystems gleich $D^2$ und mithin stets positiv ist, so ergiebt sich offenbar die Zahl der Wurzeln durch ein $n$-faches Integral ausgedrückt; dabei ist vorausgesetzt, dass die Wurzeln von $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$ sämtlich einfach sind und folglich $D$ für dieselben von 0 verschieden ist. Der Verfasser führt die Rechnung im Falle zweier und dreier Gleichungen vollständig durch. Ht.

---

E. Phragmén. Sur une extension du théorème de Sturm. C. R. CXIV. 205-208.

E. Picard. Observations relatives à la communication de M. Phragmén. C. R. CXIV. 208.

Picard hat das Problem, die Anzahl derjenigen reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

welche in einem gegebenen Bereiche liegen, mittelst des Kronecker'schen Integralsatzes gelöst (vergl. das vorige Referat). E. Phragmén behandelt dasselbe Problem mittelst elementarer Methoden. Da angenommen werden kann, dass der gegebene Bereich durch algebraische Flächen begrenzt ist, so reducirt sich das Problem auf das folgende: Man soll die Anzahl der reellen Lösungen des obigen Gleichungssystems bestimmen, welche einer jeden von gewissen gegebenen ganzen rationalen Functionen der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ ein vorgeschriebenes Vorzeichen erteilen. Der Verfasser bestimmt nun eine rationale Function $z = R(x_1, \ldots, x_n)$ von der Art, dass alle Lösungen des obigen Gleichungssystems rational durch $z$ ausdrückbar sind, während $z$ selbst einer einzigen Gleichung genügt. Es wird nun gezeigt, in welcher Weise nach dieser neuen Reduction des Problems die Anwendung des Sturm'schen Verfahrens zur Lösung des Problems führt.

Picard weist in einer kurzen unmittelbar folgenden Bemerkung darauf hin, dass die Phragmén'schen Resultate aus seinen früher veröffentlichten Sätzen abgeleitet werden können. Ht.

---

P. Mansion. Sur la théorie des racines égales. Brux. S. sc. XVI A. 54-56.

Entwurf dieser Theorie, ohne dass auf das Princip zurückgegriffen wird, nach welchem jede Gleichung $m^{ten}$ Grades $m$ Wurzeln hat. Mn. (Lp.)

---

E. Phragmén. Sur la résolution des équations numériques. Stockh. Öfv. XLIX. 179-188.

Gewisse bekannte Methoden zur Trennung der reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung, namentlich diejenige von Fourier, sind deshalb unpraktisch, weil man bei denselben in gewissen Fällen das euklidische Verfahren zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers benutzen muss, und weil man auch nicht von vorn herein sieht, wie viele Operationen nötig sind, um das Ziel zu erreichen. An Ideen von Waring, Lagrange und Cauchy anknüpfend, zeigt der Verf., wie man jene Uebelstände ziemlich leicht beseitigen kann. Nachträglich wird bemerkt, dass gewisse andere Probleme sich leichter durch successive Approximationen als durch „rein arithmetische“ Methoden behandeln lassen, z. B. die Frage, ob eine gegebene Gleichung irreductibel sei oder nicht. Bdn.

---

E. Amigues. Note sur un problème d'algèbre. Nouv. Ann. (3) XI. 245-249.

Wenn $x$ und $z$ zwei beliebige Wurzeln einer algebraischen Gleichung $m^{ten}$ Grades

$$f(u) = 0$$

sind, so stellt

$$\Pi(y.F(a,b) - \psi(a,b)) = 0,$$

wo in dem Producte für $a$ sowohl wie für $b$ sämtliche Wurzeln von $f(u) = 0$ zu setzen sind, die Gleichung vom Grade $m^2$ dar, welche die Werte

$$y = \frac{\psi(x,z)}{F(x,z)}$$

zu Wurzeln hat.

Dieses Resultat, welches für jeden mit den Anfangsgründen der Algebra Vertrauten selbstverständlich ist, verdankt der Verf. nach seiner Mitteilung einem seiner Schüler. Er selbst knüpft noch einige Bemerkungen daran, die sich besonders auf den Fall beziehen, dass $y$ in Bezug auf $x$ und $z$ symmetrisch ist.

F.

---

G. Fouret. Sur le théorème de Budan et de Fourier. Nouv. Ann. (3) XI. 82-88.

Der von dem Verf. für den Budan-Fourier'schen Satz gegebene Beweis und die hinzugefügten Corrollare sind eine unwesentliche Modification der von Serret in seinem „Cours d'algèbre" gegebenen Entwickelungen. F.

---

L. Lévy. Extrait d'une lettre adressée à M. Rouché. Nouv. Ann. (3) XI. 147-148.

Zu dem Satze von Daniel Mayer t. X. 111 (s. F. d. M. XXIII. 99) hat jetzt E. Picard einen sehr einfachen Beweis gegeben.

H.

---

H. A. Sawin. The algebraic solution of equations. Annals of Math. VI. 169-177.

Die Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades

$$x^n+Ax^{n-2}+Bx^{n-3}+\cdots+K=0$$

wird in der Gestalt

$$x^n+[a\Sigma u^2+b\Sigma uv]x^{n-2}+[c\Sigma u^3+d\Sigma u^2v+e\Sigma uvy]x^{n-3}+\cdots=0$$

geschrieben, wo die $\Sigma$ die bekannten symmetrischen Functionen von gewissen Veränderlichen $u, v, \dots, z$ bedeuten. Der Verfasser sucht nun die Constanten $a, b, c, \dots$ derart zu bestimmen, dass $x=u+v+\cdots+z$ eine Wurzel der Gleichung wird. Das hiermit gekennzeichnete Verfahren führt im Falle $n=3$ und $n=4$ zur Auflösung der Gleichung. Was den Fall der Jerrard'schen Gleichung $x^5+Cx+D=0$ anbetrifft, so wird die Auflösung derselben auf die Lösung der beiden simultanen Gleichungen

$$u^3+v^3=P,\quad u^5+v^5=Q$$

zurückgeführt, wo $P$, $Q$ durch die Coefficienten $C$ und $D$ bestimmt sind. Eine analoge Reduction auf zwei simultane Gleichungen ergiebt sich auch im Falle der Gleichung sechsten Grades, wenn man dieselbe in der Gestalt $x^6+Ax+B=0$ zu Grunde legt.

Ht.

M. Killmann. Zu den algebraischen Gleichungen. Pr. (Nr. 47) Real-Progymn. Dirschau. 12 S. 4°.

Durch Multiplication von Factoren ersten resp. zweiten Grades in $x$, die verfügbare Constanten enthalten und sich durch Einheitswurzeln unterscheiden, entstehen Ausdrücke zweiten, dritten und vierten Grades in $x$. Identificirt man diese mit den linken Seiten der allgemeinen Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades, so erhält man für die Constanten lösbare Gleichungen und somit die Wurzeln der allgemeinen Gleichungen bis zum vierten Grade. Nach derselben Methode werden specielle auflösbare trinomische Gleichungen fünften und sechsten Grades behandelt. F.

F. Giudice. Sulle equazioni algebriche. Rivista di Mat. II. 193-212.

Um die Wurzeln $x$ einer algebraisch auflösbaren Gleichung zu finden, kann man von einem aus Wurzeln zusammengesetzten Ausdruck $A$ ausgehen, der eine hinreichende Anzahl unbestimmter Grössen enthält, die Norm der Differenz $x-A$ bilden und die unbestimmten Grössen so zu bestimmen suchen, dass die Norm mit der linken Seite der gegebenen Gleichung identisch wird. Auf diese Art werden die allgemeinen Gleichungen dritten und vierten Grades gelöst. Für die Gleichungen vierten Grades giebt der Verf. mehrere Methoden, leitet auch aus der Form der Resultate Kriterien für die Anzahl reeller Wurzeln her. F.

A. Jerábek. „Ueber Resolventen". Časop. XXI. 1-11. (Böhmisch.)

Liefert den Beweis, dass keine kubische oder biquadratische Gleichung Resolvente einer den vierten Grad übersteigenden allgemeinen Gleichung sein kann. Std.

P. M. Pokrowsky. Ueber den casus irreductibilis bei den Gleichungen dritten Grades. Kiew Univ. Nachr. 1892. (Russisch.)

Eine Vereinfachung der Methode von Guido Weichhold für die Auflösung der kubischen Gleichung:

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0.$$

Es seien

$$z_1=x_1+\alpha x_2+\alpha^2x_3,\qquad z_2=x_1+\alpha^2x_2+\alpha x_3,$$
$$t_1=x_2x_3+\alpha x_3x_1+\alpha^2x_1x_2,\qquad t_2=x_2x_3+\alpha^2x_3x_1+\alpha x_1x_2.$$

Dann sind $z_1t_2$ und $z_2t_1$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2-(p_1p_2-9p_3)u+(p_1^2-3p_2)(p_2^2-3p_1p_3)=0.$$

Wi.

---

A. Kneser. Bemerkungen über den sogenannten casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen. Math. Ann. XLI. 344-348.

Ohne etwas anderes vorauszusetzen als den Begriff und die Grundeigenschaften der irreductibeln Gleichungen sowie den Euklidischen Algorithmus zum Aufsuchen des grössten gemeinschaftlichen Teilers, weist Herr Kneser nach, dass die Annahme, eine kubische Gleichung, die in einem reellen Rationalitätsbereich irreductibel ist und drei reelle Wurzeln besitzt, sei durch eine Kette reeller Radicale auflösbar, auf einen Widerspruch führt.

Die für kubische Gleichungen benutzte Methode liefert dann auch einen Beweis des allgemeineren, von Herrn Hölder aufgestellten Satzes, welcher F. d. M. XXIII. 1891. 100 citirt ist.

F.

---

Ch. H. Kummell. Symmetries of the cubic and methods of treating the irreducible case. Annals of Math. VI. 179-197.

Verf. hat eine grosse Zahl von Relationen über die binäre kubische Form entwickelt, in der Hoffnung, dadurch eine Methode zur Behandlung des casus irreducibilis der kubischen Gleichung zu finden, für den Fall, dass mindestens eine Wurzel rational (!) ist.

Um den seltsamen Standpunkt des Verf.'s noch weiter zu kennzeichnen, diene folgendes Citat. Er sagt nämlich in Bezug auf eine Arbeit von Weichhold, deren Fehler schon F. d. M. X. 1878. 63 gekennzeichnet ist: The ordinary definition of the irreducible case is, that the discriminant is negative. I agree however, with Weichold, who says, that it is an essential condition for it, that one root be rational, and that some method of approximation must be used in case of irrational roots. R. M.

---

A. Cayley. On two cubic equations. Messenger (2) XXII. 69-71.

Eliminirt man $b$ und $c$ aus den Gleichungen $2+a=b^2$, $2+b=c^2$, $2+c=a^2$, so ergiebt sich

$$0=a^8-8a^6+20a^4-16a^2-a+2$$
$$=(a-2)(a+1)(a^3+a^2-2a-1)(a^3-3a+1),$$

und die beiden fraglichen kubischen Gleichungen sind

$$x^3+x^2-2x-1=0 \quad \text{und} \quad x^3-3x+1=0.$$ Glr. (Lp.)

---

J. Amaldi. Costruzione dei poligoni regolari di 19 e 37 lati. Batt. G. XXX. 141-155.

Verf. giebt eine Construction des regelmässigen 19- und 37-Ecks mit Hülfe von Zirkel, Lineal und einer festen Parabel an; das letztere ist deshalb bemerkenswert, weil die Zahlen 18 und 36 den Factor 3 zweimal enthalten. Wbg.

---

E. Eckhardt. Ein Rotationsproblem. — Die Dreiteilung des Winkels. — Die Darstellung der Wurzeln der Gleichung dritten Grades durch Zeichnung. Diss. Marburg. 8°.

---

M. Merriman. The deduction of final formulas for the algebraic solution of the quartic equation. American J. XIV. 237-245.

M. Merriman. Final formulas for the algebraic solution of quartic equations. New York M. S. Bull. I. 202-205.

Benutzt man zur Lösung einer Gleichung vierten Grades die Euler'sche Methode, so erscheinen in dem Falle, dass die kubische Resolvente eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln besitzt, die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung sämtlich in imaginärer Form, während nur zwei Wurzeln complexe Werte, die beiden andern aber reelle Werte haben. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, wandelt der Verf. die Ausdrücke für die Wurzeln so um, dass unter den Quadratwurzelzeichen nur die symmetrischen Functionen der beiden imaginären Wurzeln der kubischen Gleichung auftreten, welche reelle Zahlen sind. Die für die numerische Rechnung erforderlichen Formeln sind vollständig zusammengestellt und an einigen Beispielen erläutert. F.

F. Giudice. Sulla risolvente di Malfatti. Torino Atti. XXVII. 817-826.

Ausrechnung der verschiedenen Resolventen sechsten Grades für eine Gleichung fünften Grades auf dem Wege der Elimination. Ht.

W. Krauze. Teleologische Methode von Hoene-Wronski. Prace mat.-fiz. III. 110-125. (Polnisch.)

Der Verfasser beweist den Hauptsatz der Wronski'schen Methode der Auflösung algebraischer Gleichungen (Bestimmung der Coefficienten des Factors der gegebenen Gleichung) und wendet die Methode auf die Auflösung von zwei Gleichungen siebenten und einer Gleichung fünften Grades an. Dn.

S. Dickstein. Bemerkungen über die teleologische Methode. Prace mat.-fiz. III. 126-129. (Polnisch.)

Definirt man die symmetrischen Functionen $A_k$ (Functionen „Aleph“ von Wronski) der Wurzeln der Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades

$f(x) = 0$ durch die Formel

$$A_k = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{x_i^{k+m}}{f'(x_i)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_m$ die Wurzeln der Gleichung sind und

$$|x_1| > |x_2| > \ldots > |x_n| \ldots > |x_m|,$$

so gelangt man unter Anwendung der Jacobi'schen Methode (Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes (Crelle's Journal XIII) zur folgenden (approximativen) Form des Factors $n^{\text{ten}}$ Grades $(n < m)$ der gegebenen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x^n, & x^{n-1}, & x^{n-2}, & \ldots, & 1 \\ A_{k+n}, & A_{k+n-1}, & A_{k+n-2}, & \ldots, & A_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k+2n-1}, & A_{k+2n-2}, & A_{k+2n-3}, & \ldots, & A_{k+n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Vergl. Jahrb. über die F. d. M. XXII. 1890. 40. Dn.

---

W. Heymann. Die trinomische und quadrinomische Gleichung in elementarer Behandlungsweise. Schlömilch Z. XXXVII. 90-105.

Die Untersuchung beginnt mit Einführung einer Potenzreihe, von welcher nachgewiesen wird, dass jede ihrer Potenzen sich wieder als eine Reihe von derselben Form darstellen lässt. Zwei in den Coefficienten der Reihe auftretende Parameter können so bestimmt werden, dass die Reihe die trinomische Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades identisch befriedigt. Diese beiden Parameter hängen von einer binomischen Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades ab; die Reihe wird demnach $n$-deutig und stellt somit sämtliche Wurzeln der vorgelegten Gleichung dar. Convergirt die Reihe nicht, so liefert eine einfache Transformation eine andere Reihe, welche gerade dann convergirt, wenn die ursprüngliche divergirt. Zum Schluss wird die Reihe so verallgemeinert, dass sie die sämtlichen Wurzeln einer quadrinomischen Gleichung darstellt. F.

A. Capelli. Sulla risoluzione generale delle equazioni, ed in ispecie delle trinomie, per mezzo di integrali definiti. Napoli Rend. (2) VI. 39-48.

Die Heymann'schen „Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen" (cf. F. d. M. XXIII. 1891. 307), in welchen unter anderem die Wurzeln algebraischer, speciell trinomischer Gleichungen durch bestimmte Integrale dargestellt werden, haben Herrn Capelli veranlasst, sich gleichfalls mit der transcendenten Auflösung der Gleichungen zu beschäftigen. Auf einem ganz anderen Wege als Herr Heymann, nämlich unter ausschliesslicher Benutzung der Theorie der Integrale von Functionen complexer Veränderlicher, gelangt er zur Darstellung der Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung in Form bestimmter Integrale. Die Specialisirung dieser Resultate für den Fall einer trinomischen Gleichung führt zu Formeln, die mit den Heymann'schen im wesentlichen übereinstimmen.

F.

v. Mollame. Soluzione algebrica dell'equazione

$$0 = x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \cdots \atop {\cdot \cdot - \cfrac{1}{x}}}}$$

Rivista di Mat. II. 212-215.

Die Wurzeln der im Titel genannten Gleichung, in welcher die Unbekannte $x$ $(n-1)$-mal zu schreiben ist, sind

$$x = 2 \, . \cos \frac{k\pi}{n}$$

für $k = 1, 2, \ldots, n-1$. F.

G. Labindo. Sulle equazioni che ammettono coppie di radici reciproche. Batt. G. XXX. 206-216.

Die Arbeit beschäftigt sich damit, die Bedingungen aufzusuchen, welchen die Coefficienten einer Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades $f(x) = 0$

genügen müssen, damit die Gleichung $r$ Paare reciproker Wurzeln besitzt. Man kann eine Reihe von ganzen Functionen $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_{m-2r}(x)$ von den resp. Graden $m-1$, $m-2$, ..., $2r$ mit Coefficienten, die ganze Functionen der Coefficienten von $f(x)$ sind, derart bilden, dass jedes Paar reciproker Wurzeln von $f(x)=0$ auch jede der Gleichungen

$$\psi_1(x)=0,\quad \psi_2(x)=0,\quad \ldots,\quad \psi_{m-2r}(x)=0$$

befriedigt, und umgekehrt. Hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass $f(x)=0$ $r$ Paare reciproker Wurzeln besitzt, ist demnach, dass $\psi_{m-2r}(x)=0$ eine reciproke Gleichung ist, dass also je zwei von den Enden gleich weit entfernte Coefficienten von $\psi_{m-2r}(x)$ dem absoluten Werte nach einander gleich sind. Damit sind die gesuchten Bedingungen gefunden. F.

---

K. Hensel. Ueber die Gleichungen, mit deren Hülfe man die säcularen Störungen der Planeten bestimmt. J. für Math. CX. 180-183.

Ist $f(x)$ eine ganze Function $n^{\text{ten}}$ Grades von $x$ mit reellen Coefficienten und bedeutet

$$w=u_1x^{n-1}+\cdots+u_n$$

eine ganze Function von $x$ mit unbestimmten Coefficienten; sind ferner $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ solche $n$ ganze Functionen von $x$, welche für den Modul $f(x)$ unter einander linear unabhängig sind, so kann man die $n$ Producte $wx_1$, ..., $wx_n$ für den Modul $f(x)$ als homogene lineare Function von $x_1$, ..., $x_n$, wie folgt, darstellen:

$$wx_i\equiv\sum_{k=1}^{n}U_{ik}^{(1)}x_k,\qquad [f(x)],$$

wo die $n^2$ Coefficienten $U_{ik}^{(1)}$ homogene lineare Functionen von $u_1$, ..., $u_n$ sind. Durch Multiplication mit $w$ folgt leicht nach dem Modul $f(x)$ die Congruenz:

$$w^2x_i\equiv\sum_{k=1}^{n}U_{ik}^{(1)}(wx_k)\equiv\sum_{k,l=1}^{n}U_{ik}^{(1)}U_{kl}^{(1)}x_l\equiv\sum_{l=1}^{n}U_{il}^{(2)}x_l.$$

Bezeichnet man nun durch $w_1$, $w_2$, ..., $w_n$ die $n$ conjugirten Formen, welche man erhält, wenn man in $w$ für $x$ die $n$ conjugirten

Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ substituirt, so ergiebt sich für die Summe der Quadrate von $w_1, \dots, w_n$ der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_{ik}^{(1)} U_{ki}^{(1)};$$

derselbe ist offenbar gleich der Summe von $n^2$ Quadraten, sobald das System der $U_{ik}^{(1)}$ für unbestimmte $u_1, \dots, u_n$ als ein symmetrisches angenommen wird. Diese letztere Bedingung reducirt nun der Verfasser auf die Forderung, dass jenes System der $U_{ik}^{(1)}$ für den besonderen Fall $w = x$ ein symmetrisches ist, und danach ergiebt sich aus einer bekannten einfachen Bemerkung von Jacobi unmittelbar ein Satz, welcher den bekannten Satz über die Realität sämtlicher Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ als besonderen Fall enthält. Ht.

---

A. Cornely. Untersuchungen über involutorische Gleichungssysteme. Diss. Würzburg. 4°.

---

Russian. Die Bestimmung der allgemeinen Auflösungen der algebraischen Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten. Odessa Univ. Nachr. 1892. (Russisch.)

---

F. Lindemann. Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch transcendente Functionen. II. Gött. Nachr. 1892. 292-298.

In einer früheren Note hat der Verfasser gezeigt, wie man die Wurzeln einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades als Functionen des constanten Gliedes dieser Gleichung darstellen kann, ohne dabei andere Operationen zu benutzen, als wie sie auch zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades mittelst elliptischer Modulfunctionen nötig sind (vergl. F. d. M. XVI. 1884. 73). Es kommt bei dieser Auflösungsmethode hauptsächlich darauf an, die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale

$$\zeta = \int \frac{x^s dx}{\sqrt{\varphi(x, u)}} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

zu berechnen, wenn

$$\varphi \equiv x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + u = 0$$

die zu lösende Gleichung und $n = 2p+2$ oder $2p+1$ ist. Es ist in der ersten Note gezeigt, dass diese Berechnung immer ausführbar ist ohne die Kenntnis der Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$. Die Periodicitätsmoduln nämlich genügen einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren singuläre Punkte durch Nullsetzen der Discriminante $\Delta(u)$ der Gleichung $\varphi = 0$ bestimmt sind, und diese Discriminante $\Delta(u)$ ist in $u$ nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Die Aufstellung der erwähnten linearen Differentialgleichung ist die Hauptaufgabe der gegenwärtigen Note; dieselbe wird mittelst invariantentheoretischer Hülfsmittel ausgeführt, wobei die sogenannte typische Gestalt der Form $\varphi$ eine wesentliche Rolle spielt. Es folgt schliesslich die Berechnung von Beispielen für die Fälle $n = 3, 4, 5$.

Ht.

E. Malo. Sur le calcul par approximation des racines des équations numériques. Modification de la formule de Newton. Nouv. Ann. (3) XI. 169-178.

In dem 11. Bande der Časopis (vergl. F. d. M. XIV. 1882. 55) hat Herr Zenger eine Näherungsmethode für die Berechnung der Wurzeln von algebraischen Gleichungen mitgeteilt und einen Ausdruck für die einem Näherungswerte hinzuzufügende Correction angegeben. Mit diesem Ausdruck beschäftigt sich Herr Malo genauer in der vorliegenden Arbeit.

Er zeigt, dass derselbe durch Anwendung der Newton'schen Methode auf diejenige Gleichung erhalten werden kann, welche durch die Substitution $\frac{1}{x}$ für $x$ aus der gegebenen entsteht, und dass er sich von dem Newton'schen Ausdruck nur um kleine Grössen zweiter Ordnung unterscheidet. Der Gedanke, dass die Anwendung einer Näherungsmethode auf irgend eine Gleichung, die man aus der gegebenen erhält, indem man zu jeder Wurzel dieselbe Constante addirt, auch eine brauchbare Correction für die gegebene

Gleichung liefern muss, führt zu dem Schlusse, dass eine in dem erwähnten Ausdrucke auftretende Grösse, wenigstens innerhalb weiter Grenzen, sich beliebig wählen lässt. Man kann nun in jedem einzelnen Falle diesem Parameter stets zwei solche Werte geben, dass der zu dem einen zugehörige Näherungswert die linke Seite der gegebenen Gleichung positiv, der andere sie negativ macht, so dass die Differenz der beiden Näherungswerte sofort eine Fehlergrenze liefert. F.

---

F. J. van den Berg. Over Newton's benaderingsleerwijze voor de oplossing van vergelijkingen. Amst. Versl. en Meded. (3) IX. 53-67.

Ist eine Wurzel einer Gleichung $F(x)=0$ zwischen $a$ und $b$ enthalten, so ist die geometrische Deutung der Näherungswerte

$$x=a-\frac{F(a)}{F'(a)},\quad x=b-\frac{F(b)}{F'(b)}$$

bekanntlich die, dass man den Schnittpunkt $P$ der Curve $y=F(x)$ mit der $X$-Axe durch diejenigen $R$, $S$ der Tangenten ersetzt, die in den Punkten $x=a$ und $x=b$ oder $A$ und $B$ an die Curve gelegt sind. In gleicher Weise ist der Schnittpunkt $Q$ der Secante $AB$ mit der $X$-Axe

$$x=\frac{bF(a)-aF(b)}{F(a)-F(b)}$$

ein Näherungswert für jene Wurzel. Der Verfasser zeigt nun, dass die Distanz $PQ$ mit grosser Annäherung durch die beiden andern $QR$ und $QS$ mittelst der Formel

$$PQ=\frac{QR\{F(a)\}^2+QS\{F(b)\}^2}{\{F(a)-F(b)\}^2}$$

ausgedrückt werden kann. Weil hierin

$$PQ=\frac{bF(a)-aF(b)}{F(a)-F(b)}-x,$$

$$QR=\frac{bF(a)-aF(b)}{F(a)-F(b)}-a+\frac{F(a)}{F'(a)},$$

$$QS=\frac{bF(a)-aF(b)}{F(a)-F(b)}-b+\frac{F(b)}{F'(b)},$$

so erhält man durch Einsetzung dieser Werte für die Wurzel $x$ einen Näherungswert, dessen Fehler weiter untersucht wird.

Mo.

---

A. A. Nijland. Logarithmische Coördinaten. Nieuw Archief XIX. 35-65.

Die Abhandlung fängt an mit einer übersichtlichen Darstellung der von Hrn. R. Mehmke im „Civilingenieur" XXXV veröffentlichten Arbeit „Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen". Bekanntlich kommt diese Methode darauf hinaus, dass die Gleichung in die Form

$$f_1(x) = f_2(x)$$

geschrieben wird, sodass die beiden Seiten keine Zeichenwechsel enthalten, und die logarithmischen Bilder der beiden Curven

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x)$$

construirt werden, indem auf ein beliebig gewähltes Axensystem die correspondirenden Werte von $\log x$ und $\log y$ abgetragen werden. Ist $f_1(x) = ax^n$, so ist das logarithmische Bild eine Gerade. Wird $f_1(x) = ax^n + bx^m$ angenommen, so setze man

$$(1) \qquad y_1 = ax^n, \quad y_2 = bx^m,$$

$$\log y = \log y_1 + \log\left(1 + \frac{y_2}{y_1}\right),$$

construire die logarithmischen Bilder der beiden Curven (1), und der zugehörige Wert von $\log y$ kann sodann auf einfache Weise mittelst der „Additionscurve" gefunden werden, deren Punkte die Coordinaten haben

$$\xi = \log z, \quad \eta = \log\left(1 + \frac{1}{z}\right),$$

wenn $z$ alle Werte durchläuft. Indem man $\xi = \log y_1 - \log y_2$ annimmt, erhält man sodann

$$\log y = \log y_1 + \eta.$$

Die skizzirte Methode leistet ersichtlich die Auflösung der beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. Allgemeiner wird nun das Problem behandelt, zwei beliebige Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen oder das logarithmische Bild einer beliebigen algebraischen Curve zu construiren. Zunächst

werden zwei specielle Fälle erörtert. 1. Es sei die gegebene Gleichung von der Form $y^n f(x) = \varphi(x)$. Setzt man nun $y_1 = f(x)$, $y_2 = \varphi(x)$, und construirt die logarithmischen Bilder dieser Curven, so ist aus $n \log y = \log y_2 - \log y_1$ leicht der jedem Werte von $\log x$ zugehörige Wert von $\log y$ zu finden. Anwendung dieser Principien auf die Gleichung $y^n = px^n$ und auf diejenige der Ellipse, Hyperbel, Cissoide und Hypocykloide. 2. Die Gleichung zwischen $x$ und $y$ sei in Bezug auf $y^n$ vom zweiten Grade. Als Beispiel wird das logarithmische Bild der allgemeinen Gleichung zweiten Grades construirt.

Hat die gegebene Gleichung die allgemeine Form

$$ax^m y^n + bx^p y^q + \cdots = 0,$$

so construire man zuerst das logarithmische Bild der Curve $ax^m y^n = \alpha$, wofür sich eine Gerade ergiebt. Die Gleichung $ax^m y^n + bx^p y^q = \beta$ wird sodann in die beiden andern zerlegt

$$ax^m y^n = \alpha \quad \text{und} \quad bx^p y^q = \beta - \alpha,$$

wo $\alpha$ eine beliebige veränderliche Grösse ist. Das logarithmische Bild einer jeden dieser Gleichungen besteht aus einem System paralleler Geraden, und die gesuchte Curve ergiebt sich aus den Schnittpunkten correspondirender Geraden der beiden Systeme. Als Beispiel wird das Cartesische Folium und die Cissoide verwendet. In ähnlicher Weise behandelt der Verfasser Gleichungen mit mehr als zwei Gliedern. Mo.

---

R. Mehmke. Ueber das Seidel'sche Verfahren, um lineare Gleichungen bei einer sehr grossen Anzahl der Unbekannten durch successive Annäherung aufzulösen. Mosk. Math. Samml. XVI. 4 S.

R. Mehmke und P. A. Nekrassoff. Auflösung eines linearen Systems von Gleichungen durch successive Annäherung. Mosk. Math. Samml. XVI. 23 S.

Um die Convergenz des Seidel'schen Verfahrens [cf. F. d. M. VI. 1874. 147] zu beschleunigen, zerlegt Herr Mehmke das ganze Gleichungssystem in Gruppen von zwei oder drei Gleichungen und bestimmt die Verbesserungen von zwei resp. drei Unbekannten so,

dass die Gleichungen einer Gruppe erfüllt werden. Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten lassen sich vorteilhaft durch ein ursprünglich von Hrn. van den Berg herrührendes graphisches Verfahren auflösen.

In dem Briefwechsel zwischen den Herren Mehmke und Nekrassoff handelt es sich im wesentlichen um die Aufsuchung von Convergenzbedingungen für das Seidel'sche Verfahren. Herr Nekrassoff hat solche Bedingungen zunächst aufgestellt, Herr Mehmke hat sie sodann verallgemeinert und bewiesen. Nennt man die Werte, welche die linken Seiten der auf Null gebrachten Gleichungen annehmen, wenn man für die Unbekannten Näherungswerte einsetzt, die „Widersprüche" der Gleichungen, so ging Seidel darauf aus, die Summe der Quadrate der Widersprüche möglichst klein zu machen, während Herr Mehmke statt dessen die Summe der absoluten Beträge der Widersprüche ins Auge fasst und die Bedingungen ermittelt, denen die Coefficienten der gegebenen Gleichungen genügen müssen, damit diese letztere Function bei jeder Correction einen kleineren Wert annehme. F.

---

R. Fujisawa. Notes on an algebraic problem. Tokio Math. Ges. V. 80-82.

Lösung eines Systems von fünf Gleichungen. Lp.

---

A. Klingatsch. Ueber die geometrische Lösung eines Systems linearer Gleichungen. Monatsh. f. Math. III. 169-177.

Die Auflösung eines Systems von $n$ Gleichungen mit $n$ Unbekannten

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i = u_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

wird auf die folgende Aufgabe zurückgeführt:

Es seien gegeben Sinn und Grösse der Kräfte, welche $n$ ebene Kräfte-Systeme

$$a_{k1}, \ldots, a_{kn} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

bilden, sowie die statischen Momente $u_k$ der Systeme in Bezug

auf einen beliebigen Punkt der Ebene; die Lage der $n$ Wirkungslinien der Kräftesysteme zu bestimmen.

Diese Aufgabe lässt sich auf graphostatischem Wege lösen.

F.

---

Chr. Nehls. Graphische Darstellung der Coefficienten algebraischer Gleichungen und der Näherungswerte von Kettenbrüchen. Hamb. Mitt. II. 139-157.

Anleitung, aus den $n$ Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ einer Gleichung $f(x)=0$ ihre Coefficienten graphisch zu finden; ferner umgekehrt, aus den gegebenen Coefficienten und einer gegebenen Wurzel $r_n$ die Division $f(x)/(x-r_n)$ auszuführen; die imaginären Wurzeln machen auch die Heranziehung quadratischer Factoren notwendig. Ein ähnliches Verfahren führt zur Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen.

R. M.

---

A. P. Rudzki. Ueber eine Klasse transcendenter Gleichungen. Prace mat.-fiz. III. 69-81. (Polnisch.)

Der Verfasser untersucht die transcendente Gleichung $I_m=0$, wo $I_m$ die Bessel'sche Function

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2i}}{\Gamma(i+1)\Gamma(m+i-1)}$$

bedeutet. Die Wurzeln dieser Gleichungen wurden schon von Poisson untersucht. Im XXXIII. Bande der Mathematischen Annalen hat Herr Hurwitz denselben Gegenstand in der Abhandlung: „Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Functionen" behandelt. Die Methode des Verfassers bezieht sich auf einen speciellen Fall. Für $m>-1$ ist nämlich die Bessel'sche Function gleich

$$\frac{x^m}{2^m\Gamma(m+1)}\varphi_m(\Theta),$$

wo

$$\Theta=\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

$$\varphi_m=1-\frac{\Theta}{m+1}+\frac{\Theta^2}{1.2(m+1)(m+2)}-\cdots.$$

Für diesen Fall kann man aus der Gleichung $\varphi_m = 0$ alle Wurzeln der Gleichung $I_m = 0$ (von der mehrfachen Wurzel $x = 0$ abgesehen) berechnen. Es werden nun solche Functionen $\varphi_m$ untersucht, wo $m$ eine positive Zahl ist. Der Verfasser zeigt, wie die Wurzeln der Gleichungen

$$I_{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad \varphi_{n+\frac{1}{2}} = 0,$$

($n$ ganz und positiv) aus denen der Gleichung

$$\frac{X_n}{X_n'} - \operatorname{cotg} x = 0$$

gefunden werden können. Es ist hier:

$$X_n = 1 - \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_4}{4!}x^4 - \cdots,$$

$$X_n' = x - \frac{A_3}{3!}x^3 + \frac{A_5}{5!}x^5 - \cdots,$$

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_{i+1} = \frac{2(n-1)}{2n-1}A_i.$$

Dn.

---

C. Brun. Approximativ Beregning af de reelle Rödder i den logarithmiske Ligning af 1ste Grad. Nyt Tidss. for Math. III B. 1-10.

Es werden Methoden entwickelt, welche dazu dienen, die reellen Wurzeln der Gleichungen

$$\log y + ay = k$$

approximativ zu berechnen. Diese Gleichung hat praktische Bedeutung für die Construction der Dampfmaschinen. V.

---

E. Marx. Einiges aus dem mathematischen Unterricht in Prima. Pr. (No. 658) Gymn. Friedland i. M. 19 S. 4°.

Verfasser hält zur Einübung der Tafel der natürlichen trigonometrischen Zahlen die Anwendung derselben auf algebraische Rechnungen besonders geeignet und zeigt dies zunächst an einer wohl nicht allgemein bekannten Auflösungsart der reciproken Gleichung zweiten Grades. Bei der Identificirung der Gleichungen $x^2 + ax - 1 = 0$ mit $\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} - 1 = 0$ und $x^2 + ax + 1 = 0$

mit $\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\sin 2\alpha} + 1 = 0$ haben die Schüler $2\alpha$ und dann $x$ in jener Tafel aufzusuchen, worin die Uebung gelegen ist. Des weiteren werden einige Aufgaben über die Berechnung von Kreisstücken vorgeführt und dabei die Anwendung der regula falsi gelehrt. Lg.

---

# Capitel 2.

## Theorie der Formen (Invariantentheorie).

A. Cayley. On reciprocants and differential invariants. Quart. J. XXVI. 169-194.

Die Arbeit verfolgt einen wesentlich praktischen Zweck. Die von Halphen und Sylvester bei Gelegenheit ihrer allgemeinen Untersuchungen über Differentialinvarianten und Reciprocanten als Musterbeispiele aufgeführten Bildungen werden hier auf kürzere und zum Teil sehr elegante Art abgeleitet.

Es sei etwa auf die Differentialinvariante hingewiesen, deren Verschwinden die Differentialgleichung eines allgemeinen Kegelschnitts liefert. My.

---

Rabut. Sur les invariants universels. C. R. CXV. 926-929.

In dieser Note ist die Rede von Differentialausdrücken, die jeder Punkt- (resp. Berührungs)-Transformation gegenüber, also auch gegenüber jeder Gruppe von solchen invariant bleiben.

Es werden eine Reihe von Typen solcher Ausdrücke aufgeführt. Dahin gehört z. B. das Doppelverhältnis der Richtungen von vier Curvenzweigen, ferner das Verhältnis der Krümmungsdifferenzen für drei sich in erster Ordnung berührende Curvenzweige etc.

Man kann neben den „absoluten“ Invarianten auch noch „halbabsolute“ und „relative“ definiren. My.

---

A. Tresse. Sur les groupes infinis de transformations. C. R. CXV. 1003-1006.

A. Tresse. Sur les développements canoniques en séries, dont les coefficients sont les invariants différentiels d'un groupe continu. C. R. CXIV. 1256-1258.

Die erste Note enthält eine Bemerkung über die Transformation einer beliebigen Mannigfaltigkeit im mehrdimensionalen Raume durch die Substitutionen einer continuirlichen Transformationsgruppe.

In der zweiten Note zeigt der Verfasser, wie sich die Potenzreihenentwickelung zur Aufstellung von Differentialinvarianten verwerten lässt. Sind

$$z_i = z_i^0 + \sum^k a_{ik}(x_k - x_k^0) + \cdots \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

die Gleichungen einer Mannigfaltigkeit, und wird die mittels der Substitutionen einer continuirlichen Gruppe transformirte Mannigfaltigkeit durch die Gleichungen

$$z'_i = z'^0_i + \sum^k a'_{ik}(x'_k - x'^0_k) + \cdots \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

dargestellt, so ist eine Differentialinvariante eine solche Function der $x^0$ und der Coefficienten $a$, welche sich nicht ändert, wenn man für diese Grössen die gestrichenen Grössen $x'^0$, $a'$ einsetzt. Der Verfasser stellt dann den folgenden Satz auf: Wenn man über die willkürlichen Parameter der Transformationen der continuirlichen Gruppe derart verfügt, dass eine gewisse Anzahl von den Grössen $x'^0$ und $a'$ feste Werte erhält, so sind die dann entstehenden Ausdrücke für die übrigen $a'$, als Function von $x^0$ und $a$, Differentialinvarianten der Gruppe. Der Satz wird an einigen Beispielen erläutert. Ht.

---

P. Rivereau. Sur les invariants de quelques équations différentielles. Journ. de Math. (4) VIII. 233-268.

Der Verf. unterwirft eine Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

Substitutionen von der Form:

$$y = \eta u(x) + v(x), \quad \frac{d\xi}{dx} = \mu(x),$$

wo $\xi$, $\eta$ die neuen Variabeln bedeuten und $u$, $v$, $\mu$ beliebige Functionen von $x$ sind. Eine solche Substitution ändert bekanntlich die Form der Differentialgleichung nicht.

Die Herren Appell und Elliott haben sich derartiger Substitutionen bedient, um eine Reihe von Differentialgleichungen auf einfachere Gestalt zu bringen, indem einzelne der neuen Coefficienten verschwinden oder einander gleich werden etc., wodurch die Functionen $u$, $v$, $\mu$ näher bestimmt werden, während die übrigen Coefficienten zu absoluten Invarianten werden. Der Verf. zeigt, dass es in vielen Fällen zweckmässiger ist, zu verlangen, dass neben einzelnen Coefficienten gewisse Invarianten der Gleichung numerische Werte annehmen, und führt die entsprechenden Rechnungen im einzelnen durch. My.

D. Hilbert. Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. II, III. Gött. Nachr. 1892. 6-16, 439-449.

Der Verf. vervollständigt hier seine eingehenden Untersuchungen über die Eigenschaften desjenigen Functionenkörpers, welcher aus den sämtlichen Invarianten einer Grundform oder eines Grundformensystems besteht (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 113).

Durch Combinirung mit den Cayley-Sylvester'schen Abzählungssätzen lässt sich die Möglichkeit einer typischen Darstellung einer binären Grundform allgemein angeben. Das nämliche Verfahren führt zu einem rein zahlentheoretischen Beweise (der keinerlei Elimination benutzt) des fundamentalen Satzes, dass es notwendig $n-2$ Invarianten geben muss, zwischen denen keine algebraische Relation besteht.

Das Weitere beschäftigt sich mit der Aufstellung von ausführbaren Methoden, um für gegebene Grundformen ein System von Invarianten aufzustellen, durch welche sich alle andern ganz und algebraisch ausdrücken lassen (denn diese Aufgabe ist vor allem zu lösen, um an die Aufstellung eines „vollen Systems“ von Invarianten herangehen zu können).

Für eine binäre Grundform genügen schon blosse Resultantenbildungen dazu, und von hier aus gelangt man auch, durch wiederholte Anwendung des Aronhold'schen Processes, zur Lösung der Aufgabe für zwei binäre Grundformen der nämlichen Ordnung.

Für höhere Grundformen bedarf es dagegen tiefer liegender Mittel.

Die gemeinte Aufgabe lässt sich etwa für eine ternäre Form $f$ präcisiren wie folgt:

Die Form $f$ möge bestimmte numerische Coefficienten besitzen; es soll entschieden werden, ob es noch eine Invariante giebt, welche für die vorgelegte besondere Grundform von Null verschieden ist.

Die Antwort fällt theoretisch sehr einfach aus: man transformire $f$ vermöge einer linearen Substitution mit unbestimmten Coefficienten $\alpha$; $f$ wird dann und nur dann eine von Null verschiedene Invariante besitzen, wenn die Substitutionsdeterminante der $\alpha$ eine ganze algebraische Function der Coefficienten der linear transformirten Form ist.

Es lassen sich aber auch endliche und von vornherein übersehbare Processe angeben, welche hierüber entscheiden.

Aus diesen Entwickelungen lässt sich ferner eine (nur von der Ordnung von $f$ abhängige) obere Grenze für das Gewicht der Invarianten entnehmen, von denen alle übrigen ganze algebraische Functionen sind.

Es werden nunmehr noch genauer die sogenannten „Nullformen“ untersucht, das sind eben solche, deren Invarianten sämtlich verschwinden.

Solche Nullformen lassen sich auch dahin charakterisiren, endlich zu bleiben bei Anwendung gewisser linearer Substitutionen von unendlich grosser Determinante; sie lassen sich in Folge dessen in eine einfache kanonische Gestalt bringen.

Die Aufgabe, sämtliche ternäre kanonische Nullformen der $n^{ten}$ Ordnung aufzustellen, führt auf die Lösung einer diophantischen Gleichung.

Beispielsweise giebt es für $n = 4$ nur zwei wesentlich verschiedene Nullformen, die geometrisch einer $C_4$ mit dreifachem Punkt resp. einer $C_3$ nebst einer ihrer Wendetangenten entsprechen.

Für eine Nullform verschwinden auch alle Ableitungen der Invarianten nach den Coefficienten (bis zu einer gewissen Ordnung), woraus man wieder wichtige Folgerungen ziehen kann. My.

---

D. Hilbert. Ueber volle Invariantensysteme. Deutsche Math.-Ver. I. 61-62.

Aus dem Systeme der (ganzrationalen) Invarianten einer binären Form $f$ $n^{\text{ter}}$ Ordnung lassen sich, wie der Verf. schon früher gezeigt, $n-2$ Invarianten $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ derart auswählen, dass jede andere Invariante von $f$ eine ganze algebraische Function der $J$ wird.

Der hiermit bestimmte algebraische Functionenkörper besitze den Grad $g$; die Grade der $J$ seien resp. mit $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ bezeichnet.

Dann lässt sich der Quotient $\dfrac{g}{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n}$ als eine verhältnismässig einfache zahlentheoretische Function von $n$ darstellen.

Der Beweis wird angedeutet.

Man erkennt, wie es hierdurch gelingt, über die allgemeinen Endlichkeitssätze hinaus ein Gesetz für die Gradzahlen der Invarianten und des durch die Invarianten bestimmten Functionenkörpers zu finden. My.

---

H. S. White. A symbolic demonstration of Hilbert's method for deriving invariants and covariants of given ternary forms. American J. XIV. 283-290.

Clebsch, Gordan und Mertens haben sich bereits der Ausübung gewisser Differentiationsprocesse auf willkürliche homogene isobare Formen bedient, um invariante Bildungen eines Systems von Grundformen zu erzeugen. Hr. Hilbert hat die eigentliche Tragweite dieses Verfahrens erkannt und dasselbe für seine Endlichkeitsbeweise mit grossem Erfolge verwertet.

Der Verf. legt hier das gemeinte Verfahren dar unter Anwendung symbolischer Rechnung, was die Entwickelung nicht nur ver-

einfacht, sondern vor allem den invarianten Charakter der Endbildungen sofort hervortreten lässt.

Aus seiner Darstellung leitet der Verf. noch den Satz ab: Wenn sich eine Form vermöge linearer Transformation der Variabeln stets bis auf Vielfache der Grundformen reproducirt, so kann sie durch Hinzufügung weiterer Vielfachen der Grundformen in eine Covariante des Systems umgewandelt werden. My.

---

J. Deruyts. Sur les formes algébriques à particularité essentielle. Belg. Bull. (3) XXIII. 152-167.

Ein System von Grundformen $f_1$, $f_2$, ... heisst ein „wesentlich particuläres“, wenn zwischen den Coefficienten der Formen ganze, homogene, algebraische Relationen $g = 0$, $g' = 0$, ... bestehen, die von der linearen Transformation der Variabeln unabhängig sind.

Wie der Verf. früher gezeigt, führt dieser Umstand nicht etwa zu neuen invarianten Bildungen der $f$, sondern hat nur zur Folge, dass einzelne der im allgemeinen bestehenden invarianten Bildungen identisch verschwinden. Daher wird die Anzahl der linear unabhängigen Bildungen von gegebenen Gradzahlen eine andere: dieselbe wird ähnlich wie im allgemeinen Falle bestimmt, nur dass jetzt die Relationen $g = 0$, $g' = 0$, ... zu berücksichtigen sind.

Als eine Anwendung erscheint u. a. ein neuer Beweis der vom Verf. herrührenden Ausdehnung des Hermite'schen Reciprocitäts-Satzes auf zerlegbare Formen. My.

---

J. Deruyts. Sur certaines substitutions linéaires. Belg. Bull. (3) XXIII. 102-110.

Indem sich der Verf. solcher Substitutionen bedient, welche die Coefficienten $a$ gegebener Grundformen in primäre Covarianten $A$ des Systems überführen, gelingt es ihm, die Hermite'sche Theorie der associirten Formen auf seine primären Covarianten zu übertragen. So entsteht z. B., wenn man in einem Leitgliede jeden Coefficienten $a$ durch die entsprechende Form $A$ ersetzt, bis

auf Potenzen gewisser invarianter Bildungen als Factoren, eine primäre Covariante. My.

J. Deruyts. Sur la réduction la plus complète des fonctions invariantes. Belg. Bull. (3) XXIII. 286-293.

Die Formentheorie des Verf. stützt sich hauptsächlich auf die Zurückführung aller invarianten Bildungen auf solche von besonders einfacher Art, dies sind die „primären Covarianten": aus ihnen gehen alle übrigen durch Additionen und (auf die Variabeln bezügliche) Differentiationen hervor.

Es wird hier gezeigt, dass in diesem Sinne eine weitere Reduction nicht möglich ist, dass also die primären Covarianten in der That als die Urelemente der Invariantentheorie anzusehen sind. My.

J. Deruyts. Sur la réduction des fonctions invariantes dans le système des variables géométriques. Belg. Bull. (3) XXIII. 558-571.

Clebsch hat bekanntlich in die Formentheorie die „Zwischencoordinaten" $p_{ik}$, $p_{ikl}$, ... eingeführt, d. h. die Coordinaten der in einem linearen Raume von $n$ Dimensionen existirenden linearen Mannigfaltigkeiten. In der allgemeinen Theorie des Verf. werden diese Zwischencoordinaten stets auf Punktcoordinaten zurückgeführt; bei manchen geometrischen Aufgaben ist es indessen zweckmässig, die Zwischencoordinaten beizubehalten. Es entsteht dann wiederum die Frage, auf welche einfachsten Elemente sich alle invarianten Bildungen zurückbringen lassen. Dies gelingt in der That durch „reducirte" Formen, die aus den „primären Covarianten" durch gewisse Differentiationsprocesse ableitbar sind, im übrigen aber nicht so einfachen partiellen Differentialgleichungen genügen, wie die primären Covarianten. My.

W. E. Story. On an operator that produces all the covariants and invariants of any system of quantities. Lond. M. S. Proc. XXIII. 265-272.

Diese Arbeit steht in naher Beziehung zu den Untersuchungen der Herren Deruyts (den der Verf. nicht kennt) und Hilbert.

Der Begriff „isobar“ wird wie bei Deruyts verallgemeinert.

Liegt nämlich eine Form $m^{ter}$ Ordnung in $n$ Variabeln vor, deren einzelnes Glied laute: $N x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n} C_{a_1 a_2 \ldots a_n}$, wo $N$ der Polynomialcoefficient, $C$ der eigentliche Coefficient sei, so wird $C$ bezüglich jeder Variabeln, z. B. $x_i$, das „Gewicht“ $m - a_i$ beigelegt, ferner jeder Variabeln in Bezug auf sich selber das Gewicht 1, in Bezug auf jede andere Variable das Gewicht 0. Hat man nun irgend ein Polynom, dessen Glieder hinsichtlich jeder einzelnen Variabeln jeweils das nämliche Gewicht besitzen (während die Gewichte hinsichtlich der verschiedenen Variabeln verschieden sein können), so heisst das Polynom „isobar“.

Den Ausgangspunkt bildet (wiederum wie bei Deruyts) der Satz, dass die allgemeine lineare Substitution von $n$ Variabeln aus zweierlei besonders einfachen Substitutionen zusammensetzbar ist; einmal aus solchen, wo nur eine einzelne Variable $x_i$ verändert wird, nämlich in $ax_i$, zweitens aus solchen, wo wiederum nur $x_i$ sich ändert, aber in $x_i + bx_k$.

Eine homogene Function $\varphi$ der Coefficienten und Variabeln (von gewissen Grundformen), die sich bei einer Substitution der zweiten Art nicht ändert, heisst bei den englischen Autoren eine „Differentiante“ bez. $(x_i, x_k)$.

Das Kriterium dafür, dass $\varphi$ eine Differentiante ist, wird durch die bekannte partielle Differentialgleichung $D_{ik}\varphi = 0$ geliefert.

Eine isobare Form $\varphi$, die hinsichtlich aller Combinationen $(x_i, x_k)$ Differentiante ist, ist als eine Covariante des Systems charakterisirt.

Erstrecken sich dagegen die Combinationen $(x_i, x_k)$ nur auf einen Teil der Variabeln, etwa $x_1, x_2, \ldots, x_k$, so heisst $\varphi$ eine „vollständige Differentiante“ bez. der $k$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Mit Hülfe der Differentialausdrücke $D_{ik}$ wird nun ein symbolisches Polynom $[x_1, x_2, \ldots, x_k; x_l]$ construirt mit der Operations-Eigenschaft, irgend eine allseitig isobare vollständige Diffe-

rentiante bez. der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_k$ in eine ebensolche bez. der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_l$ zu verwandeln, mit den nämlichen Zahlen für Gewicht, Grad und Ordnung. Endlich wird durch geeignete Aufeinanderfolge solcher Processe $[x_1, x_2, \ldots, x_k; x_l]$ ein Operator hergestellt, der aus einer allseitig isobaren und homogenen Form $\varphi$ stets eine Covariante des Systems (mit den nämlichen Gewicht-, Grad- und Ordnungszahlen) erzeugt, und zwar die allgemeinste ihrer Art, wenn $\varphi$ die allgemeinste Form ihrer Art war.

Bei seinem Beweise des ersten Endlichkeitssatzes (vgl. F. d. M. XXI. 1890. 133) bediente sich Hr. Hilbert eines ähnlichen Operators, ohne denselben so eingehend zu untersuchen, wie hier der Verf. den seinigen. My.

F. Mertens. Ueber die Anwendung der Theorie der symmetrischen Functionen auf die Deduction eines vollständigen Systems invarianter Gebilde binärer Formen. Krak. Abh. XXII. 141-171. (Polnisch.)

Es wird zuerst die allgemeine Form eines ganzen invarianten Gebildes linearer Formen aufgestellt, und gezeigt, wie die Bestimmung der allgemeinen Form ganzer invarianter Gebilde einer Form $n^{\text{ten}}$ Grades auf die Bestimmung der invarianten Gebilde linearer Formen zurückgeführt werden kann. Ist die Form $n^{\text{ten}}$ Grades

$$f = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n,$$

und ersetzt man in dem invarianten Gebilde $\Theta$ derselben die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, entsprechend durch $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ [diese letzten Grössen sind die Coefficienten der durch Multiplication linearer Formen

$$p = p_1 x_1 + p_2 x_2, \quad q = q_1 x_1 + q_2 x_2, \quad \ldots, \quad s = s_1 x_1 + s_2 x_2$$

entstandenen Gleichung

$$pq \ldots s = \omega_0 x_1^n + \omega_1 x_1^{n-1} x_2 + \omega_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots + \omega_n x_2^n],$$

so geht $\Theta$ in ein ganzes invariantes Gebilde $\Theta_0$ der Formen $p, q, \ldots, s$ über, welches in Bezug auf die Coefficienten derselben homogen, in Bezug aber auf die Variabelnpaare $(p_1 p_2), (q_1 q_2), \ldots, (s_1 s_2)$ sym-

metrisch ist. Umgekehrt also kann aus $\Theta_0 = F(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ das gesuchte $\Theta = F(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ erhalten werden. Die Methode der Bestimmung eines allgemeinsten invarianten Gebildes $\Theta_0$ wird gezeigt und seine Form aufgestellt. Es wird dann diese Methode auf die Formen zweiten, dritten und vierten Grades angewandt, und die bekannten Invariantensysteme dieser Formen werden abgeleitet. Dn.

---

W. F. Osgood. The symbolic notation of Aronhold and Clebsch. American J. XIV. 251-261.

W. F. Osgood. The system of two simultaneous ternary quadratic forms. American J. XIV. 262-273.

Der Verf. setzt die Grundregeln der symbolischen Bezeichnungen und Rechnungsregeln in der binären und ternären Invariantentheorie in möglichst fasslicher Gestalt auseinander. Als Anwendung wird die Gordan'sche Aufstellung des vollen Systems zweier ternären quadratischen Formen mit zweckmässigen Modificationen wiedergegeben.

Die Entwickelungen sind zur Einführung amerikanischer Leser in die Theorie bestimmt. My.

---

P. Gordan. Bestimmung einer binären Form aus Anfangsgliedern ihrer Covarianten. Math. Ann. XL. 503-526.

Der Inhalt der Arbeit kann aus dem Titel nur unvollkommen erraten werden.

Den Mittelpunkt des Ganzen bildet ein merkwürdiges System von Gleichungen, das in ebensoviel Unbekannten quadratisch ist; durch eigenartige Operationen gelingt es jedoch, das gegebene System in ein anderes, äquivalentes überzuführen, das in den Unbekannten nur noch linear ist. (Derartige Gleichungssysteme sind übrigens neuerdings mehrfach hervorgetreten.) Das vorliegende System steht zu einer Reihe bedeutungsvoller Fragen der Invariantentheorie binärer Formen in inniger Beziehung.

Als nächstliegender Ausgangspunkt mag folgender dienen. Bekanntlich lassen sich in unendlich mannigfaltiger Art Systeme

von associirten Formen einer binären Grundform $f(x)$ aufstellen, derart, dass jede Covariante von $f$ rational durch die associirten Formen eines Systems ausdrückbar ist.

Unter eben diesen Systemen zeichnen sich zwei dadurch aus, dass die gemeinte rationale Darstellung nur durch eine Potenz von $f$ zu einer eigentlich rationalen wird und also, abgesehen von einer solchen Potenz, eine ganzrationale ist.

Das eine der beiden Systeme besteht aus den schon von Hermite untersuchten „Schwesterformen“ $G$. Dieselben treten bereits in der elementaren Gleichungstheorie auf: bringt man nämlich eine allgemeine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades $f(x) = 0$ in bekannter Weise auf die Form, in der der zweite Coefficient verschwindet, so sind die übrigen Coefficienten geradezu die Leitglieder der Schwesterformen $G$.

Das zweite ausgezeichnete System associirter Formen entspringt unmittelbar aus dem Begriffe der Ueberschiebung; es sind die geraden Ueberschiebungen von $f$ über sich selbst nebst deren Functionaldeterminanten mit $f$: es heisse das System der Formen $J$.

Während sich die Darstellung einer Covariante durch die $G$ nach Hermite sehr einfach und elegant vollzieht, fehlte bisher die Kenntnis eines entsprechenden allgemeinen Gesetzes für die $J$, da sich die bei Clebsch und Gundelfinger vorhandenen Ansätze doch nur auf eine successive und praktische Berechnung der $G$ aus den $J$ beschränken.

Diese Hauptfrage, eine allgemeine Darstellung der $G$ durch die $J$, reducirt der Verf. auf eine einfachere. Man weiss nämlich, in welchen Productcombinationen die $J$ auftreten, und braucht daher nur die numerischen Factoren $C$ zu ermitteln, mit welchen jene Producte behaftet sind.

Um noch eine weitere Aufgabe anzuführen, die ebenfalls auf die Bestimmung der $C$ hinausläuft: „Man soll die Coefficienten von $f$ durch die Leitglieder der $J$ ausdrücken“; eben dieser Umstand hat den Titel der Abhandlung veranlasst.

Die hierbei aufzulösenden Bestimmungsgleichungen zwischen den $C$ sind eben von der Eingangs erwähnten Art.

In einer Reihe besonderer Fälle werden die Zahlwerte der $C$ wirklich berechnet. My.

---

C. H. Chapman. An illustration of the direct computation of an invariant. Johns Hopkins Univ. Circ. XI. 41-42.

Die Aufstellung der allgemeinsten Invariante einer binären Form kann man von der Auflösung einiger partieller Differentialgleichungen abhängig machen. In den einfachsten Fällen lassen sich jedoch jene partiellen Differentialgleichungen durch eine einzige totale ersetzen. Dies wird hier für eine quadratische Form entwickelt. My.

E. McClintock. On the computation of covariants by transvection. American J. XIV. 222-229.

Der Verf. stellt praktische Regeln auf, um irgend eine Ueberschiebung zweier Covarianten einer binären Form explicit auszurechnen. Es empfiehlt sich, vorerst nur den ersten Coefficienten der neuen Form zu ermitteln und hieraus, durch Combinirung eines bekannten Gesetzes mit einer zweckmässigen tabellarischen Anordnung, die weiteren Coefficienten. My.

A. Cayley. On seminvariants. Quart. J. XXVI. 66-69.

Der Verf. führt zunächst eine eigentümliche Unterscheidung ein zwischen strengen (sharp) und nicht strengen Seminvarianten (Leitgliedern von Covarianten) bei vorgegebenem Gewicht.

Sei etwa das Gewicht gleich acht: die Elemente der Seminvarianten seien mit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$ bezeichnet. Man ordne die Glieder einer Seminvariante nach abnehmender Höhe der Indices.

Dann sind z. B. Seminvarianten, wie

$$a_8 \pm \dots a_4^2, \quad a_2 a_6 \pm \dots a_2 a_3^2$$

strenge, da das Endglied $a_4^2$ resp. $a_2 a_3^2$ ein Anfangsglied bedingt, das mindestens den Index 8 resp. 6 aufweisen muss. Hingegen ist eine lineare Combination der beiden

$$a_8 \pm \dots a_2 a_3^2$$

eine nicht strenge, da der Index des Anfangsgliedes höher ist, als er nach dem Endgliede zu sein braucht.

Hierauf gestützt, beweist der Verf. an einem Beispiel, dass es nicht immer möglich ist, eine strenge Covariante durch blosse Ueberschiebung aus Formen von nächst niedrigerem Grad abzuleiten.

Der Verf. will damit offenbar eine irrige Annahme entkräften, die sich ein Leser der betreffenden Entwickelungen des bekannten Buches von Clebsch leicht bilden könnte. My.

---

A. Cayley. Corrected seminvariant tables for the weights 11 and 12. American J. XIV. 195-200.

Die im American J. VII. (1885) von Hrn. Cayley aufgestellte Liste von Seminvarianten erschien (wenigstens für die Gewichte 11 und 12) einer Verbesserung bedürftig, sowohl in der Anordnung, als auch darin, dass statt dort benutzter Bildungen lineare Combinationen derselben eintreten. My.

---

E. B. Elliott. A proof of the exactness of Cayley's number of seminvariants of a given type. Lond. M. S. Proc. XXIII. 298-304.

Der schon seit langer Zeit von Hrn. Cayley aufgestellte Satz sagt aus, dass die Anzahl der linear unabhängigen Seminvarianten mit den Gradzahlen $w$, $i$, $n$ gleich der Differenz $(w; i, n)-(w-1; i, n)$ ist, wo das Symbol $(w; i, n)$ die Anzahl der Teilungen von $w$ in $i$ oder weniger Summanden bedeutet, von denen keiner die Zahl $n$ überschreitet.

Sylvester hat später den Satz verschiedentlich bewiesen, streng indessen nur für die Fälle, wo die Differenz $in-2w$ positiv, resp. Null, resp. $-1$ ist.

Die damit gekennzeichnete Lücke wird hier dadurch ausgefüllt, dass eine von Cayley und Sylvester benutzte symbolische Identität zwischen gewissen invarianten Differentiationsprocessen in geeigneter Weise verallgemeinert wird. My.

---

E. d'Ovidio. Di alcuni invarianti simultanei, e in particolare del risultante di due forme binarie degli ordini 6° e 3°. Torino Atti XXVIII. 20-23.

Zunächst werden diejenigen Invarianten des vollen Systems einer binären Form $f$ sechster und einer anderen dritter Ordnung ermittelt, die bei einer typischen Darstellung der Resultante von $f$ und $\varphi$ überhaupt in Betracht kommen können.

Alsdann wird die Resultante als ganze Function dieser Invarianten mit unbestimmten Zahlcoefficienten angesetzt, und die letzteren werden aus linearen Gleichungen bestimmt.

So ergiebt sich schliesslich ein verhältnismässig einfacher Ausdruck für die Resultante, in den nur elf simultane Invarianten eingehen. My.

---

E. d'Ovidio. Teorema sulle forme algebriche, con applicazione alle binarie di sesto ordine. Palermo Rend. VI. 225-233.

E. d'Ovidio. Formole relative alla formola binaria del sest' ordine. Torino Atti XXVII. 535-563.

E. d'Ovidio. Nuove sizigie per la forma binaria del sest' ordine ottenute con l'operazione di Aronhold. Torino Atti XXVIII. 118-133.

Der Verf. veröffentlicht hier die Früchte sorgfältiger Vorarbeiten für eine möglichst vollständige Kenntnis von Syzygien zwischen den Formen des vollen Systems einer binären Form $f$ sechster Ordnung. Einmal werden sämtliche Ueberschiebungen je zweier Formen des Systems durch diese Formen ausgedrückt. Sobald der umfangreiche Complex dieser Formeln gewonnen ist, kann man mit Hülfe der bekannten Clebsch-Gordan'schen Identitäten zwischen Ueberschiebungen von drei, vier u. s. w. Formen eine unbegrenzte Menge von Syzygien sofort hinschreiben.

Eine zweite Methode besteht, im Anschlusse an Gordan, in der (ev. wiederholten) Anwendung des Aronhold'schen Processes und damit verknüpfter Identitäten, wobei der Umstand, dass die Coefficienten der fraglichen Formen nicht unabhängig von einander sind, Schwierigkeiten verursacht.

Auf die Frage nach einem „vollen Systeme von Syzygien" wird nicht eingegangen. My.

E. McClintock. On lists of covariants. New York M. S. Bull. I. 85-91.

Zur Bezeichnung der Invarianten und Covarianten bei den binären Formen fünften und sechsten Grades wird vorgeschlagen: $5_n$ und $6_m$, wo der Index das Gewicht des ersten Terms oder der „Quelle" einer Grundform bezeichnet. Diese Art der Bezeichnung wird bei den Formen fünften Grades in einer Tabelle mit den Zeichen von Cayley, Salmon, Clebsch, Gordan, Faà de Bruno und Sylvester zusammengestellt. Während dieses System von Grundformen bei Cayley vollständig berechnet und abgedruckt ist, fehlt eine gleiche Uebersicht für die Formen sechsten Grades. Von den 26 Grundformen derselben hat der Verf. die ersten 17 berechnet und stellt diese für einen von ihm für höchst wünschenswert erklärten Abdruck aller, einschliesslich der noch zu berechnenden, zur Verfügung. Lp.

---

R. Alagna. Le relazioni fra gl'invarianti d'una forma qualunque d'ottavo ordine. Palermo Rend. VI. 77-99.

Zwischen den neun Fundamentalinvarianten einer binären Form $f$ achter Ordnung müssen drei Relationen bestehen, die der Verf. explicite ermittelt, indem er folgenden Weg einschlägt.

Man kennt die eine Relation, welche zwischen den Simultaninvarianten zweier biquadratischen Formen herrscht. Wählt man nun irgend zwei biquadratische Covarianten von $f$ aus, stellt die bezügliche Relation auf und drückt noch die daselbst auftretenden Invarianten durch die Fundamentalinvarianten aus, so gelangt man (falls nicht etwa das Resultat identisch verschwindet) zu einer der drei gewünschten Relationen.

Man wird daher die biquadratischen Covarianten der niedrigsten Grade auf die angegebene Art paarweise verknüpfen, um zu drei unabhängigen Relationen zu kommen.

So einfach der Gedanke ist, gestaltet sich doch die mit symbolischen Mitteln durchgeführte Rechnung, die sich auf Hülfsformeln von von Gall, d'Ovidio u. a. stützt, ziemlich verwickelt

My.

---

G. Bauer. Ueber die Darstellung binärer Formen als Potenzsummen und insbesondere einer Form vom Grade $2n$ als einer Summe von $n+1$ Potenzen. Münch. Ber. XXII. 3-20.

Eines der wesentlichsten Ergebnisse der von den Herren Reye, Rosanes und von dem Referenten geführten Untersuchungen über Apolarität ist, dass die Potenzdarstellung von Formen zurückgeführt wird auf die Ermittelung gewisser apolarer Formen.

Ist z. B. die Form eine binäre, und soll dieselbe in eine Summe von $i$ Potenzen zerlegt werden:

$$f=\mu_1(x_1-\alpha_1 x_2)^n+\mu_2(x_1-\alpha_2 x_2)^n+\cdots+\mu_i(x_1-\alpha_i x_2)^n,$$

so müssen die $x_1-\alpha x_2$ Linearfactoren einer zu $f$ apolaren Form $\psi$ sein.

Der Verf. bedient sich hier einer elementareren, in den einfachsten Fällen schon von Sylvester eingeschlagenen Methode, um sowohl die Zerlegung von $f$, wie die Form $\psi$ zu erhalten.

In dem besonderen Falle der Entwickelung einer binären Form $2n^{\text{ter}}$ Ordnung in eine Summe von $n+1$ Potenzen ergiebt sich eine elegante Darstellung, in die nur invariante Formen eingehen.

Dass die Methode auch praktisch ist, zeigt eine Reihe von Beispielen. My.

---

A. Cayley. Note on a hyperdeterminant identity. Messenger (2) XXI. 131-132.

Es sei

$$\Omega=(x_1,y_1)^A(x_2,y_2)^B(x_3,y_3)^C(x_4,y_4)^D\ldots$$

eine Form, deren einzelne Bestandteile in den Variabelnpaaren $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$, $(x_4,y_4)$, ... homogen und bezw. von der Ordnung $A$, $B$, $C$, $D$, ... sind; ferner sei

$$\overline{12}=\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2}-\frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}$$

u. s. w.; dann ist

$$(A\overline{23}+B\overline{31}+C\overline{12})\Omega=0,$$

falls die Variabeln $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$, $(x_4,y_4)$, ... oder bloss

die Variabeln $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ einzeln darin durch $(x, y)$ ersetzt werden. Der Verf. glaubt, dass dieser Satz zwar in Wahrheit wohl bekannt, aber nicht in einer so allgemeinen und zugleich so präcisen Form aufgestellt worden sei. Glr. (Lp.)

---

A. CAPELLI. Nuova dimostrazione del teorema sullo sviluppo per polari delle forme algebriche a più serie di variabili. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 3-9.

Der Verf. erbringt einen neuen, durchsichtigeren Beweis für seine Entwickelung einer Form nach Polaren von Formen von weniger Veränderlichen.

Bedeuten $x, y, \ldots, u$ $n$ Reihen von cogredienten Veränderlichen, $D_{pq}$ den Aronhold'schen Process $\Sigma q_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ $(p, q = x, y, \ldots, u)$, so dient als grundlegender Process der folgende:

$$H_{x, y, \ldots, u} \equiv \begin{vmatrix} (n-1)+D_{uu} & \ldots & D_{yu} & D_{xu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{uy} & \ldots & 1+D_{yy} & D_{xy} \\ D_{ux} & \ldots & D_{yx} & D_{xx} \end{vmatrix}.$$

Unter $\Delta$ einen gewissen einfachen Polarenprocess verstanden, unter $F(x, y, \ldots, u)$ die vorgelegte Form, wird die Differenz $F - H\Delta F$ in eine Reihe von Gliedern entwickelt, die durch Ausübung von Polarenprocessen aus Formen entstehen, welche die Variabelnreihe der $x$ überhaupt nicht mehr enthalten.

Bei dem früheren Beweise enthielten allerdings die eben gemeinten Formen ebenfalls eine Variabelnreihe weniger als $F$, aber nicht immer die nämliche. My.

---

E. NETTO. Anwendung der Modul-Systeme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. J. für Math. CX. 184-187.

Zunächst zeigt der Verfasser mit Hülfe des Trägheitsgesetzes

der quadratischen Formen den einfachen Satz: Wenn im Raume von $n$ Dimensionen ein Kegel zweiter Ordnung

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_a^2-x_{a+1}^2-x_{a+2}^2-\cdots-x_n^2=0$$

gegeben ist, so verstreichen von $n$ conjugirten Richtungen stets $\alpha$ auf der einen und $n-\alpha$ auf der andern Seite der Kegelfläche. Ein zweiter Beweis entspringt durch Anwendung der Kronecker'schen Modulsysteme. Sind $a_{ik}$, $\alpha_{i\varkappa}$ für

$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad \varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ m$$

willkürliche Parameter, und wird

$$\sum_k a_{ik}a_{jk}=s_{ij}, \qquad (i,j=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$\sum_\varkappa \alpha_{i\varkappa}\alpha_{j\varkappa}=\sigma_{ij}, \qquad (i,j=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ \varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

$$s_{ij}-\sigma_{ij}=-t_{ij} \qquad (i,j=0,\ 1,\ \ldots,\ m)$$

gesetzt, so ist die Determinante $|\sigma_{ij}|=0$. Hat nun $\varepsilon_{ij}$ die Bedeutung 0 bezüglich 1, je nachdem $i\neq j$ oder $i=j$ ist, so folgt hieraus nach dem Modulsystem $(t_{ij})$, wo $i$, $j$ alle von einander verschiedenen Wertepaare durchlaufen sollen, $|s_{ij}+\varepsilon_{ij}t_{ii}|\equiv 0$. Diese Congruenz lässt sich in die Gestalt

$$-|\alpha_{ij}|^2 t_{00}\equiv$$
$$t_{11}t_{22}\ldots t_{mm}\left\{s_{00}+\sum_i\frac{1}{t_{ii}}\begin{vmatrix}s_{00}&s_{0i}\\ s_{i0}&s_{ii}\end{vmatrix}+\sum_{i,j}\frac{1}{t_{ii}\,t_{jj}}\begin{vmatrix}s_{00}&s_{0i}&s_{0j}\\ s_{i0}&s_{ii}&s_{ij}\\ s_{j0}&s_{ji}&s_{jj}\end{vmatrix}+\cdots\right\}$$

bringen, d. h. es ist $-|\alpha_{ij}|^2 t_{00}$ nach dem Modulsystem $(t_{ij})$ als ganze Function von $t_{11}$, $t_{22}$, ..., $t_{mm}$ darstellbar, deren Coefficienten die Summen von Quadraten sind. Verschwinden die einzelnen Elemente $t_{ij}$ des Modulsystems, während alle $t_{11}$, $t_{22}$, ..., $t_{mm}$ positiv sind, so ist folglich $t_{00}$ negativ; dieser Satz ist mit dem anfangs ausgesprochenen Satze identisch. Im Anschluss an diese Entwickelungen wird ein einfacher arithmetischer Beweis des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen dargelegt. Ht.

---

X. Stouff. Sur la composition des formes quadratiques quaternaires et ses applications aux groupes fuchsiens. Toulouse Ann. VI. G. 1-19.

Der Verfasser legt seinen Entwickelungen die quadratische quaternäre Form

$$A(x^2+u^2)+A'y^2+A''z^2+(By+Cz)(x-u)+Dxu+Eyz$$

zu Grunde, deren Coefficienten den Relationen

$$\frac{A}{A'}=\frac{A''}{A}=-\frac{C}{B}, \qquad A(D+E)=BC$$

genügen, und stellt dann ein System von vier Gleichungen der Gestalt

$$x_1=L, \quad y_1=M, \quad z_1=N, \quad u_1=P$$

auf, wo $L$, $M$, $N$, $P$ homogene bilineare Functionen von $x$, $y$, $z$, $u$ und von $X$, $Y$, $Z$, $U$ sind, deren Coefficienten sich aus den Coefficienten der quadratischen Form in bestimmter Weise zusammensetzen. Das System der vier Grössen $x_1$, $y_1$, $z_1$, $u_1$ heisst das Resultat der Composition der beiden Systeme $x$, $y$, $z$, $u$ und $X$, $Y$, $Z$, $U$. Nachdem die Begriffe „Einheitssystem“ und „periodisches System“ definirt sind, macht der Verfasser den Versuch, auf diesem Wege zur Aufstellung sogenannter Fuchs'scher Gruppen zu gelangen. In der That gelingt es, eine in einer früheren Arbeit vom Verfasser aufgestellte besondere Fuchs'sche Gruppe mit diesen Hülfsmitteln zu behandeln, indem derselbe die vier Grössen $x$, $y$, $z$, $u$ mit den vier Substitutionscoefficienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ der linear gebrochenen Substitution einer Veränderlichen identificirt und dann den Coefficienten $A$, $A'$, ..., $E$ der quadratischen quaternären Form numerisch bestimmte ganzzahlige Werte erteilt.

Ht.

---

G. Méténier. Sur la décomposition d'une forme quadratique en un produit de deux facteurs linéaires. J. de Math. spéc. (4) I. 79-82, 105-109, 125-129, 147-150, 173-177.

Der Verfasser stellt zunächst die Bedingung für die im Titel genannte Zerlegung auf und macht dann Anwendungen hiervon, z. B. zur Bestimmung der gemeinsamen Secanten zweier Kegelschnitte.

Gz.

---

J. Kleiber. Ueber eine Methode zur Aufstellung eines „vollständigen“ Systems blosser Invarianten beliebig vieler quadratischen Formen jeder Stufe. Schlömilch Z. XXXVII. 79-89.

Der Verf. entwickelt, im Anschluss an ein von Gordan herrührendes Verfahren, eine Methode der symbolischen Rechnung, um die rational-unabhängigen Invarianten (im gewöhnlichen Sinne) von beliebig vielen quadratischen Formen mit beliebig vielen Variabeln zu bilden.

Die eingeschlagene Methode lässt sich sogar, wie ohne Beweis mitgeteilt wird, auf das „volle System invarianter Bildungen“ der Grundformen ausdehnen: in der That giebt der Verf. eine Tabelle des vollen Systems von 115 Formen zweier quaternären quadratischen Formen, und geht so über die (unsymbolischen) Untersuchungen von Mertens wesentlich hinaus. Der zu Grunde liegende Gedanke mag am ternären Gebiete erläutert werden. Sei eine der Grundformen $a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 \dots$, so kommt in irgend einem Klammerfactor einer symbolisch geschriebenen Invariante ein Symbol $a$ entweder vereinzelt vor, oder aber mit einem zweiten Symbole $b$ zusammen. Im letzteren Falle lassen sich die übrigen Klammerfactoren durch Anwendung gewisser Identitäten dahin umformen, dass die beiden Symbole $a$, $b$ in einem weiteren Klammerfactor vereinigt auftreten. Das symbolische Product $ab$ ist bekanntlich ein nächst höheres Symbol $\alpha$ (nämlich der geraden Linie). Ein entsprechender Satz gilt wiederum für diese Symbole $\alpha$, $\beta$.

Auf diese Weise gelingt es, ein volles Invariantensystem von quadratischen Formen von vornherein in einer kanonischen Gestalt anzusetzen.

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie die symbolische Rechnung in einem beschränkten Gebiete überaus zweckmässig sein kann.

My.

---

O. Weltzien. Ueber die Bedingungen, unter denen eine ganze rationale Function von mehreren Veränderlichen die vollständige Potenz einer anderen darstellt. Pr. (Nr. 100) Fr. Werdersch. Oberrealsch. Berlin. 23 S. 4°.

Von Hilbert rührt ein elegantes Kriterium dafür her, dass eine binäre Form von der Ordnung $\mu\nu$ die $\mu^{te}$ Potenz einer andern von der $\nu^{ten}$ Ordnung ist.

Der Verf. nimmt die Frage von neuem auf, indem er einen directen und elementareren Weg einschlägt. Das Verfahren eignet sich zwar weniger für eine allgemeine Lösung der Aufgabe, lässt sich aber dafür auf ternäre Formen ausdehnen und in einer Reihe einfacher Fälle explicite durchführen.

Setzt man nämlich die Coefficienten einer binären Form von der Ordnung $\mu\nu$ den entsprechenden der $\mu^{ten}$ Potenz einer Form $\nu^{ter}$ Ordnung $\psi$ gleich, so erhält man ein System von Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten $b$ von $\psi$, die in den $b$ von der $\mu^{ten}$ Ordnung sind. Dies System ist jedoch in ein anderes überführbar, welches in den $b$ nur noch linear ist.

Bei ternären (und höheren) Formen besteht die Schwierigkeit darin, vor der gemeinten Ueberführung erst noch der Lösung fremde Factoren zu beseitigen. My.

---

H. Rosenow. Die Normalformen für die 472 verschiedenen Typen eigentlicher bilinearer Formen von 10 Variabelnpaaren bei congruenter Transformation der Variabeln. Pr. (No. 111) 4. Höh. Bürgersch. Berlin. 21 S. 4°.

Die vorliegenden Rechnungsresultate sollen als Musterbeispiel für frühere Entwickelungen dienen (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 125), nur dass nach verschiedenen Richtungen hin weitere Vereinfachungen Platz gegriffen haben.

Die frühere Bezeichnung „Klasse" ist jetzt durch „Typus" ersetzt.

„Eigentlich" heisst eine bilineare Form, wenn sich die Anzahl ihrer Variabelnpaare vermöge congruenter Transformationen nicht mehr verringern lässt. Unter den Vorzügen der Tabelle seien etwa folgende hervorgehoben.

Jeder Zusammensetzung der Zahl 10 durch kleinere Zahlen gehört eine bestimmte Formelgruppe zu, deren Kronecker'sche „Elementarformen" ersichtlich sind: so z. B. gehören zu $10 = 4+2+2+1+1$

25 Formen, die sich aus fünf Elementarformen mit resp. 4, zweimal 2, zweimal 1 Variabelnpaaren zusammensetzen.

Die Tabelle lässt auch die Normalformen für die Typen bei weniger als zehn Variabelnpaaren sofort hervortreten. Schliesslich kann man der Tabelle auch die Typen uneigentlicher Formen mit 1, 2, ..., 10 Variabelnpaaren entnehmen.

Sicher haben die schwierigen Kronecker'schen Untersuchungen über congruente Transformationen bilinearer Formen durch die Arbeiten des Verf. eine sehr dankenswerte Ergänzung erfahren.

My.

---

G. Koenigs. Sur les réseaux plans à invariants égaux et les lignes asymptotiques. C. R. CXIV. 55-57.

G. Koenigs. Sur les réseaux plans à invariants égaux. C. R. CXIV. 728-729.

Wegen der Definition von Curvenscharen mit gleichen Invarianten vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 792. Der Verf. setzt hier seine geometrischen Interpretationen der Invariantengleichheit fort. Als typisches Beispiel seiner Sätze sei erwähnt:

„Projicirt man die Asymptotencurven einer Fläche von einem beliebigen Raumpunkte aus auf eine Ebene, so erhält man stets eine Curvenschar mit gleichen Invarianten, und umgekehrt kann man jede solche Schar in der Ebene ansehen als Projection der Asymptotencurven einer Fläche."

Im letzteren Falle erhält man (bei gegebener Schar in der Ebene) die Asymptotencurven der Fläche durch Quadraturen.

My.

---

A. Cayley. On Clifford's paper „On syzygetic relations among the powers of linear quantics". Lond. M. S. Proc. XXIII. 99-104.

Clifford hatte (vgl. Clifford Papers Nr. XIV, XV), in Verallgemeinerung von P. Serret'schen Untersuchungen, folgenden Satz (mit Andeutung eines Beweises) aufgestellt:

„Damit $N$ Punkte der Ebene auf einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, genügt es, wenn die $p^{\text{ten}}$ Potenzen ihrer Abstände von

einer willkürlichen Geraden einer linearen homogenen Relation genügen. Hier ist $N$ an die Darstellung gebunden:

$$N = \frac{1}{2} an(n+3) + \frac{1}{\alpha}(\beta+1)(\beta+2),$$

wo $\alpha$ der Quotient und $\beta$ der Rest der Division von $p$ durch $n$ ist.

Der Verf. weist an einer Reihe von Beispielen nach, dass der Clifford'sche Satz, so wie er oben angegeben ist, sicher incorrect ist. Die Frage, welche allgemein gültige Correction anzubringen ist, bleibt noch offen. My.

---

### Weitere Litteratur.

L. Berzolari. Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart'ordine. Annali di Mat. (2) XX. 101-162.

J. C. Fields. Transformation of a system of independent variables. American J. XIV. 230-236.

D. Gambioli. Le funzioni simmetriche, loro rappresentazione simbolica e loro caratteri invariantivi. Batt. G. XXX. 192-205.

P. Muth. Ueber Covarianten ebener Collineationen. Math. Ann. XL. 89-98.

H. Ruoss. Die Invarianten der Biegung. Böklen Mitt. V. 29 - 33.

A. Tresse. Sur les invariants différentiels d'une surface par rapport aux transformations conformes de l'espace. C. R. CXIV. 948-950.

H. S. White. On generating systems of ternary and quaternary linear transformations. American J. XIV. 274-282.

K. Zorawski. Ueber Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie. Acta Math. XVI. 1 - 64.

Bericht über diese Arbeiten in späteren Abschnitten.

## Capitel 3.

## Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

Worontzoff. Sur l'élimination. Nouv. Ann. (3) XI. 291-299.

Aus einer Identität erhält man die Bedingung für das Vorhandensein einer gemeinsamen Wurzel zweier algebraischen Gleichungen in verschiedenen Formen, aus welchen sich die Euler'sche, die Bézout'sche und die Sylvester'sche Gestalt der Resultante ableiten lassen. F.

---

H. Laurent. Sur l'élimination. Nouv. Ann. (3) XI. 5-7.

Um die Resultante zweier Gleichungen

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

von denen die eine vom $m^{\text{ten}}$, die andere von gleichem oder niedrigerem Grade ist, zu bilden, bezeichne man $m$ willkürliche Grössen mit $a_1, \ldots, a_m$ und bilde

$$c_{i\gamma} = c_{\gamma i} = \frac{\varphi(a_\gamma)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi(a_\gamma)}{a_\gamma - a_i},$$

$$c_{ii} = \varphi'(a_i)\psi(a_i) - \varphi(a_i)\psi'(a_i).$$

Dann ist

$$|c_{i\gamma}| \qquad (i, \gamma = 1, \ldots, m)$$

die gesuchte Resultante der beiden Gleichungen oder vielmehr das Product aus der Resultante und einer ganzen symmetrischen Function der $a_1, \ldots, a_m$. F.

---

G. Garbieri. Introduzione ad una teorica dell'eliminazione. Batt. G. XXX. 41-105.

Im ersten Abschnitt werden die bekannten Sätze über Matrices entwickelt; der zweite und dritte Abschnitt behandelt deren Anwendung auf die Theorie der nicht homogenen, beziehungsweise der homogenen linearen Gleichungen. Ht.

M. W. Haskell. Note on resultants. New York M. S. Bull. I. 223-224.

Ergänzung zu einem Satze in Bd. I, S. 151 der „Vorlesungen über Invariantentheorie“ von Gordan, herausgegeben von Kerschensteiner. Lp.

---

Lord M'Laren. A new solution of Sylvester's problem of the three ternary equations. Edinb. Proc. XIX. 264-265.

Eine Elimination der Variabeln $x$, $y$, $z$ mit Hülfe der symmetrischen Functionen aus den Gleichungen

$$by^2-2a'yz+cz^2=0,$$
$$cz^2-2b'zx+ax^2=0,$$
$$ax^2-2c'xy+by^2=0.$$

Cly. (Lp.)

---

Lord M'Laren. On the eliminant of the equations of the ellipse glissette. Edinb. Proc. XIX. 89-97.

Die Aufgabe besteht in der Elimination des Winkels $\theta$ aus zwei Gleichungen, die (nach Ersetzung von $\cos^2\theta$ durch $1-\sin^2\theta$) so geschrieben werden können:

$$-C\sin\theta\cos\theta-B\sin^2\theta+\alpha_1\cos\theta+\beta_1\sin\theta+\gamma_1=0,$$
$$C\sin\theta\cos\theta+B\sin^2\theta+\alpha_2\cos\theta+\beta_2\sin\theta+\gamma_2=0,$$

von denen die eine offenbar ersetzt werden kann durch

$$(\alpha_1+\alpha_2)\cos\theta+(\beta_1+\beta_2)\sin\theta+\gamma_1+\gamma_2=0.$$

Das Endergebnis ist vom achten Grade in $x$ und $y$.

Cly. (Lp.)

---

P. G. Tait. Note on Dr. Muir's solution of Sylvester's elimination problem. Edinb. Proc. XIX. 131-132.

Bezieht sich auf die Lösung in dem Aufsatze des Herrn Muir: „Note on a problem of elimination connected with the glissettes of an ellipse or hyperbola.“ (Edinb. Proc. XIX. 25-31, F. d. M. XXIII. 1891. 136). Cly. (Lp.)

---

M. Bloch. Beiträge zur Theorie der Resultantensysteme, welche bei der Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers zweier ganzen Functionen einer Variabeln auftreten. Diss. Giessen. 4°.

---

E. Netto. The theory of substitutions and its applications to algebra. Revised by the author and translated with his permission by F. N. Cole. Ann Arbor, Mich. XII + 301 S. 8°. [New York M. S. Bull. II. 83-106, Anzeige v. O. Bolza.]

Eine gute Uebersetzung des wohlbekannten Netto'schen Werkes.

Gbs. (Lp.)

---

A. Bochert. Ueber die Zahl der verschiedenen Werte, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann. Math. Ann. XL. 157-175.

Fortsetzung der Arbeit, über welche F. d. M. XXI. 1889. 141 referirt worden ist. Es wird eine Anzahl von Sätzen hergeleitet, die eine untere Grenze für die Anzahl von Buchstaben angeben, auf welche, ausser der identischen, keine Substitution einer mit gewissen Eigenschaften versehenen Gruppe beschränkt ist. Aus diesen Sätzen lassen sich Schlüsse auf die Wertezahl einer Function ziehen.

F.

---

A. Bochert. Ueber die Klasse der transitiven Substitutionengruppen. Math. Ann. XL. 176-193.

Die Arbeit bezweckt, für die Klasse transitiver Gruppen, d. h. die kleinste unter den Buchstabenzahlen aller von der identischen verschiedenen Substitutionen derselben, neue untere Grenzen abzuleiten, welche nicht nur zum Transitivitätsgrade sondern auch zum Grade der Gruppe in Beziehung stehen. Es wird im wesentlichen der folgende Satz ausführlich begründet:

„Enthält eine Substitutionengruppe die alternirende ihres Grades nicht, und bezeichnet $n$ diesen Grad, d. h. die Zahl aller von der Gruppe betroffenen verschiedenen Buchstaben, so vertauscht jede ihrer Substitutionen, von der identischen abgesehen, bei mehr als einfacher Transitivität der Gruppe nicht nur mehr als 3, sondern

mehr als $\frac{1}{4}n-1$ Buchstaben, bei mehr als zweifacher mehr als $\frac{1}{3}n-1$ und bei mehr als dreifacher nicht weniger als $\frac{1}{2}n-1$."

F.

---

S. Levänen. Rotutdragning ur substitutioner. Öfversigt af finska vetenskapssocietetens förhandlingar. XXXIV. 28-35.

Es werden einige Specialfälle der Frage behandelt, unter welchen Bedingungen und auf welche Weise man eine Substitution finden kann, deren $n$-fache Iteration mit einer gegebenen Substitution äquivalent ist.

Bdn.

---

H. Burkhardt. Ueber einen fundamentalen Satz der Lehre von den endlichen Gruppen linearer Substitutionen. Math. Ann. XLI. 309-312.

In seiner Arbeit „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade", Math. Ann. XV. 251 (F. d. M. XI. 1879. 74) bildet Herr F. Klein homogene ganze Functionen

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu$$

von $n$ Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$, welche eine vorgegebene Gruppe linearer homogener Substitutionen erfahren, wenn man die $x$ einer zu dieser isomorphen Gruppe solcher Substitutionen unterwirft. Er geht zu dem Zwecke von einer ganzen homogenen Function $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ der $x$ aus, welche nur die eine Bedingung zu erfüllen hat, dass zwischen den Werten, welche sie bei den Substitutionen der $x$ annimmt, gewisse lineare homogene Relationen mit numerischen Coefficienten nicht bestehen. Nachzuweisen, dass dieser Forderung stets genügt werden kann, ist der Zweck der vorliegenden Note des Herrn Burkhardt.

F.

---

O. Hölder. Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen. Math. Ann. XL. 55-88.

Auf Sätze des Herrn Sylow (Math. Ann. V. 584; F. d. M. IV. 1872. 56) gestützt, untersucht der Verf. die Möglichkeit, einfache Gruppen zu bilden, bis zur Ordnungszahl 200, und kommt zu folgendem Resultat:

Innerhalb des Zahlengebietes von 1 bis 200 existiren nur zwei einfache Gruppen mit zusammengesetzter Ordnungszahl, die Iko-

saedergruppe von 60 Operationen und die Gruppe von 168 Operationen, welche der Modulargleichung für die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen angehört. — Hervorzuheben ist noch folgende Consequenz: Alle Gruppen, deren Ordnung nicht grösser als 200 und verschieden von 60, 120, 168, 180 ist, sind auflösbar, entsprechen also Gleichungen, die durch Wurzelzeichen gelöst werden können. Wbg.

---

F. N. Cole. Simple groups from order 201 to order 500.
American J. XIV. 378-388.

Der Verfasser knüpft an eine Abhandlung des Hrn. Hölder (vergl. den vorangehenden Bericht) an, welcher zeigt, dass es, abgesehen von den Gruppen mit Primzahlordnung, nur zwei einfache Gruppen giebt, deren Ordnung die Zahl 200 nicht überschreitet: nämlich die Ikosaedergruppe von der Ordnung 60 und die durch die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen bekannte Gruppe von der Ordnung 168. Genau mit den nämlichen Hülfsmitteln, welche Hr. Hölder benutzt, gelingt es dem Verfasser, von sämtlichen zusammengesetzten Zahlen zwischen 201 und 500 nachzuweisen, dass sie nicht Ordnungen von einfachen Gruppen sein können; abgesehen allein von den beiden Zahlen 360 und 432. Nach einem Hölder'schen Satze sind zunächst alle Gruppen zusammengesetzt, deren Ordnung ein Product von zwei oder drei gleichen oder ungleichen Primzahlen ist; es bleiben hiernach zwischen 201 und 500 nur noch 84 Zahlen zu untersuchen übrig. Aus den weiteren von Hrn. Hölder entwickelten Sätzen folgt dann unmittelbar, dass von diesen 84 Zahlen nur noch gewisse 18 Zahlen möglicherweise Ordnungen von einfachen Gruppen sein können. Diese 18 Zahlen werden vom Verfasser einzeln nach besonderen Methoden behandelt. Es werden hierdurch schliesslich alle Ordnungen verworfen, ausser den genannten zwei; der Verfasser lässt es jedoch unentschieden, ob für die Ordnungszahl 360 ausser der alternirenden Gruppe der Vertauschungen von sechs Dingen noch eine zweite einfache Gruppe und für die Ordnungszahl 432 überhaupt eine einfache Gruppe existirt. Ht.

---

G. G. Morrice. Second note on a quaternary group of 51840 linear substitutions. Lond. M. S. Proc. XXIII. 213-217.

Der Verfasser weist den Zusammenhang des Multiplicationsgesetzes der Quaternionen mit einer quaternären Matrix nach, welche sich als lineare Function von vier eine Gruppe bildenden Matrizen darstellen lässt, und zeigt, dass die Einfachheit der von ihm in der Sitzung am 12. Dezember 1889 betrachteten Gruppe von 51840 linearen Substitutionen (vergl. F. d. M. XXII. 1890. 177) auf Rechnung ihres Isomorphismus mit der Quaternionengruppe zu setzen ist. Wbg.

---

P. Painlevé. Sur les groupes discontinus de substitutions non linéaires à une variable. C. R. CXIV. 1345-1348.

Die Resultate, zu welchen der Verfasser durch Untersuchung der nicht linearen Gruppen kommt, sind folgende. 1) Der Grad $n$ sei eine Primzahl, dann folgt: Die discontinuirlichen, nicht algebraischen Gruppen von Substitutionen mit $n$ Variabeln $(z, z_i)$ werden abgeleitet aus den linearen Gruppen $(t, t_i)$, indem man entweder $z=\varphi(t)$ oder $R(z)=t$ setzt, wo $\varphi$ und $R$ rationale gebrochene Functionen vom Grade $n$ sind. Die algebraischen Gruppen $(z, z_i)$ ergeben sich aus den endlichen linearen Gruppen durch dieselben Veränderungen der Variabeln, oder sie sind ähnlich einer Gruppe von Transformationen, welche eine Curve vom Grade $n$ und von einem Geschlechte $>0$ in sich überführt.

2) $n$ sei irgend eine ganze Zahl, dann ergiebt sich: Jede discontinuirliche, nicht algebraische Gruppe von Substitutionen mit $n$ Variabeln $(z, z_i)$ geht aus einer linearen Gruppe $(t, z_i)$ hervor, indem man $t$ mittelst der Gleichung $F(t, z)=0$ einführt, wo $F$ ein Polynom vom Grade $n'$ in $z$ und vom Grade $n''$ in $t$ ist $(n'n''=n)$. Jede algebraische Gruppe $(z, z_i)$ geht auf dieselbe Weise aus jeder linearen endlichen Gruppe hervor, oder sie ist algebraisch ähnlich einer Gruppe von Transformationen, welche eine Curve vom Grade $n''$ und einem Geschlechte $>0$ in sich überführt; jedem Punkte der Curve entsprechen dann $n'$ Werte von $z$. Bm.

---

E. H. Askwith. On groups of substitutions that can be formed with nine letters. Quart. J. XXVI. 79-128.

Fortsetzung der Arbeit, über welche F. d. M. XXII. 1890. 176 referirt worden ist. Nach derselben Methode wie in der früheren Arbeit werden die Substitutions-Gruppen, aber nur die transitiven, für neun Elemente gebildet. F.

---

Maillet. Recherches sur les substitutions et en particulier sur les groupes transitifs. Paris. 125 S.

G. Rost. Untersuchungen über die allgemeinste lineare Substitution, deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden. Diss. Würzburg. 4°.

E. P. Knothe. Bestimmung aller Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes. Diss. Leipzig.

---

G. Weichold. Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Nach System Kleyer bearbeitet. Stuttgart.

J. Korczyński. Elementare Determinantentheorie. Pr. Krakau. 1892. 42 S. (Polnisch.)

---

O. Dittmar. Neue Permutationsverfahren und Determinantenberechnungen. Pr. (Nr. 644) Realsch. Wimpfen. 19 S. 4°.

Die neuen Permutationsverfahren bestehen darin, aus einer beliebigen Permutation von $n$ Elementen $\frac{1}{2}(n!)$ Permutationen abzuleiten, die, rückwärts gelesen, die sämtlichen übrigen $\frac{1}{2}(n!)$ Permutationen liefern. Die Anwendung der Methoden zur Berechnung von Determinanten führt zu einer Verallgemeinerung der Sarrus'schen Regel für Determinanten beliebigen Grades. F.

---

G. Landsberg. Ueber relativ adjungirte Minoren. J. für Math. CIX. 225-230.

In Erweiterung des bekannten Begriffs adjungirter Minoren einer Determinante

$$D = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

werden zwei Determinanten von der Form

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{mm} a_{m+1, m+1} \dots a_{m+\mu, m+\mu}$$

und

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{mm} a_{m+\mu+1, m+\mu+1} \dots a_{nn}$$

$$(\text{wo } 0 \leqq m < m+\mu < n)$$

relativ adjungirt in Beziehung auf die Determinante

$$A = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{mm}$$

genannt.

Dieser neue Begriff führt zu einer Verallgemeinerung der Sätze bei Baltzer § 4, 1 und § 7, 1. Die in diesen Sätzen auftretenden Werte $D$ und $D^{\nu}$ werden hier ersetzt durch das Product $D.A$ resp. durch ein Product von Potenzen von $D$ und $A$. F.

---

L. Gegenbauer. Ueber einige arithmetische Determinanten höheren Ranges. Wien. Ber. CI. 425-484.

Es wird für die Determinanten $n^{\text{ter}}$ Ordnung vom Range $r+s-2$

$$|c_{i_1 i_2 \dots i_{r+s-2}}| \qquad (i_1, i_2, \dots, i_{r+s-2} = 1, 2, \dots, n)$$

zuerst eine Reihe von sehr allgemeinen Lehrsätzen abgeleitet, welche als Ausdehnungen der gewohnten Determinantensätze (z. B. des Cauchy-Binet'schen) anzusehen sind. Die einzelnen Elemente werden sodann als zahlentheoretische Functionen der Indices aufgefasst, und so wird eine grosse Zahl von Lehrsätzen gewonnen, welche als Verallgemeinerungen bekannter Theoreme von Stephen Smith, Cesáro und Hammond gelten können. Sn.

---

B. Igel. Zur Theorie der Determinanten. Monatsh. f. Math. III. 55-67.

Zunächst wird die Relation zwischen den Determinanten zweier Systeme von unabhängigen Elementen und der Determinante des aus ihnen durch Multiplication je zweier Elemente entstandenen Systems abgeleitet, welche inzwischen von Herrn Hensel in erweiterter Fassung veröffentlicht und bewiesen worden ist, ursprünglich aber von Kronecker stammt (cf. F. d. M. XXIII. 1891. 148).

Aus dieser Relation entstehen zwei neue, wenn man jedes Element des einen Systems gleich dem entsprechenden des andern setzt; es zerfällt alsdann nämlich die Determinante des componirten Systems in zwei Factoren:

1) die aus allen Unterdeterminanten zweiter Ordnung des gegebenen Systems gebildete Determinante;

2) eine Determinante der Art, wie sie bei Hunyady im J. für Math. LXXXIX. 47 auftritt; und jeder dieser Factoren ist gleich einer bestimmten Potenz der Determinante des gegebenen Systems.

Ausserdem enthält die Arbeit einen neuen Beweis für das von Herrn Gundelfinger im J. für Math. C. 413 aufgestellte Lemma [F. d. M. XIX. 1887. 109]. F.

---

G. v. Escherich. Ueber einige Determinanten. (Zusatz zur vorhergehenden Abhandlung.) Monatsh. f. Math. III. 68-80.

Der Verf. beweist die im Anfange des vorigen Referats erwähnte Determinanten-Relation, indem er ihre Richtigkeit zunächst für den Fall zeigt, dass eins der beiden gegebenen Systeme von der ersten oder zweiten Ordnung ist, und dann den Schluss von $n$ auf $n+1$ anwendet.

Ferner verallgemeinert er diejenigen Identitäten der Igel'schen Arbeit, welche sich auf die Hunyady'schen Determinanten beziehen. Bei der Weitläufigkeit der auftretenden Determinanten lassen sich jedoch die eleganten Resultate hier nicht ausführlich mitteilen.

F.

---

G. v. Escherich. Bestimmung einer Determinante. Monatsh. f. Math. III. 19-20.

Der Wert einer gewissen Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung wird durch successive Reduction der Ordnung um 1 in einfacher Weise ermittelt. Durch Einsetzen specieller Werte für die Constanten geht die vorgelegte Determinante in eine andere über, welche von Herrn Schoute im J. de Math. spéc. (Referat unten S. 146) berechnet worden ist. F.

---

J. Deruyts. Sur les relations qui existent entre certains déterminants. Belg. Bull. XXIII. 507-521.

Zwischen den Determinanten einer Matrix, deren Elemente als Unbestimmte gedacht werden, besteht bekanntlich eine grosse Reihe von Relationen. Es wird gezeigt, dass sich dieselben stets auf ein System quadratischer Relationen zurückführen lassen, aus denen durch Addition und Multiplication alle übrigen hervorgehen.

Die Methode ist eine formentheoretische: indem die Elemente einer Reihe als Coefficienten einer linearen Form angesehen werden, ist der Verf. im Stande, durch gewisse, früher von ihm aufgestellte Sätze über primäre Covarianten die Frage zu entscheiden.

My.

---

L. C. Almeida. Novas regras para desenvolver os determinantes literaes do terceiro e quarto gráo. Instituto de Coimbra XLI.

Neue Regeln zur Berechnung der Determinanten mit drei oder vier Zeilen. Tx. (Lp.)

---

J. P. Teixeira. Processos expeditos para achar os desenvolvimentos de alguns determinantes. Teixeira J. XI. 87-92.

Regeln, vermöge deren die drei-, vier- und fünfreihigen Determinanten sofort entwickelt niedergeschrieben werden können (auf Permutationen der Indices beruhend). Tx. (Lp.)

---

L. van Elfrinkhof. Opmerkingen naar aanleiding der verhandelingen over quaternionmatrices van den heer Th. B. van Wettum. Nieuw Archief XIX. 143-150.

In den beiden vorhergehenden Bänden des Nieuw Archief hat Herr van Wettum einige Betrachtungen über Matrices angestellt und damit mehrere Einwürfe wider die Theorie der Quaternionen erhoben. Der Verfasser zeigt, dass Hr. van Wettum aus seinen richtigen Formeln unrichtige Schlüsse gezogen hat, wie schon zum Teil F. d. M. XXIII. 1891. 78 angegeben worden ist. Weiter

wird aufs neue der Ausdruck für die Matrix einer konischen Drehung hergeleitet und die Uebereinstimmung mit dem für denselben Fall gültigen Ausdruck in der Theorie der Quaternionen nachgewiesen. Mo.

W. H. Metzler. On the roots of matrices. American J. XIV. 326-377.

Die von Hrn. Cayley in seiner Abhandlung Memoir on matrices (1858) gegebene „identische Gleichung“ ist für Matrices dritter Ordnung von Hrn. Forsyth durch Lösung eines Systems linearer Differenzen-Gleichungen bewiesen worden. Der Verf. erzielt eine wesentliche Vereinfachung dieses Verfahrens, indem er die von Forsyth angewandten Scalar-Gleichungen durch nicht-scalare ersetzt, und gelangt auf diese Weise auch dazu, die von Hrn. Sylvester gefundenen einschlägigen Sätze zu beweisen. — Ist $\varphi$ eine Matrix von der Form

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1\omega} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\omega 1} & \varphi_{\omega 2} & \dots & \varphi_{\omega\omega} \end{vmatrix},$$

schreibt man ferner überall $\varphi_{rr}-x$ statt $\varphi_{rr}$ $(r=1, 2, \dots, \omega)$ und setzt den ganzen Ausdruck gleich Null, so heissen die Wurzeln dieser Gleichung $g_1, g_2, \dots, g_\omega$ die latenten Wurzeln von $\varphi$. Ferner ist

$$\varphi^n = A_0 g_1^n + B_0 g_2^n + \dots + W_0 g_\omega^n.$$

Setzt man $n$ der Reihe nach gleich $0, 1, \dots, \omega-1$, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten $A_0, B_0, \dots, W_0$ $\omega$ lineare Gleichungen. Ist eine Wurzel, z. B. $g_r$, $p_r$-fach vorhanden, so tritt an die Stelle des zugehörigen Factors $R_0$ der Factor $\sum_{\lambda=0}^{p_r-1} n^\lambda R_\lambda$. — Wird endlich

$$\varphi^n = A_0 g_1^n e^{nA_1} + B_0 g_2^n e^{nB_1} + \dots + S_0 g_s^n e^{nS_1}$$

und $n = \frac{1}{m}$ gesetzt, so ist

$$\varphi = A_0 g_1 e^{A_1} + B_0 g_2 e^{B_1} + \dots + S_0 g_s e^{S_1},$$

und mit der Bestimmung der Coefficienten $A_0$, $B_0$, ... ist auch die $m^{te}$ Wurzel aus $\varphi$ gefunden. — Der Fall, wo einzelne oder alle latenten Wurzeln verschwinden, erfordert eine besondere Behandlung. Zahlreiche Beispiele erläutern das Ganze. Zum Schluss werden noch einige transcendente Functionen einer Matrix untersucht.

Schg.

---

H. W. Segar. The deduction of certain determinants from others of indeterminate form. Messenger (2) XXII. 57-71.

Der Verf. betrachtet die Verhältnisse von Determinanten, in denen $n$ Buchstaben $x_1, x_2, \dots, x_n$ vorkommen, falls diese alle gleich $x$ gesetzt werden. In dem ersten Falle der Betrachtung wird $\zeta^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ als ein Factor der Determinanten angenommen, und es ergiebt sich, dass, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ beliebige Zahlen sind, $\zeta^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ immer durch $1!\,2!\,3!\dots n!$ teilbar ist. Die betrachteten Determinanten sind im allgemeinen so beschaffen, dass die Bildung der folgenden Zeilen durch Vergrösserung irgend eines jedem Elemente der ersten Zeile gemeinschaftlichen Indexes oder Suffixes erfolgt, und zwar um eine Einheit bei der zweiten Zeile, um zwei bei der dritten u. s. w. Die allgemeinen Sätze sind zahlreich und etwas verwickelt; sie liefern ferner manche numerischen Ergebnisse als besondere Fälle, wie z. B.:

$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & \dots \\ 2! & 3! & 4! & \dots \\ 3! & 4! & 5! & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (1!\,2!\dots n!)^2(n+1)!,$$

wobei die Anzahl der Zeilen gleich $n$ genommen ist.

Glr. (Lp.)

---

H. W. Segar. On the multinomial determinant. Messenger (2) XXI. 177-188.

Ist

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

so hat man den Coefficienten $A_r$ gleich:

$$\frac{A_0}{r!\, m^r a_0^r} \begin{vmatrix} na_1 & -ma_0 & . & . & .. \\ 2na_2 & (n-m)a_1 & -2ma_0 & . & .. \\ 3na_3 & (2n-m)a_2 & (n-2m)a_1 & -3ma_0 & .. \\ 4na_4 & (3n-m)a_3 & (2n-2m)a_2 & (n-3m)a_1 & .. \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

Dies ist die vom Verfasser mit dem obigen Namen bezeichnete Determinante, von der er eine Anzahl besonderer Fälle betrachtet. Auch manche andere Coefficienten werden noch in Determinantenform ausgedrückt. Glr. (Lp.)

---

H. Brunn. Ein Satz über orthosymmetrische und verwandte Determinanten aus den fundamentalen symmetrischen Functionen. Schlömilch Z. XXXVII. 291-297.

Bezeichnet man die elementar-symmetrischen Functionen von $m$ Grössen $a$ mit $M_1, M_2, \dots, M_m$, und setzt man

$$M_{m+\nu} = 0, \quad M_0 = 1, \quad M_{-\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \dots,$$

so erhält man, wenn man die orthosymmetrische Determinante

$$\begin{vmatrix} M_\nu & M_{\nu-1} & \dots & M_{\nu-\lambda} \\ M_{\nu+1} & M_\nu & \dots & M_{\nu-\lambda+1} \\ . & . & . & . \\ M_{\nu+\lambda} & M_{\nu+\lambda-1} & \dots & M_\nu \end{vmatrix}$$

nach den Elementen $a$ entwickelt und die vereinbaren Glieder zusammenzieht, nur noch Glieder von einerlei Vorzeichen.

F.

---

E. Amigues. Démonstration analytique du théorème de M. Rouché relatif à un système d'équations algébriques du premier degré. Nouv. Ann. (3) XI. 47-48.

Beweis des Satzes: Jedes System von beliebig vielen Gleichungen ersten Grades mit beliebig vielen Unbekannten ist demjenigen Systeme äquivalent, das entsteht, wenn man die Gleichungen nimmt, welche die Hauptdeterminante liefern, und die allen übrigen Gleichungen entsprechenden charakteristischen Determinanten gleich Null setzt. F.

A. Capelli. Sopra la compatibilità o incompatibilità di più equazioni di primo grado fra più incognite. Rivista di Mat. II. 54-58.

Der Verf. nennt die Zahl $h$ die Charakteristik einer Matrize, wenn mindestens eine von Null verschiedene Determinante $h^{\text{ter}}$ Ordnung, aber keine von höherer Ordnung in der Matrize enthalten ist, und beweist den folgenden Satz: Damit $m$ nicht homogene Gleichungen ersten Grades mit $n$ Unbekannten

$$a_{\mu 1}x_1 + a_{\mu 2}x_2 + \cdots + a_{\mu n}x_n = a_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mit einander verträglich sind und durch endliche Werte der Unbekannten befriedigt werden, ist hinreichend und notwendig, dass die beiden Matrizen

$$\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & a_m \end{matrix}$$

dieselbe Charakteristik haben. F.

---

E. Cesáro. Remarques sur un continuant. Mathesis (2) II. 5-12.

Dieser Artikel enthält die Betrachtung einer besonderen, wesentlich positiven Determinante, die zuerst von Hrn. Novarese untersucht wurde, und die nach Hrn. Cesáro die Discriminante der quadratischen Form ist:

$$a_0x_1^2 + a_1(x_1^2 + x_2^2 - 2\lambda_1 x_1 x_2) + a_2(x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda_2 x_2 x_3) + \cdots + a_n x_n^2.$$

Am Ende des Aufsatzes weist der Verf. auf mehrere Verallgemeinerungen dieser Determinante hin. Dml. (Lp.)

---

W. H. Echols. On certain determinant forms and their applications. Annals of Math. VI. 105-126; VII. 11-59.

Die Determinante

$$F(x) \equiv \begin{vmatrix} f(x), & 1, & x, & x^2, & \ldots, & x^n \\ f(a_n), & 1, & a_n, & a_n^2, & \ldots, & a_n^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(a_0), & 1, & a_0, & a_0^2, & \ldots, & a_0^n \end{vmatrix},$$

worin $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, und die Function $f(x)$ mit ihren $n$ ersten Ableitungen für alle Werte von $x$ zwischen $a_0$ und $a_n$ endlich und stetig ist, wird in der ersten Abhandlung von dem Verf. angewandt:

1) zu einer Verallgemeinerung der Lagrange'schen Form des Rolle'schen Theorems, indem die $n^{te}$ Ableitung $f^n(u)$ für $a_0 < u < a_n$ durch $f(a_0), \ldots, f(a_n)$, $a_0, \ldots, a_n$ ausgedrückt wird;

2) zu einer Ausdehnung der Lagrange'schen Interpolationsformel auf beliebige Functionen;

3) zu einer neuen Form der mechanischen Quadratur;

4) zu einer Verallgemeinerung der Reihenentwickelung von $f(x)$ nach der Taylor'schen und Maclaurin'schen Formel, wobei Verf. zu einer von ihm „composite" genannten functionalen Relation von grosser Allgemeinheit gelangt.

In der zweiten Abhandlung wird diese functionale Relation genauer discutirt und hauptsächlich auf die Reihenentwickelung einer beliebigen Function nach ganzen rationalen Functionen angewandt. Den Schluss der Arbeit bilden einige Anwendungen der genannten Relation auf die Reihenentwickelung einer beliebigen Function nach Exponential- und trigonometrischen Functionen. — Eine Fortsetzung der Untersuchungen soll folgen. Wbg.

---

Philastre. Solution de la question 298. J. de Math. spéc. (4) I. 142-144.

Hr. Philastre beweist den folgenden, von Hrn. de Longchamps aufgestellten Satz: Sind die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Elemente der Hauptdiagonale einer Determinante $n^{ter}$ Ordnung $\Delta$, und sind alle übrigen Elemente gleich $x$, so besitzt die Gleichung $\Delta = 0$ lauter reelle Wurzeln, oder lauter reelle Wurzeln bis auf zwei.

Gz.

---

P. H. Schoute. Calcul d'un déterminant. J. de Math. spéc. (4) I. 54-56.

Die Mitteilung enthält die Auswertung einer einfachen Determinante, und es wird mit Hülfe derselben ein von E. Lucas ohne Beweis veröffentlichtes Resultat (Théorie des nombres, I, p. 286) hergeleitet. Gz.

Mme Veuve F. Prime. Sur un déterminant nul. J. de Math. spéc. (4) I. 177-179.

Einfacher Beweis dafür, dass die Determinante

$$|\sin(\alpha_i+\alpha_k)| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

für $n < 2$ Null ist, und Herleitung von Beziehungen zwischen den Winkeln eines Dreiecks aus diesem Satze. Gz.

---

Blutel. Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière. S. M. F. Bull. XX. 92-96.

Durch Induction wird der bekannte Satz bewiesen, dass sich jede ganze Function $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $m^{ten}$ Grades auf eine einzige Art in die Form

$$\Sigma A_{r_1 r_2 \ldots r_{m-1}} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_{m-1}^{r_{m-1}}$$

bringen lässt, wo $r_k \leqq m-k$, und wo die $A$ ganze Functionen der Coefficienten der Gleichung sind. Die Umwandlung einer symmetrischen Function der Wurzeln in diese „reducirte Form" führt unmittelbar zu ihrer Darstellung als ganze Function der Coefficienten der Gleichung. F.

---

H. W. Segar. On a determinantal theorem due to Jacobi. Messenger (2) XXI. 148-157.

Der Hauptsatz lautet: Wenn $H_n$ die Summe der homogenen Producte $n^{ter}$ Ordnung der $r$ Elemente $a, b, c, \ldots$ bedeutet, so ist

$$|H_{i+k}| = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)}(abc\ldots)^{r-1}}{\zeta(a, b, c, \ldots)} |p^i| . |p^k|$$

$$(i = \alpha, \beta, \gamma, \ldots;\ k = \alpha', \beta', \gamma', \ldots;\ p = a, b, c, \ldots).$$

Ein anderer der Sätze ist der folgende: Es sei

$$f(x) = \Pi(x+\alpha_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, r),$$

so ist

$$\left| D^i \frac{x^\lambda}{f(x)} \right| = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)+\alpha+\beta+\cdots} . \alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots \{f(x)\}^{\frac{1}{2}r(r-3)}}{\zeta^{\frac{1}{2}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} . \left| \frac{1}{(x+\alpha_k)^i} \right|$$

$$(i = \alpha, \beta, \gamma, \ldots;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$ Glr. (Lp.)

---

J. Duran Loriga. Sobre las funciones simétricas simples (suma de potencias) de las raices de una ecuación. Progreso mat. II. 221-223.

Beweis der Newton'schen Formeln für die Summen gleich hoher Potenzen der Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung. Tx. (Lp.)

---

A. Cayley. On Waring's formula for the sum of the $m^{th}$ powers of the roots of an equation. Messenger (2) XXI. 133-137.

Bezieht sich auf die Waring'sche Formel in den „Meditationes algebraicae“. Die Formel wird in einer etwas abweichenden Gestalt wieder aufgestellt und die Bemerkung zugefügt, dass, wenn $x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots=0$ die Gleichung ist, man in Wahrheit die Reihe für $x^m$ hat, die soweit fortgesetzt ist, wie der Exponent von $b$ nicht negativ ist. Glr. (Lp.)

---

Fr. Deruyts. Sur une propriété des déterminants symétriques gauches. Liège Mém. (2) XVII. 22 S.

Wenn die Unterdeterminanten einer schief symmetrischen Determinante von der Ordnung $2k$ Null sind, so verschwinden die Unterdeterminanten von der Ordnung $2k-1$ ebenfalls.

Dml. (Lp.)

---

# Dritter Abschnitt.

## Niedere und höhere Arithmetik.

### Capitel 1.

### Niedere Arithmetik.

H. Padé. Premières leçons d'algèbre élémentaire. (Nombres positifs et négatifs. — Opérations sur les polynômes.) Avec une préface de Jules Tannery. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XXIII + 81 S. 8°.

Wie Herr Tannery in dem Vorwort (I-XVIII) zu diesen Elementen der Algebra ausführt, entbehrt die Einführung der negativen Zahlen, wie überhaupt die Theorie der elementaren algebraischen Operationen häufig der logischen Strenge und der Klarheit. Zu verwerfen sei die Zuhülfenahme der Gleichungen ersten Grades, welche die Einführung der negativen Zahlen, sowie überhaupt die Erweiterung des Zahlbegriffs durch die algebraischen Operationen am einfachsten gestattet. Sie führe nur zur Gewöhnung an den Mechanismus des Rechnens.

Während gewöhnlich nur positive und negative Zahlen unterschieden werden, unterscheidet Herr Padé drei Arten von Zahlen: positive, negative und arithmetische. Letztere haben kein Vorzeichen und stellen den absoluten Wert der positiven oder negativen Zahlen dar. Auf die Einführung der positiven und negativen Zahlen folgen die Definitionen der fundamentalen Operationen und die Beweise der wesentlichen Eigenschaften dieser Operationen.

Jene Definitionen können, wie Herr Padé es ausführt, auf scheinbar ganz willkürliche Weise angenommen werden, und erst daraus lassen sich Folgerungen ziehen, welche diese Definitionen rechtfertigen. Der schwierigste Punkt bleibt immer die Addition positiver und negativer Zahlen. Der Hauptsatz, der hier ausgesprochen und bewiesen werden muss, besagt, dass man in einer solchen Summe die Reihenfolge der Glieder willkürlich ändern kann. Wegen der Menge der Fälle, die hier zu unterscheiden sind, und vor der sich mancher scheut, nimmt die Addition und Subtraction (S. 8-25) den grössten Teil der Darstellung ein. Aber diese Breite ist unerlässlich.

Eine andere Schwierigkeit macht gewöhnlich die Verwirrung der Zeichen + und —, die in doppeltem Sinne gebraucht werden, als Vorzeichen und als Operationszeichen. Um diese Verwirrung zu vermeiden, unterscheidet Herr Padé die positiven und negativen Zahlen durch Indices, $p$ und $n$, und giebt die Theorie der Addition und Subtraction, ehe er die gewöhnliche Bezeichnung einführt, ähnlich wie Herr Weierstrass.

S. 25-36 folgen dann die Multiplication und Division und S. 36-42 die Regeln für die Verbindung beider Operationen. Daran schliesst sich (S. 42-53) die Darstellung der stetigen positiven und negativen Grössen, ihre Anwendung auf concrete Dinge. Die Einführung des Kunstwortes „symmetrisch“ für „gleich mit entgegengesetztem Vorzeichen“ hat den Vorzug der Kürze.

In Capitel II (S. 54-78), „die Polynome“, werden zunächst Definitionen algebraischer Ausdrücke gegeben. Die Theorie der Zahlenoperationen gestattet, gewisse algebraische Ausdrücke in andere äquivalente umzuformen, d. h. in solche, die denselben numerischen Wert annehmen. So ist alles vorbereitet, um die Definitionen und die Operationen auf die Polynome auszudehnen, die die wesentlichen Elemente der Algebra ausmachen.

Vom Standpunkte der Logik ist gegen die Entwickelung des Herrn Padé nichts einzuwenden; ob sie auch methodisch unanfechtbar und für den Unterricht geeignet sei, möchten wir bezweifeln. M.

G. Biasi. Elementi di aritmetica e algebra esposti con metodo sintetico. Sassari. Gallizzi. IV u. 304 S. 8°.

Das Buch zerfällt in sieben Abschnitte, deren Titel im folgenden angeführt werden mögen: I. Natürliche Zahlen. II. Grössen (grandezze). III. Reelle Zahlen. IV. Multiplication. V. Ganze Functionen. VI. Gleichungen und Ungleichungen. VII. Functionen und Probleme.

Was die Kritik des Werkes betrifft, so vergleiche die grösstenteils ganz richtigen Einwände von C. Burali-Forti in Riv. di mat. III. 40-43 sowie die Antwort des Verfassers daselbst 74. Vi.

---

N. F. Dupuis. The principles of elementary algebra. London. Macmillan and Co. VII + 336 S.

Das Buch ist mit beständiger Rücksicht auf die logische Entwickelung des Gegenstandes verfasst worden und zeichnet sich durch den freien Gebrauch graphischer Veranschaulichungen aus. Die späteren Abschnitte des Buches sind jedoch ein wenig skizzenhaft. Gbs. (Lp.)

---

H. Schubert. Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Real- und Bürgerschulen. Ein Auszug aus der Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben. Erstes Heft. Potsdam. Aug. Stein. IV u. 104 S. 8°.

H. Schubert. Resultate zur Sammlung von arithmetischen und algebraischen Aufgaben etc. für höhere Schulen. Ausgewählte Resultate zu beiden Heften. Zweite Aufl. Potsdam. Aug. Stein. 79 S. 8°.

Das erste Werk bringt die Aufgaben aus des Verfs. „Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, verbunden mit einem systematischen Aufbau der Begriffe, Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, für höhere Schulen“ (3. Aufl. Potsdam 1890) mit derselben Numerirung, das zweite die Resultate derjenigen Aufgaben, „bei welchen eine Beruhigung des Schülers über die Richtigkeit der gefundenen Lösung wünschenswert er-

scheint, bei welchen jedoch die Kenntnis des Resultates ihm die Denkarbeit nicht abnimmt". Lp.

---

H. Fenkner. Arithmetische Aufgaben. Mit besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Trigonometrie, Physik und Chemie. Zum Schulgebrauch wie zum Selbstunterricht. Ausgabe A: Für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen. Pensum der Prima. Braunschweig. O. Salle. 127 S. 8°.

Zweiter Teil der Aufgabensammlung, deren erster Teil F. d. M. XXI. 1889. 162 besprochen ist. Nach denselben Principien wie im ersten Teil die Aufgaben für Tertia und Secunda sind im vorliegenden zweiten Teil die Aufgaben für das algebraische Pensum der Prima höherer Lehranstalten ausgewählt. Den einzelnen Abschnitten sind die zugehörigen Lehrsätze und Entwickelungen vorausgestellt. F.

---

A. Böhme's Rechenbücher. Neubearbeitung 1892. Bearbeitet von K. Schaeffer und G. Weidenhammer. Aufgaben zum Rechnen. 1. Heft 24 S. 2. Heft 32 S. 3. Heft 48 S. 4. Heft 48 S. 5. Heft 48 S. Uebungsbuch im Rechnen. 1. Heft 32 S. 2. Heft 48 S. 3. Heft 56 S. 4. Heft 64 S. 5. Heft 64 S. Berlin. G. W. F. Müller. 8°.

Neubearbeitung der bekannten Böhme'schen Rechenbücher für den Elementarunterricht. Von den beiden Ausgaben ist die eine, Aufgaben zum Rechnen, für die Volksschule, die andere, Uebungsbuch im Rechnen, für weiterführende Schulen bestimmt. Bei der Auswahl der Aufgaben ist vor allen Dingen die Rücksicht auf das praktische Leben (Handel, Industrie, Landwirtschaft, Arbeiterversicherung etc.) massgebend gewesen. F.

---

G. von der Gabelentz. Ueber die Verwendung des Rechenbrettes zur Darstellung beliebiger Zahlensysteme. Hoppe Arch. (2) XI. 213-217.

Die Chinesen besitzen ein Rechenbrett, welches sie befähigt, Additionen und Subtractionen dekadischer Zahlen rein mechanisch auszuführen. In der vorliegenden Note werden Vorschläge gemacht, wie das Brett abzuändern ist, um für das Rechnen mit Zahlen in irgend welchen anderen Systemen zu dienen, und wie, dieser Einrichtung entsprechend, die Ziffern bezeichnet werden können. F.

---

J. M. Schlögel. Eine arithmetische Erscheinung in ihrer Bedeutung für Geographie und Astronomie. Hoffmann Z. XXIII. 177-181.

Mnemotechnische Vorschläge zur Einprägung und Bezeichnung von Zahlen, indem man die einzelnen Ziffern durch Buchstaben ersetzt, aus denen Zifferworte gebildet werden. Lp.

---

H. Pauly. Die Dekade und die Ziffernschrift. Danzig. Selbstverlag. 8 S. gr. 8°.

Phantasien eines Laien über den Zahlbegriff und die Ziffern, ohne jeden wissenschaftlichen Wert. F.

---

H. Pauly. Die Schnellrechenkunst. I. Die Addition und die Subtraction. Danzig. Selbstverlag. 16 S. gr. 8°.

Das Verfahren, welches der Verf. weitläufig und unter Einführung vieler termini technici auseinandersetzt, besteht im wesentlichen darin, dass er bei der Addition sämtliche Ziffern einer Colonne, zahlentheoretisch gesprochen, modulo 5 betrachtet und die Reste für den Modul 5 und die Fünfen selbst gesondert addirt.

F.

---

H. Brocard. Sur une question d'arithmétique. Progreso mat. II. 89-93, 114-119.

An eine Frage von Terquem in den Nouv. Ann. von 1846 anknüpfend, die von J. de Virieu 1872 eine Beantwortung gefunden hatte (F. d. M. IV. 71), benutzt der Verf. das dort gelehrte,

von der rechten Ziffer nach links fortschreitende Divisionsverfahren zur Auffindung der Periode bei der Decimalbruchentwickelung und zur Lösung einiger verwandter Aufgaben. Lp.

---

G. Ingrami. Notarella d'aritmetica. Periodico di Mat. VII. 185-187.

Eine Regel für die Addition periodischer Decimalbrüche. Vi.

---

J. Fontès. Sur la division arithmétique. (Possibilité de la suppression de cette opération.) Assoc. Franç. Pau. XXI. 182-189.

Nach einem neuen Beweise des Satzes, welchen der Verf. in den Schriften der Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse (1891-92) veröffentlicht hat, werden einige Consequenzen desselben gezogen, und die Anwendung des Verfahrens wird an Beispielen erläutert. Gz.

---

M. Philippoff. Symbolische Zahlen und Doppelzahlen. Schlömilch Z. XXXVII. 298-304.

Die Arbeit plädirt für eine allgemeinere Benutzung der symbolischen Schreibweise, nach welcher man eine ganze Function durch die Reihe ihrer Coefficienten ohne Hinzusetzung der Potenzen darstellt. Die Coefficienten des Productes zweier ganzen Functionen werden in Form eines Rechtecks angeordnet, und dieses Schema wird eine Doppelzahl genannt. Einige Beispiele (Taylor'scher Satz und Bernoulli'sche Zahlen) sollen die durch diese Schreibweise herbeigeführten Vereinfachungen erläutern. F.

---

H. W. L. Tanner. Note on approximate evolution. Lond. M. S. Proc. XXIII. 295-297.

Die Note beschäftigt sich mit der Frage, wie gross der Fehler ist, den man begeht, wenn man die Quadratwurzel aus einer Zahl auf $n+1$ Stellen nach dem gewöhnlichen Verfahren genau berech-

net und die nächsten $n$ Stellen sodann durch Division findet. Der wahre Wert ist stets kleiner als der durch diese Annäherung gefundene, und zwar höchstens um eine halbe Einheit der $(2n+1)^{\text{ten}}$ Stelle. Die Fehlergrenze $\frac{1}{2}$ kann auch ersetzt werden durch den kleineren Bruch $\frac{q^2}{2a}$, worin $a$ die durch genaue Rechnung gefundene Zahl und $q$ den durch Division gefundenen Rest bezeichnen. In ähnlicher Weise wird für die angenäherte Berechnung der Kubikwurzel eine Fehlergrenze bestimmt [cf. F. d. M. XIX. 165].

F.

---

P. Marano. Nota sulla quistione 91. Periodico di Mat. VII. 66-68.

Es wird bewiesen, dass $\frac{a^m-(a-1)^m-1}{a(a-1)+1}$ stets und nur dann eine ganze Zahl ist, wenn $m\equiv\pm 1$ oder $\pm 5$ (mod. 12) ist.

Vi.

---

E. Sadun. Sulla divisione dei polinomi interi. Periodico di Mat. VII. 127-132, 178-185.

Praktische Regeln zur Berechnung des Quotienten und des Restes der Teilung von zwei Polynomen. Vi.

---

Vautré. Note d'algèbre. J. de Math. élém. (4) I. 93-94.

Es wird folgender Satz bewiesen:

Hat man $n$ Grössen $a_1, \dots, a_n$ und $n$ andere Grössen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und ist $\Sigma a_1 = 0$, so besteht die Identität:

$$a_1(\Sigma_1 \alpha_1^2 + \Sigma_1 \alpha_1 \alpha_2) + \cdots + a_n(\Sigma_n \alpha_1^2 + \Sigma_n \alpha_1 \alpha_2)$$
$$= \Sigma \alpha_1 [a_1 \Sigma_1 \alpha_1 + \cdots + a_n \Sigma_n \alpha_1],$$

wobei $\Sigma_x$ bedeutet, dass die Grösse mit dem Index $x$ bei der Summation auszuschliessen ist. Gz.

---

M. Borgogelli. Discussione di alcune formole approssimative del calcolo delle radici. Rom. Acc. P. d. N. L. XLV. 101-112.

Bezeichnen $a_1, a_2, a_3, \dots$ Näherungswerte von $\sqrt[n]{x}$ und $e_1$, $e_2$, $e_3, \dots$ die zugehörigen Fehler, so dass:

$$\sqrt[n]{x} = a_1 + e_1 = a_2 + e_2 = a_3 + e_3 = \cdots$$

ist, so werden für diese Grössen folgende Ausdrücke abgeleitet:

$$a_1 = \frac{1}{n}\left\{(n-1)n + \frac{x}{a^{n-1}}\right\},$$

$$e_1 = -\frac{n-1}{2}\frac{e^2}{a} - \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}\frac{e^3}{a^2} - \cdots;$$

$$a_2 = a\frac{(n-1)a^n + (n+1)x}{(n+1)a^n + (n-1)x},$$

$$e_2 = \frac{(n+1)(n-1)}{2^2.3}\frac{e^3}{a^2} - \frac{(n+1)(n-1)}{2^3.3}\frac{e^4}{a^3} + \cdots;$$

$$a_3 = a - \frac{a}{n-1}\left\{1 - \sqrt{1 + \frac{2(n-1)(x-a^n)}{na^n}}\right\},$$

$$e_3 = -\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}\frac{e^3}{a^2} + \frac{(n-1)(n-2)(3n-1)}{2.3.4}\frac{e^4}{a^3} - \cdots.$$

Es werden für $e_1, e_2, e_3$ obere Grenzen angegeben und ein Zahlenbeispiel durchgeführt. Wz.

---

H. Ekama. Een rekenkundige eigenschap der binominaal-coëfficienten. Nieuw Archief. XIX. 105-106.

Einige Betrachtungen werden an die Formel

$$11^n = 10^n + \binom{n}{1}10^{n-1} + \binom{n}{2}10^{n-2} + \cdots + 1$$

geknüpft. Mo.

---

H. W. Segar. On an inequality. Messenger (2) XXII. 47-51.

Ist $m > n$ und $a > b > c > \cdots > l$, so folgt

$$a^m b^n + b^m c^n + \cdots + l^m a^n > a^n b^m + b^n c^m + \cdots + l^n a^m,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{a^m b^n}\left(\frac{b}{c}\right)^{b^m c^n}\cdots\left(\frac{l}{a}\right)^{l^m a^n} > 1.$$

Verschiedene besondere kritische Fälle werden noch untersucht.

Glr. (Lp.)

---

Weitere Litteratur.

D. Amanzio. Elementi di algebra elementare. Napoli. Pellerano. [Riv. di mat. II. 14-17.]

J. R. Boyman. Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. 3. Teil. Arithmetik. In genauer Uebereinstimmung § für § mit Heis' Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 8. Aufl., besorgt von Vering. Düsseldorf. Schwann. XII + 284 S. 8°.

J. and E. J. Brooksmith. Key to arithmetic for beginners. London. Macmillan and Co. [Nature XLVI. 441.]

C. Burali-Forti. Aritmetica razionale (i numeri razionali). Per gli istituti tecnici. Torino. Petrini.

A. Coen. L'aritmetica razionale richiesta dai programmi ministeriali per il ginnasio superiore. II ed. Cosenza. Aprea.

J. Gajdeczka. Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra in den oberen Klassen der Mittelschulen. 2. Aufl. Leipzig. Freytag. IV + 164 S. 8°.

Baron Haller v. Hallerstein. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 10. Aufl. Hrsg. u. erweitert von B. Hülsen. 1. Teil. Arithmetik. Berlin. Nauck & Co. VIII + 334 S. 8°.

H. Heilermann. Lehrbuch für den Unterricht in der Algebra an gewerblichen Fortbildungsschulen. 3. Aufl. Essen. Geck. 58 S. 8°.

H. Heilermann u. J. Diekmann. Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. I. Teil. Die vier Grundrechnungen. Die linearen Gleichungen. 5. Auflage. Essen. Bädeker. VIII + 136 S. 8°.

B. Hülsen und Coler. Niedere Mathematik mit Anwendungen und Beispielen. Zum Gebrauch auf den Königl.

Kriegsschulen bearbeitet. Auf Veranlassung der General-Inspection des Militär-Erziehungs- und Bildungswesens. Berlin. Mittler & Sohn. VI + 263 S. 8°.

L. Kambly. Die Elementar-Mathematik, für den Schulunterricht bearbeitet. I. Teil: Arithmetik und Algebra. Ausg. für Gymnasien. Neu bearb. von H. Langguth. 34. Aufl. (2. Aufl. der Neubearb.) Breslau. Ferd. Hirt. 168 S. 8°.

K. Kniess. Lehrbuch der Arithmetik für Real- und Lateinschulen. 1. Teil. 4. Aufl. München. Kellerer. VI + 83 S. 8°.

G. J. Maier. Lehrbuch der Elementar-Arithmetik zum Gebrauch in Schulen, Lehrerbildungsanstalten und beim Selbstunterricht. II. Teil. Das Rechnen mit algebraischen Zahlengrössen. 2. Aufl. Stuttgart. Gundert. IV + 307 S. 8°.

R. Mazzola. Elementi di aritmetica. Livorno. Giusti. [Periodico di Mat. VIII. 133-134.].

F. Ritter v. Močnik. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, nebst einer Aufgaben-Sammlung für die oberen Klassen der Mittelschulen. 24. Aufl. Wien. C. Gerold's Sohn. V + 309 S. 8°.

S. Sachs. Auflösungen der in M. Hirsch, „Sammlung von Beispielen" u. s. w. enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. 13. Aufl. von G. Valentin. Altenburg. H. A. Pierer. IV + 356 S. 8°.

E. Sadun e C. Soschino. Lezioni di aritmetica. Elementi della teoria dei numeri interi e frazionarii. Torino. G. B. Paravia e Comp. [Periodico di Mat. VII. 197.]

A. Sickenberger. Leitfaden der Arithmetik, nebst Uebungsbeispielen. 5. Aufl. München. Th. Ackermann, Verl.-Cto. VII u. 196 S. Mit Fig. u. 1 Taf. 8°.

A. Sickenberger. Leitfaden der elementaren Mathematik. 1. Teil. Algebra. 2. Aufl. München. Th. Ackermann, Verl.-Cto. VII u. 75 S. 8°.

G. Testi. Corso di matematiche ad uso delle scuole secondarie superiori e più specialmente degli istituti tecnici. Vol. II. Algebra elementare con molti esercizi. Livorno. Guisti.

S. Tzaut. Exercices et problèmes d'algèbre (Première série); receuil gradué renfermant plus de 3880 exercices sur l'algèbre élémentaire jusqu' aux équations du premier degré inclusivement. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. Wrobel. Uebungsbuch zur Arithmetik und Algebra, enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine grosse Zahl von Fragen und Aufgaben. Zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und andern höheren Lehranstalten bearbeitet. 1. Teil. Die sieben arithmetischen Operationen, Proportionen, Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Anhang: Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. 2. Aufl. Rostock. Werther's Verlag. XII + 299 S. 8°.

R. Loosch. Ueber das Schreiben der Zahlen. Hoffmann Z. XXIII. 181-182.

Dressler. Zum heuristischen Verfahren beim Beweisen arithmetischer Gesetze. Hoffmann Z. XXIII. 183-184.

E. Gelin. Caractères de divisibilité. Mathesis (2) II. 65-74, 93-99.

Demczynski. Le proporzioni geometriche precedute dalla teoria delle eguaglianze. Cuneo. Salomone.

P. V. Jensen. Om Roduddragning. Nyt Tidss. for Math. III A. 113-118.

Ueber das Ausziehen der Wurzeln.

J. A. Jarman. Algebraic factors, classified and applied. London. VIII + 141 S.

H. St. J. Hunter. Decimal approximations; a chapter on arithmetic. London. 56 S.

# Capitel 2.

## Zahlentheorie.

### A. Allgemeines.

P. Bachmann. Die Elemente der Zahlentheorie. Leipzig. B. G. Teubner. XII + 264 S. 8°. [New York M. S. Bull. III. 215-222, Darboux Bull. (2) XVII. 18-21].

Es ist als ein sehr zeitgemässes und dankenswertes Unternehmen zu bezeichnen, welches der Verf. mit der vorliegenden Schrift eröffnet, nämlich das „einer Gesamtdarstellung des heutigen Standes der Zahlentheorie“.

Rühmlichst bekannt ist ja des Verfs. Monographie: „Lehre von der Kreisteilung“; in ähnlicher Weise beabsichtigt er, von den verschiedenen Gebieten der Zahlentheorie ein übersichtliches Bild zu entwerfen, ohne etwa eine absolute Vollständigkeit im Stoffe anzustreben.

Als Grundlage des Ganzen soll die hier zu besprechende Einführung in die Elemente der Zahlentheorie dienen; man darf keineswegs sagen, dass etwa dieser Teil dem Verf. die geringsten Schwierigkeiten bereitet habe: im Gegenteil, wo bereits eine Reihe, zum Teil vorzüglicher Lehrbücher für die Elemente existirt, hatte eine Darstellung, die eigenartig und fesselnd sein wollte, ohne doch an das Verständnis des Lesers zu grosse Anforderungen zu stellen, einen schweren Stand.

Wir glauben aber von vorn herein (ohne etwa mit allen Einzelnheiten der Ausführung einverstanden zu sein) behaupten zu dürfen, dass der Verf. seine Aufgabe in dem bezeichneten Sinne sehr gut gelöst hat. Allerdings setzt er Leser voraus, die eine Geistesbildung besitzen, welche vor frühzeitiger Einführung abstracter aber weitreichender Begriffe nicht zurückschreckt; indessen ist gerade dies Streben nach einer möglichst breiten logischen Grundlage auch den übrigen mathematischen Disciplinen zur Zeit eigentümlich und sicher auch berechtigt, falls nicht die als Gegenwirkung dienende Durchdringung mit dem Concreten darüber vernachlässigt wird.

Ein solcher allgemeiner Begriff ist vor allem der einer „Gruppe“ von Zahlen (etwa von algebraischen Zahlen) oder überhaupt von Elementen, die wie Zahlen nach bestimmten Rechnungsregeln verknüpft werden sollen, wenn nur für diese Elemente die Multiplication in bestimmter Weise definirt ist. Solche Elemente sind z. B. die Restklassen (mod. $n$).

Eine Gruppe einer (endlichen) Reihe von Elementen $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist dann dadurch charakterisirt, dass auch jedes Product $a_i a_k$ ($i$ gleich oder ungleich $k$) der Gruppe angehört.

Dieser Begriff der Gruppe liegt implicite bereits dem anschaulichen, von Poinsot herrührenden Beweise des Euklidischen Fundamentalsatzes (der eindeutigen Zerlegung einer Zahl in Primfactoren) zu Grunde; man ist dadurch in der Lage, den Euklidischen Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen umgehen zu können.

Die elementare Lehre von den Congruenzen ersten Grades erwächst nun ganz aus dem Begriff der Gruppe. Die schwierigeren Fragen, so z. B., für welche Moduln primitive Wurzeln vorhanden sind, werden mit Hülfe eines wichtigen Satzes von Kronecker überwunden, wonach für jede Gruppe, bei deren Multiplicationsart auch noch das commutative Gesetz befolgt wird, alle Elemente, und zwar jedes nur einmal, in der Gestalt $\alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_\omega^{m_\omega}$ darstellbar sind, wo die Exponenten ganze positive Zahlen sind, die noch innerhalb gewisser Grenzen variiren.

Der von den quadratischen Resten handelnde Abschnitt zeichnet sich vor allem aus durch einen übersichtlichen Rückblick auf die Erfindung und Begründung des Reciprocitätsgesetzes (mit dem Nachweise, dass die erste Aufstellung des Gesetzes Euler gebührt).

Die vielen, bisher für das Gesetz erbrachten Beweise werden in vier Kategorien eingeteilt. Die erste derselben wird durch den ersten, von Dirichlet vereinfachten Beweis von Gauss repräsentirt; die zweite Art stützt sich auf die Lehre von der Zusammensetzung der quadratischen Formen; die dritte Kategorie beruht auf der Kreisteilung, während die vierte das sogenannte Gaussische Lemma zum Ausgangspunkte nimmt und weiterhin die Gaussische Charakteristik möglichst direct zu bestimmen sucht.

Man findet bei dem Verf. unter andern die zur letzten Kategorie gehörigen, schönen Beweise von Kronecker und Schering (den letzteren für das verallgemeinerte Reciprocitätsgesetz).

In der Lehre von den quadratischen Formen — der Verf. beschränkt sich übrigens der Anschaulichkeit halber auf die eigentlich primitiven Formen — wird der principielle Standpunkt durchgeführt, die der Algebra angehörige Theorie der Transformation zu vermeiden und alles auf der Darstellung einer Zahl durch eine quadratische Form aufzubauen. Freilich hat dieser Standpunkt, so wie er hier vertreten wird, das Missliche, dass das rechnerische Element zu stark in den Vordergrund gerückt wird.

Der möglichst direct entwickelte Begriff der Hauptform führt auf eine gefällige Art zu den einfachsten Sätzen über die Composition der Formen. Als interessante Anwendung wird der zweite Kummer'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes vorgeführt.

Ref. kann nur den Wunsch ausdrücken, dass dem Verf. die Zeit und Kraft bleiben möge, um sein grosses Werk in dem Sinne dieses ersten Bandes bis zu Ende zu führen. My.

---

G. B. Mathews. Theory of numbers. Part I. Cambridge. Deighton, Bell and Co. XII + 323 S. [Nature XLVII. 289.]

Dieser Band ist ein äusserst schätzenswerter Beitrag zu unserer Lehrbücher-Litteratur und wird sofort seine Stelle als ein ständiges Werk über einen Gegenstand einnehmen, der von sehr grossem mathematischem Interesse ist, der aber bisher dem englischen Studenten schwer zugänglich gewesen ist. Das Buch verlangt einen mitdenkenden Leser, da der Stil etwas spröde ist und die Beweise im allgemeinen knapp sind; aber die gewonnene Einsicht belohnt die aufgebotene Anstrengung reichlich. Das Eröffnungscapitel beschäftigt sich mit der Teilbarkeit der Zahlen und der elementaren Theorie der Congruenzen und folgt ziemlich genau den ersten drei Sectionen der Disquisitiones arithmeticae. Quadratische Congruenzen und binäre quadratische Formen werden in den nächsten vier Capiteln abgehandelt. Dieselben enthalten mannigfachen interessanten Stoff, und vornehmlich wird die geometrische Theorie betont.

Nach einem Capitel über die Composition der Formen, die mittels der bilinearen Substitution behandelt wird, folgt ein Capitel über die Kreisteilung; dasselbe ist dem Anscheine nach das beste Beispiel für die Beherrschung der Darstellung durch den Verfasser, und jedenfalls erscheint es dem Referenten ausserordentlich frisch und klar. Die Schlusscapitel sind der Bestimmung der Anzahl eigentlich primitiver Klassen für eine gegebene Determinante gewidmet, ferner den Anwendungen der Theorie der quadratischen Formen und der Verteilung der Primzahlen. Das Buch ist augenscheinlich mit einer vollen Kenntnis des Gegenstandes geschrieben, und Anführungen von Hauptschriftstellern am Ende jedes Capitels erhöhen den Wert des auch sonst ausgezeichneten Lehrbuches. Hoffentlich wird das Erscheinen des zweiten Teiles nicht lange auf sich warten lassen. Gbs. (Lp.)

---

J. G. Birch. Numerical factors: a theorem. Messenger (2) XXII. 52-55.

Ist $x$ eine Zahl kleiner als $N$, und drückt man den Bruch $\frac{N}{N-x}$ als einen Kettenbruch aus:

$$\frac{1}{a_0-1}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_s},$$

so ist

$$N=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots \\ -1 & a_1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & a_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}=(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{s-1}, a_s).$$

Die Lage ist nun so, dass man bei willkürlicher Annahme von $x$ über die Factoren von $N$ aus dieser „Continuante" nichts erfährt. Wenn dagegen $x$ der diophantischen Gleichung $x^2=Ny+1$ genügt, so hat die Continuante eine ungerade Anzahl von Zeilen und Colonnen und ist symmetrisch an beiden Enden der Diagonale gegen das mittlere Element; sie ergiebt somit durch den blossen Anblick

11*

einen Factor von $N$. Man hat nämlich in diesem Falle

$$N = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0),$$

und $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ ist ein Factor von $N$. Glr. (Lp.)

---

W. W. R. Ball. Note on a problem in the theory of numbers. Messenger (2) XXII. 82-83.

Anwendung des Satzes des Hrn. Birch (vergl. das vorangehende Referat) zur Bestimmung der Factoren der Fermat'schen Zahl 100 895 598 169. Glr. (Lp.)

---

G. Speckmann. Zur Zahlentheorie. Hoppe Arch. (2) XI. 439-441.

Eine Anmerkung zum Gebrauch des Siebes des Eratosthenes. Sn.

---

D. Seliwanow. Ueber die Zerlegung der Zahlen in Factoren. II. Mosk. Math. Samml. XVI. 469-482. (Russisch.)

Es handelt sich um die Ableitung der Resultate von E. Lucas über die Teilbarkeit der Zahlen

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad v_n = a^n + b^n,$$

wo $a$ und $b$ die Wurzeln einer quadratischen ganzzahligen Gleichung $x^2 - Px + Q = 0$ sind. Wi.

---

S. Levänen. Om talens delbarhet. Öfversigt af finska vetenskapssocietetens förhandlingar, Helsingfors. XXXIV. 109-162.

Es wird gezeigt, wie man die kleinste Zahl $t$ bestimmen kann, für welche $a^t \equiv 1$ (mod. $b$) und speciell $10^t \equiv 1$ (mod. $b$) ist. In einer Tabelle werden die $t$-Werte, welche für $a = 10$ zu Primzahlen unterhalb 200 und zu einigen grösseren gehören, zusammengestellt. Die $t$-Werte, welche den zusammengesetzten Zahlen entsprechen, sind kleinste gemeinsame Teiler der $t$ ihrer Primfactoren.

Nach Bestimmung des zu einer gegebenen Zahl $b$ gehörenden $t$-Wertes kann man ziemlich leicht eine Regel finden, nach wel-

cher zu entscheiden ist, ob eine Zahl $N$ durch $b$ teilbar ist, oder nicht. Für $b=37$ ist z. B. $t=3$, und die Regel wird: Man teile von rechts oder links aus die Ziffern von $N$ in Klassen zu je 3 ein; man addire die dreiziffrigen Zahlen, welche den verschiedenen Klassen entsprechen (die letzte Klasse, wenn nötig, durch Nullen ergänzt); die Summe muss durch 37 teilbar sein. Eine Verallgemeinerung der so gewonnenen Kriterien wird durch Anwendung der Congruenz $10^x \equiv c$ (mod. $b$) gewonnen, wo $c<b$ und relativ prim zu $b$ ist. Das allgemeine Verfahren und verschiedene Modificationen desselben werden an mehreren Beispielen erläutert.

Die praktische Bedeutung der fraglichen Methoden ist, wie der Verf. es selbst zugiebt, ziemlich klein, obgleich sie in gewissen Hinsichten theoretisches Interesse darbieten können.

Zum Schluss folgt eine Tabelle über kleinste Reste der Zahlen $10^n$. Bdn.

---

S. Levänen. En metod för upplösande af tal i faktorer. Öfversigt af finska vetenskapssocietetens förhandlingar XXXIV. 334-376.

Es wird gezeigt und durch Beispiele und Tabellen erläutert, wie man die Theorie der binären quadratischen Formen benutzen kann, um gegebene Zahlen in Factoren zu zerlegen. Bdn.

---

G. Speckmann und R. H. van Dorsten. Kriterien der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Schlömilch Z. XXXVII. 58.

K. Haas. Kriterien der Teilbarkeit der Zahlen. Schlömilch Z. XXXVII. 63-64.

G. Speckmann. Kriterien der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Schlömilch Z. XXXVII. 128.

R. H. van Dorsten. Ueber die Kennzeichen der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Schlömilch Z. XXXVII. 192.

J. Dörr. Kriterien der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Schlömilch Z. XXXVII. 383-384.

---

G. Osborn. Note on the numerator of a harmonical progression. Messenger (2) XXII. 51-52.

Ist $p$ eine Primzahl grösser als 3, so ist der Zähler der harmonischen Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$

durch $p^2$, aber nicht durch eine höhere Potenz teilbar.

Glr. (Lp.)

---

J. J. Sylvester, H. J. Woodall. Solution of question 10951. Ed. Times LVI. 25.

Hr. Sylvester hat den folgenden Satz zum Beweise vorgeschlagen:

Sind $m$ und $i$ zwei ganze Zahlen, von denen $i$ nicht die grössere ist, so enthält das Product $(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+i)$ irgend einen Factor, der nicht in $1.2.3\ldots i$ vorkommt. Die von Hrn. Woodall angestellte Ueberlegung reicht nicht hin; der Beweis würde nach einer Anmerkung des Herrn Sylvester sehr umfangreich sein.

Lp.

---

J. J. Sylvester, H. W. Curjel. Solution of question 11480. Ed. Times LVII. 113-114.

Das Symbol $H(x/a)$ bedeute $x/a$, wenn der Bruchteil von $x/a$ gleich $\frac{1}{2}$ ist, sonst aber die nächst gelegene ganze Zahl für $x/a$; die Folge der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ... werde durch $p_1, p_2, p_3, \ldots$ bezeichnet. Nimmt man nun an, dass $p_i$ gleich $\sqrt{2n}$ oder gleich der nächsten Primzahl unter $\sqrt{2n}$ ist, so stellt die Formel

$$n-\Sigma H(n/p_i)+\Sigma H(n/p_ip_j)-\Sigma H(n/p_ip_jp_k)+\cdots$$

(oder falls dies eine gebrochene Zahl wird, ihr ganzzahliger Bestandteil) die Anzahl der Primzahlen dar, die grösser als $n$ und nicht grösser als $2n$ sind.

Lp.

---

J. J. Sylvester, R. W. D. Christie. Solution of question 11084. Ed. Times LVI. 67-68.

Wenn $\eta(u)$ die Anzahl der Primzahlen bedeutet, die nicht grösser sind als $u$, ferner $p_1, p_2, \ldots, p_i$ die Primzahlen sind, die nicht über $\sqrt{x}$ hinausgehen, endlich $q_1, q_2, \ldots, q_j$ diejenigen zwischen $\sqrt{x}$ und $x$, so ist

$$\Sigma\eta\left(\frac{x}{p}\right) - \Sigma\eta\left(\frac{x}{q}\right) = (\eta\sqrt{x})^2.$$

Lp.

---

E. Cesàro. A proposito d'una generalizzazione della funzione $\varphi$ di Gauss. Periodico di Mat. VII. 1-6.

Ueber verschiedene Eigenschaften der von L. Carlini (Sopra un problema della teoria dei numeri, Periodico di Mat. VI. 119-122; F. d. M. XXIII. 1891. 182) eingeführten zahlentheoretischen Function $\varphi\binom{k}{n}$, deren Ausdruck ist:

$$\varphi\binom{k}{n} = k^n\left(1-\frac{1}{u^n}\right)\left(1-\frac{1}{v^n}\right)\left(1-\frac{1}{w^n}\right)\cdots,$$

wo $u, v, w, \ldots$ die verschiedenen Primfactoren von $k$ bezeichnen.

Vi.

---

J. Fontès. Critérium de divisibilité par un nombre quelconque. C. R. CXV. 1259-1261.

Es sei $M$ nicht mit Factoren behaftet, welche Teiler der Grundzahl $B$ des Zahlensystems sind. Soll dann der kleinste Rest einer Zahl $N$ (mod. $M$) gefunden werden, so wird zunächst eine Zahl $\Delta_m$ abgeleitet, die kleiner als $N$, aber congruent $N$ (mod. $M$) ist, sodann Zahlen $\theta_m$ u. s. w.

Um z. B. das Kriterium der Teilbarkeit einer Zahl $N$ des dekadischen Systems durch 43 resp. den kleinsten Rest derselben (mod. 43) zu ermitteln, beachte man, dass $10^{21}+1 \equiv 0$ (mod. 43) ist, und führe dadurch statt $N$ eine Zahl $\Delta_{21}$ ein, welche höchstens 21 Ziffern hat. Da $10^7-6 \equiv 0$ (mod. 43) ist, teile man weiter $\Delta_{21}$ in Gruppen von je 7 Ziffern; dadurch erhält man

$$\theta_7 = -7\alpha_7 + 6\beta_7 + \gamma_7.$$

Sodann bekommt man

$$\theta_3 = -8\alpha'_1 + 11\beta'_3 + \gamma'_3 \quad \text{und} \quad \theta_2 = 14\alpha''_1 + \beta''_2$$

und hierdurch den kleinsten Rest von $N$ (mod. 43). Wz.

---

J. W. L. Glaisher. On the connexion between recurring formulae involving sums of divisors and the corresponding formulae involving differences between sums of even and uneven divisors. Phil. Mag. (5) XXXIII. 54-61.

Wenn $\zeta(n)$ den Ueberschuss der Summe der ungeraden Teiler von $n$ über die Summe der geraden Teiler bedeutet, und wenn man dem Symbol $\zeta(0)$, das vorkommt, wenn $n$ eine Triangularzahl ist, den Wert $-n$ beilegt, so ist (Lond. M. S. Proc. XV. 110):

$$\zeta(n)+\zeta(n-1)+\zeta(n-3)+\zeta(n-6)+\zeta(n-10)+\cdots = 0.$$

Die entsprechende Formel, welche sich auf die Summen der Teiler bezieht, lautet (Quart. J. XIX. 220):

$$\sigma(n)-3\sigma(n-1)+5\sigma(n-3)-7\sigma(n-6)+9\sigma(n-10)-\cdots = 0,$$

worin $\sigma(n)$ die Summe aller Divisoren von $n$ bedeutet und $\sigma(0) = \frac{1}{3}n$ ist. In dem gegenwärtigen Aufsatze wird gezeigt, dass jene beiden Formeln aus einem einzigen allgemeinen Theorem herleitbar sind, das sich auf die wirklichen Divisoren der Zahlen $n$, $n-1$, $n-3$, ... bezieht, und es ist hauptsächlich interessant zu beobachten, wie es kommt, dass die Coefficienten in beiden Fällen die obigen Formen annehmen. Das allgemeine Theorem (mitgeteilt in dem Artikel „Relations between the divisors of the first $n$ natural numbers“, Lond. M. S. Proc. XXII, F. d. M. XXIII. 1891. 177) wird wie folgt festgestellt:

Man bezeichne mit $G_r\{\varphi(d), \psi(d), \ldots\}$ die Gruppe der Zahlen:

$$\begin{array}{l} \varphi(1),\ \varphi(d_1),\ \varphi(d_2),\ \ldots,\ \varphi(d_f); \\ \psi(1),\ \psi(d_1),\ \psi(d_2),\ \ldots,\ \psi(d_f); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

wo $1, d_1, d_2, \ldots, d_f$ alle Divisoren von $r$, dem Suffix von $G$, sind; dann heben sich die durch die Formel

$$G_n(d) - G_{n-1}(d, d\pm1) + G_{n-3}(d, d\pm1, d\pm2) - G_{n-6}(d, d\pm1, d\pm2, d\pm3) + \cdots$$

gegebenen Zahlen alle gegenseitig fort, wenn $n$ nicht eine Triangularzahl ist. Ist aber $n$ eine Triangularzahl $\frac{1}{2}g(g+1)$, so verbleiben ungehoben:

$$\text{eine } 1, \quad \text{zwei } 2^{\text{en}}, \quad \text{drei } 3^{\text{en}}, \quad g\text{-mal } g,$$

indem diese Zahlen das positive oder das negative Zeichen haben, je nachdem $g$ ungerade oder gerade ist.

Es ist einleuchtend, dass die Summe der Zahlen in der ersten Gruppe die Summe der Divisoren von $n$ ist, in der zweiten Gruppe dreimal die Summe der Divisoren von $n-1$, u. s. w. Mithin ist $\sigma(n)-3\sigma(n-1)+\cdots$ Null, wenn $n$ nicht eine Triangularzahl ist; dagegen gleich

$$(-1)^{g-1}(1^2+2^2+3^2+\cdots+g^2), \quad \text{d. h.} \quad (-1)^{g-1}\cdot\tfrac{1}{6}g(g+1),$$

wenn $n$ die Triangularzahl $\frac{1}{2}g(g+1)$ ist. Da nun der Coefficient von $\sigma(0)$, wenn dies vorkommt, $(-1)^g(2g+1)$ ist, so kann der $\sigma$-Ausdruck für alle Werte von $n$ der Null gleich gesetzt werden, wenn $\sigma(0)=\frac{1}{6}g(g+1)=\frac{1}{3}n$. Die Tabulirung der Gruppen, wie sie in dem Aufsatze gegeben wird, macht den Beweis ausserordentlich einfach, sowohl für den $\zeta$-Ausdruck wie für den zuerst aufgestellten. Abänderungen an diesen Formeln werden in dem letzten Teile des Artikels betrachtet. Gbs. (Lp.)

---

J. Perwuschin. Eine Formel für die Primzahlen.
Kasan Ges. (2) I. 70-71. (Russisch.)

L. K. Lachtin. Ueber einen empirisch von Perwuschin gefundenen Satz. Mosk. Math. Samml. XVI. 460-468. (Russisch.)

Herr Perwuschin teilt in dem „Bulletin de la Société Physico-mathématique“ Bd. I den folgenden Satz mit, den er empirisch gefunden hat: „Es sei $p$ eine Primzahl, $N$ ihre Stelle in der Reihe der Primzahlen, dann ändert sich $d=\frac{p}{N}-\frac{\sum_1^p p}{\sum_1^N N}$ sehr langsam bei Vergrösserung von $p$. Die Rechnungen des Herrn Perwuschin bewogen ihn, diese Grenze gleich 0,552 anzunehmen. Indem Herr

Lachtin die Formel von Tschebyscheff für die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl $z$ benutzt, findet er, dass $d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log p + \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{\log^2 p}$. Die Grenze von $d$ ist also $\frac{1}{2}$. Wi.

---

P. W. Preobraschensky. Ueber ein merkwürdiges Maximum der Riemann'schen Function. Abhandl. der physikalischen Abth. der Gesellschaft der Freunde der Naturkunde in Moskau. V. Heft 1. (Russisch.)

Die Riemann'sche Function: $R(z) = \mathrm{Li}\,z - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\,z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\mathrm{Li}\,z^{\frac{1}{3}} - \cdots$, welche die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl $z$ giebt, hat einen Inflexionspunkt für $z = 13256519$. Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass die Riemann'sche Function daher nur für die Zahlen, welche nicht viel grösser als 14 Millionen sind, ausreichen dürfte. Wi.

---

F. Foussereau. Sur la fréquence des nombres premiers. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 31-34.

Asymptotischer Wert eines Ausdrucks für die Häufigkeit der Primzahlen in einem speciell abgegrenzten Intervall, wenn die obere Grenze des letzteren unbegrenzt zunimmt. Der Grenzübergang scheint sehr fragwürdiger Natur. Sn.

---

V. Stanievitch. Sur un théorème arithmétique de M. Poincaré. C. R. CXIV. 109-112.

E. Phragmén. Sur la distribution des nombres premiers. C. R. CXIV. 337-340.

Das Theorem des Herrn Poincaré findet sich C. R. CXIII. 819 (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 205). Herr Staniewitsch liefert einen Beweis, welcher zur Bestimmung der Anzahl der unter einer gegebenen Grenze liegenden Primzahlen von einer beliebig vorgeschriebenen Linearform führt, indem er an eine von Herrn Mertens herrührende Methode anknüpft. (F. Mertens: „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie". Ueber die Verteilung der Primzahlen.

J. für Math. LXXVIII. 46-63; F. d. M. VI. 1874. 116-117). Herr Phragmén macht auf den Zusammenhang der Resultate des Herrn Poincaré mit seiner eignen Arbeit: Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann (Stockh. Öfv. XLVIII. 599-615; F. d. M. XXIII. 1891. 299-300) aufmerksam. Auch bringt er eine Reihe von historischen Anmerkungen, welche in allgemeineren Untersuchungen von Gauss, Dirichlet, Tschebyscheff und Jensen den Ursprung analoger Theoreme darthun. Sn.

---

L. Gegenbauer. Ueber die Tschebyscheff-de Polignac'sche Identität. Monatsh. f. Math. III. 319-335.

Die betreffende Identität, welche bekanntlich bei der Ermittlung der oberen und unteren Grenze für die Anzahl der in einem vorgeschriebenen Intervalle liegenden Primzahlen gebraucht wird, wird hier auf eine Klasse sehr allgemeiner zahlentheoretischer Functionen ausgedehnt. Der Verfasser betrachtet $f(m)$ als die Anzahl derjenigen Systeme von $r$ beliebigen, $m$ nicht überschreitenden ganzen Zahlen, deren grösster gemeinsamer Teiler irgend eine bestimmte Eigenschaft besitzt, deren Specialisirung sodann die obige Identität und eine grosse Zahl analoger Formeln ergiebt. Sn.

---

H. Poincaré. Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebycheff. Journ. de Math. (4) VIII. 25-68.

Die Abhandlung bezweckt, die bekannten von Tschebyscheff entwickelten Methoden zur Bestimmung der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grenze auf das Gebiet der complexen Zahlen auszudehnen. Die ersten Abschnitte enthalten im wesentlichen die Ableitung der Tschebyscheff'schen Sätze, und es finden hierbei auch die von Sylvester herrührenden Zusätze (vgl. F. d. M. 1891. 181) Berücksichtigung. Es werden dann die Grundprincipien der Theorie der Ideale nach Dedekind dargelegt. Im folgenden

Abschnitte wird die Formel

$$T(x) = \Sigma\Theta\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$$

bewiesen, welche der bekannten Tschebyscheff'schen Formel nachgebildet ist; in derselben bedeutet $T(x)$ die Summe der Logarithmen der Normen aller derjenigen Ideale eines algebraischen Zahlkörpers, deren Norm diejenige von $x$ nicht überschreitet; ferner bezeichnet $\Theta\sqrt[m]{\frac{x}{n}}$ die Summe der Logarithmen der Normen aller derjenigen Primideale, deren Norm die $m^{te}$ Wurzel derjenigen von $x$, dividirt durch die $m^{te}$ Wurzel der Norm von $n$, nicht überschreitet; die Summe ist in obiger Formel über alle positiven ganzen rationalen Zahlen $m$ und über alle Ideale $n$ des Körpers zu erstrecken. Die Formel wird im letzten Teile der Arbeit auf den einfachen Fall des quadratischen, aus der imaginären Einheit $i$ zusammengesetzten Zahlkörpers angewandt — ein Fall, in welchem freilich die Idealtheorie noch gar nicht zur Geltung kommt. Der Verfasser findet, dass die Summe der Logarithmen der Primzahlen von der Form $4n+1$, welche $x$ nicht überschreiten, unendlich oft kleiner als $ax$, wenn $a > \frac{1}{2}$, und unendlich oft grösser als $ax$ ausfällt, wenn $a < \frac{1}{2}$ ist. Ht.

---

R. Dedekind. Ueber einen arithmetischen Satz von Gauss. Prag. Math. Ges. 1892. 1-11.

Der betreffende Satz lautet: „Wenn die Coefficienten der beiden ganzen Functionen

$$P = x^m + p_1x^{m-1} + p_2x^{m-2} + \cdots + p_m,$$
$$Q = x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_n$$

der Variable $x$ rationale, aber nicht sämtlich ganze Zahlen sind, so können auch die Coefficienten ihres Productes

$$PQ = x^{m+n} + r_1x^{m+n-1} + \cdots + r_{m+n}$$

nicht sämtlich ganze Zahlen sein." In dieser Form findet er sich im Art. 42 der Disquisitiones arithmeticae. Herr Dedekind macht darauf aufmerksam, dass die obige Fassung zwar für den in diesem

Werke, speciell im Art. 341, davon zu machenden Gebrauch vollständig ausreicht, dass aber der von Gauss gegebene Beweis eine weit grössere Tragweite besitzt. Es werden zunächst andere, weitere Formen gesucht, um den Inhalt dieser bezüglichen Erweiterung scharf zu fassen. Sodann aber sollen an Stelle der rationalen Coefficienten beliebige algebraische Zahlen (Wurzeln von Gleichungen mit rationalen Coefficienten) treten; es wird nach den analogen Formulirungen gefragt, wenn es sich um die allgemeine Zahlentheorie, um die Begriffe des endlichen Zahlenkörpers und der ihm angehörenden Ideale handelt. Es wird zunächst der Satz bewiesen: „Wenn die ganze Function

$$f(x) = c_0 x^\varkappa + c_1 x^{\varkappa-1} + \cdots + c_\varkappa$$

lauter ganze Coefficienten hat, und $\omega$ irgend eine Wurzel der Gleichung $f(\omega) = 0$ bedeutet, so hat auch die ganze Function

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\omega}$$

lauter ganze Coefficienten". Aus diesem Theorem folgt durch einen einfachen Uebergang: „Wenn das Product aus zwei Functionen $f(x)$, $g(x)$ lauter ganze Coefficienten besitzt, so ist jedes aus einem Coefficienten von $f(x)$ und einem Coefficienten von $g(x)$ gebildete Product eine ganze Zahl". Der Verfasser erinnert nun aber an den § 14 der Kronecker'schen Festschrift. Um die dort niedergelegten Betrachtungen zu vereinfachen und zu vervollständigen, erscheint es als notwendig, einen Beweis des zuletzt angeführten Satzes zu suchen, welcher von der Zerlegung der Function $f(x)$ in Factoren ersten Grades $x-\omega$ unabhängig ist. Ein solcher Beweis wird mit Hülfe von einigen wenigen Begriffen aus der Theorie der Moduln geführt; und zwar kommen nur endliche Moduln zur Anwendung. — Es verdient wohl noch hervorgehoben zu werden, dass folgende Fassung des Satzes der weitesten Verallgemeinerung fähig wäre: „Der Teiler eines Productes von zwei Functionen ist das Product aus den Teilern der beiden Factoren." Sn.

---

L. Gegenbauer. Ueber die G. Cantor'sche Zerlegung der reellen Zahlen in unendliche Producte. Monatsh. f. Math. III. 87-91.

Jedem einfachen Zahlensysteme mit den Elementen

$$a_1 = 1, \quad a_\mu = \prod_1^{\mu-1}(\beta_\lambda+1) \qquad \mu > 1,$$

in welchem die untere Grenze für jeden einzelnen Darstellungscoefficienten gleich Null ist, entspricht eine einzige ganz bestimmte Darstellung jeder die Einheit dem absoluten Betrage nach übersteigenden reellen Zahl durch ein unendliches Product, dessen Factoren die Gestalt

$$1+\frac{1}{a_\lambda}+\frac{1}{a_\lambda^2}+\cdots+\frac{1}{a_\lambda^{\beta_\lambda}}$$

haben. Wz.

---

Fr. Haag. Graphische Auflösung der diophantischen Gleichungen ersten Grades. Hoffmann Z. XXIII. 161-170.

Für Unterrichtszwecke zurecht gelegt. In einer Nachschrift weist die Redaction auf Schriften ähnlicher Richtung hin, besonders auf: S. Günther, „Operative Arithmetik und Geometrie der Gittersysteme", Hoffmann Z. XIII. 3-18, 93-110 (1882), wo auch S. 110 die zugehörige Litteratur angeführt ist. Lp.

---

J. P. Gram. Om den ubestemte Ligning af 1ste Grad. Nyt Tidss. for Math. III B. 57-71, 73-85.

Die Abhandlung behandelt auf rein elementare Weise die Lösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades. Sie giebt eine historische Uebersicht über die verschiedenen Methoden, die zu der Lösung dieser Gleichungen verwendet sind. Diese werden verglichen, und es wird insbesondere hervorgehoben, wie man die kleinsten Lösungen finden kann. V.

---

A. Tagiuri. Sulla partizione dei numeri. Periodico di Mat. VII. 93-96, 126-127.

Es werden einige Eigenschaften der Zahlen $s_{m,p}$, $s'_{m,p}$ aufgestellt, welche die Anzahl der nicht negativen oder der positiven ganz-

zahligen Lösungen des Systemes:

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\ \lambda_2+\cdots+\ \lambda_m=p, \\ \qquad \lambda_1+2\lambda_2+\cdots+m\lambda_m=m, \end{cases}$$

bezw.

$$\begin{cases} \lambda_1+\ \lambda_2+\cdots+\ \lambda_m=p, \\ \lambda_1+2\lambda_2+\cdots+m\lambda_m=m \end{cases}$$

angeben. Vi.

---

S. Tebay. Solution of question 10945. Ed. Times LVI. 34-36.

Bestimmung der Anzahl von Arten, eine gegebene Summe $s$ aus $i$ verschiedenen ganzen Zahlen zu bilden, von denen keine grösser als eine gegebene Zahl $q$ ist, nach einem eigentümlichen Verfahren. Lp.

---

Levavasseur. Sur un problème d'analyse indéterminée, qui se rattache à l'étude des fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques à deux variables. C. R. CXV. 1006-1009.

Bei seinen Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe mit zwei Variabeln (Ann. de l'École Norm. 1881 und 1885, vgl. F. d. M. XIII. 1881. 389 und XVII. 1885. 412) bot sich Herrn Picard gelegentlich die Notwendigkeit, folgende Bedingungen zu erfüllen: Nimmt man aus den vier Zahlen $\lambda$, $\mu$, $b_1$, $b_2$ irgend zwei heraus, z. B. $\lambda$ und $b_1$, so muss $\lambda+b_1-1$ gleich dem reciproken Werte einer ganzen Zahl werden, und dasselbe muss für $2-\lambda-b_1-b_2$ eintreten, wenn man drei beliebige dieser Zahlen auswählt, z. B. $\lambda$, $b_1$, $b_2$. Der Verfasser löst nun allgemein die Aufgabe: „Alle Systeme von vier Zahlen $a$, $b$, $c$, $d$ zu finden, welche so beschaffen sind, dass die 10 Zahlen

$$a+b-1,\ \ a+c-1,\ \ a+d-1,\ \ b+c-1,\ \ b+d-1,\ \ c+d-1,$$
$$2-b-c-d,\ \ 2-c-d-a,\ \ 2-d-a-b,\ \ 2-a-b-c$$

die reciproken Werte ganzer Zahlen werden“. Bm.

---

G. de Longchamps. Sobre las igualdades de dos grados. Progreso mat. II. 313-317.

Uebersetzt aus J. de Math. élém. (3) III; vgl. F. d. M. XXI. 1889. 179.

---

M. Frolov. Égalités à deux et à trois degrés. S. M. F. Bull. XX. 69-84.

Weitere Eigenschaften der Zahlengruppen, welche den Bedingungen

$$\Sigma a = \Sigma A,$$
$$\Sigma a^2 = \Sigma A^2,$$

resp. noch der dritten

$$\Sigma a^3 = \Sigma A^3$$

genügen (cf. F. d. M. XXI. 1889. 179).

Die Arbeit beschäftigt sich namentlich mit der graphischen Darstellung solcher Zahlengruppen und speciell mit magischen Quadraten, bei denen nicht nur die Summen aller Horizontal-, aller Vertical-Reihen und der beiden Diagonalen denselben Wert liefern, sondern auch die entsprechenden Summen der Quadrate der einzelnen Glieder. F.

---

K. Szigmondy. Zur Theorie der Potenzreste. Monatsh. f. Math. III. 265-284.

In der vorliegenden Abhandlung wird folgendes Problem gelöst: „Es sollen alle ganzen Zahlen $k$ angegeben werden, welche zu zwei vorgegebenen ganzen Zahlen $a$ und $b$ relativ prim sind und die Eigenschaft besitzen, dass die Congruenz $a^\sigma \equiv b^\sigma$ (mod. $k$) durch den ebenfalls vorgegebenen ganzen positiven Wert $\sigma = \gamma$ und durch keinen kleineren erfüllt wird." Unter den sich anschliessenden Nebenresultaten sind die wichtigsten Beweise für den Satz, dass jede arithmetische Progression unendlich viele Primzahlen hat, und für die Irreductibilität der Kreisteilungsgleichung. Daneben wird an die Arbeiten von Lefébure (vgl. F. d. M. XVI. 1884. 159) und von Bang (F. d. M. XIX. 1887. 168) erinnert. Sn.

---

K. Reich. Zur Theorie der quadratischen Reste. Hoppe Arch. (2) XI. 176-192.

Es wird die Anzahl der incongruenten Zahlen $c$ bestimmt, für welche $\left(\frac{c}{p}\right)$ und $\left(\frac{c+h}{p}\right)$ constant sind, wenn $h$ gegeben ist. So-

dann finden sich Formeln zur Bestimmung der über alle $c$ genommenen Summen und Producte. Sn.

---

M. Frolov. Sur les résidus quadratiques. Assoc. Franç. Pau. XXI. 149-159.

Für die Primzahlen und für die zusammengesetzten Zahlen werden Andeutungen über die Bildung und die Verteilung der quadratischen Reste gemacht. Darauf wird an Beispielen erläutert, welchen Nutzen man aus einigen Sätzen über die quadratischen Reste zusammengesetzter Zahlen zur Bestimmung der Primfactoren der letzteren ziehen kann. Am Schluss der Abhandlung sind die quadratischen Reste der unter 100 gelegenen Primzahlen in einer Tafel zusammengestellt worden. Gz.

---

L. Contejean. Du nombre des chiffres de la période d'une fraction décimale périodique équivalente à une fraction simple. Soc. Philom. Bull. (8) IV. 64-70.

Genauere Untersuchung der Congruenz $10^x \equiv 1 \pmod{m}$ für die verschiedenen Formen von $m$. Regeln für die Teilbarkeit.

Sn.

---

Azoulay. Propriétés des nombres dans la multiplication. Soc. Philom. Bull. (8) IV. 71-75.

Einige Consequenzen aus der Neunerprobe. Sn.

---

C. A. Laisant. Sur une curiosité arithmétique. Soc. Philom. Bull. (8) IV. 77-78.

Die Zahlenreihen

$$49, \quad 4489, \quad 444889, \quad 44448889, \quad \ldots,$$
$$16, \quad 1156, \quad 111556, \quad 11115556, \quad \ldots$$

enthalten nur Quadrate. Das allgemeine Gesetz für jedes beliebige Zahlsystem wird aufgesucht. Sn.

---

A. TONELLI. Sulla risoluzione della congruenza $x^2 \equiv c$ (mod. $p^\lambda$). Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 116-120.

Der Verfasser hat den wesentlichen Teil dieser Note schon in den Gött. Nachr. (1891, 344-346) veröffentlicht (vgl. F. d. M. XXIII. 194-195). Hier wird noch ausserdem der Zusammenhang der Lösungen von $x^2 \equiv c$ und von $x^2 \equiv -c$ (mod. $p$) erörtert; einige Specialfälle werden discutirt, und schliesslich erscheint als der praktische Wert des Resultates beiläufig eine Vereinfachung des rechnungsmässigen Probirens. Sn.

---

G. T. BENNETT. On the residues of powers of numbers for any composite modulus. Lond. R. S. Proc. LI. 452-453.

Auszug aus einer Abhandlung, die in den Transactions erscheinen wird. Cly. (Lp.)

---

G. FRATTINI. Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 51-57.

G. FRATTINI. A complemento di alcuni teoremi del sig. Tchebicheff. Rom. Acc. L. Rend. $I_2$. 85-91.

G. FRATTINI. Dell'analisi indeterminata di secondo grado. Periodico di Mat. VI, VII. 44 S.

Der Inhalt der obigen drei Arbeiten entspricht im wesentlichen dem der beiden früheren desselben Verfassers, über welche F. d. M. XXIII. 1891. 192, 193 berichtet ist. Hervorzuheben ist, dass am Ende der Note zu der zweiten Arbeit (S. 91) sich eine Correctur der früheren Angaben findet. Die dritte Abhandlung fasst alle Ergebnisse einheitlich zusammen und giebt zuletzt historische Notizen. Sn.

---

H. HART, D. BIDDLE. Solution of question 5345. Ed. Times LVII. 32.

Als eine Lösung der Aufgabe, ein Dreieck zu finden, dessen Seiten, Höhe, Winkelhalbirende an der Spitze, Flächeninhalt ganze Zahlen sind, findet Hr. Biddle durch Benutzung des Dreiecks 3, 4, 5 : $a = 500$, $b = 780$, $c = 448$, wo $c$ die Basis. Lp.

---

E. Lemoine. Résolution complète des équations indéterminées $x^2+1=2y^2$, $x^2-1=2y^2$. Teixeira J. XI. 68-76.

Zunächst löst der Verf. die Aufgabe, das $n^{\text{te}}$ Glied einer auf folgende Weise gebildeten Reihe zu finden: das erste Glied ist $a$, das zweite $b$, und das $n^{\text{te}}$ Glied wird gebildet, indem man das $(n-1)^{\text{te}}$ Glied, doppelt genommen, zum $(n-2)^{\text{ten}}$ Gliede addirt. Mit Hülfe des erlangten Resultates erhält er die vollständige Lösung der unbestimmten Gleichungen $x^2+1=2y^2$ und $x^2-1=2y^2$. Ausserdem gewinnt er die vollständige Lösung der Differenzengleichung $U_n=lU_{n-2}+mU_{n-1}$. Tx. (Lp.)

---

M. d'Ocagne. Extrait d'une lettre à M. E. Lemoine. Teixeira J. XI. 115.

Verweist auf die Note „Sur l'équation indéterminée $x^2-ky^2=z^n$" in C. R. IC (F. d. M. XVI. 1884. 144) und die „Théorie élémentaire des séries récurrentes" (Nouv. Ann. (3) III, F. d. M. 1884. 191) des Verfassers. Lp.

---

H. Scheffler. Die quadratische Zerfällung der Primzahlen. Leipzig. F. Förster. 169 S. 8°.

Die Theorie der Linearteiler $mq+n$ der quadratischen Formen $A^2+qB^2$ führt naturgemäss zu der Frage nach den Eigenschaften der Zahl $A$ (mod. $q$). Es werden derartige Sätze von Gauss, Jacobi, Eisenstein, Stern herangezogen, welche specielle Fälle durch Einführung von Binomialcoefficienten erledigen. In der vorliegenden Schrift wird von den Perioden Gebrauch gemacht, welche sich aus den Potenzen der primitiven Congruenzwurzeln bilden lassen. Der Fall $q=3$ wird besonders breit behandelt. Sn.

---

R. W. D. Christie, R. F. Davis. Solution of question 11511. Ed. Times LVII. 120-122.

Umwandlung der Summe von vier Quadratzahlen in eine Summe von vier anderen. Lp.

---

J. Rothholz. Beiträge zum Fermat'schen Lehrsatz. Diss. Giessen. 8°.

Ein Leser. Ueber die Gleichung $x^p + y^p = z^p$. Schlömilch Z. XXXVII. 57.

Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$. Eine Anregung zur Auffindung eines Beweises. Hoffmann Z. XXIII. 417-418.

---

J. A. Gmeiner. Das allgemeine bikubische Reciprocitätsgesetz. Wien. Ber. CI. 562-584.

Der Verfasser hatte im vorigen Jahre die Ergänzungssätze zum bikubischen Reciprocitätsgesetz vorangeschickt (C. 1330-1331; F. d. M. XXIII. 1891. 189-190). In der vorliegenden Untersuchung des allgemeinen Falles wird die damalige Unterscheidung dreier Haupttypen festgehalten. Zuerst werden sechs Reciprocitätsgleichungen für die möglichen Combinationen gewonnen. Die weitere Discussion ermöglicht eine Zusammenfassung in eine einzige Formel. Schliesslich werden noch die Beziehungen zum kubischen Reciprocitätsgesetz ausführlich dargethan. Sn.

---

J. A. Gmeiner. Die bikubische Reciprocität zwischen einer reellen und einer zweigliedrigen regulären Zahl. Monatsh. f. Math. III. 179-192, 199-210.

Der specielle Fall des bikubischen Reciprocitätsgesetzes wird mit Hülfe von Einheitswurzeln, unter Anwendung von Indices, behandelt. Sn.

---

J. Kraus. Zu der Bemerkung: „Arithmetischer Satz“. Schlömilch Z. XXXVII. 190-191.

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung eines Satzes des Herrn Bachmann (Schlömilch Z. XXXVI. 381-383; F. d. M. XXIII. 1891. 195). Sn.

---

A. Schiappa Monteiro. Sur un théorème relatif à la théorie des nombres. Progreso mat. II. 257-262.

Lösung einer Aufgabe bezüglich der Congruenz

$$10^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

wenn $p$ eine Primzahl grösser als 41 bedeutet. Tx. (Lp.)

---

P. A. MacMahon. Application of a theory of permutations in circular precession to the theory of numbers. Lond. M. S. Proc. XXIII. 305-313.

Im Anschluss an die Herren Jablonski, Lucas und Moreau werden die einfachsten zahlentheoretischen Sätze an ein neues Versinnlichungsmittel geknüpft, wobei sich allerlei Spielarten des Fermat'schen Lehrsatzes ergeben. Sn.

---

H. Minkowski. Ueber Geometrie der Zahlen. Deutsche Math.-Ver. I. 64-65.

Der Verfasser kündigt Studien über dreidimensionale Zahlengitter und sehr allgemeine Kategorien von Körpern an, dergestalt dass der kubische Inhalt der letzteren zu arithmetischen Eigenschaften der ersteren in Beziehung gebracht werden soll. Z. B.: alle Körper, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte haben, und deren Begrenzung nach aussen hin nirgends concav ist, schliessen, wenn ihr Inhalt $\geqq 2^3$ ist, notwendig noch weitere Punkte des Zahlengitters ausser dem Nullpunkte ein. Sn.

---

G. Vivanti. Sull'uso della rappresentazione geometrica nella teoria aritmetica dei numeri complessi. Rivista di Mat. II. 167-176.

Eine Verwendung der Quaternionen zu zahlentheoretischen Zwecken; Darstellung der elementaren Sätze, einschliesslich derer von Fermat und Wilson. Sn.

---

H. W. L. Tanner. On some square roots of unity for a prime modulus. Messenger (2) XXI. 139-144.

Ein Beispiel für die fragliche Quadratwurzel ist die Potenz

$x^{\frac{1}{2}(p-1)}$, in der $p$ der Primzahlmodul und $x$ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ ist, wobei also die Null ausgeschlossen bleibt. Die Potenz ist congruent $\pm 1$ für alle betrachteten Werte von $x$, nämlich 1, wenn $x$ ein quadratischer Rest (mod. $p$) ist, und $-1$, wenn $x$ ein Nichtrest ist. Der Zweck des Aufsatzes ist die Bestimmung aller Ausdrücke:

$$A+Bx+Cx^2+\cdots+Dx^{p-2}=F(x),$$

welche eine ähnliche Eigenschaft haben, nämlich $F(x)\equiv\pm 1$ für jeden eigentlichen (d. h. nicht verschwindenden) Wert von $x$. Die Verteilung der Zeichen $\pm 1$ von $F(x)$ für die verschiedenen Werte von $x$ ist jedoch willkürlich, und aus jeder solchen Verteilung entspringt eine besondere Gestalt von $F(x)$. Da nun die Wahl von zwei Werten für $F(1)$, für $F(2), \ldots,$ für $F(p-1)$ freisteht, so giebt es $2^{p-1}$ verschiedene Formen von $F(x)$. Glr. (Lp.)

---

V. Mollame. Sulle radici primitive dell'unità negativa. Napoli Rend. (2) VI. 179-183.

A. Capelli. Rapporto. Ibid. 179.

Die Theorie der primitiven Wurzeln von $-1$ wird auf die bekannte Theorie derer von $+1$ zurückgeführt und sodann in ihren hauptsächlichsten Consequenzen ausführlich entwickelt. Sn.

---

A. A. Markoff. Sur les nombres entiers dépendant d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire. A la mémoire de G. Zolotareff. Mém. Acad. St. Pétersb. XXXVIII.

Die Abhandlung giebt die Theorie der ganzen complexen Zahlen von der Form $X+Y\sqrt[3]{A}+Z\sqrt[3]{B}$ ($A=ab^2$, $B=a^2b$; $a$ und $b$ sind gewöhnliche ganze Zahlen, deren Product durch kein Quadrat teilbar ist), die der algebraischen Gleichung dritten Grades genügen:

$$\xi^3-3X\xi^2+3(X^2-abYZ)\xi=X^3+AY^3+BZ^3-3abXYZ.$$

Nachdem die Bedingungen dafür, dass die Zahl $\xi$ eine ganze sei, abgeleitet sind und die aus den Ideen Zolotareff's entsprunge-

nen Methoden für die Zerlegung der Zahlen $\xi$ in Primfactoren gegeben sind, wird gezeigt, dass die Anzahl der Klassen der Idealzahlen endlich ist. Die Theorie wird an einigen Beispielen erläutert. Am Ende der Abhandlung findet sich die Zusammenstellung der complexen Zahlen für $A = 1, \ldots, 70$ und $B = A^2$. Wi.

---

P. Bonaventura. Il teorema di reciprocità pei numeri interi complessi e le funzioni lemniscatiche. Batt. G. XXX. 300-310.

Es werden zuerst die Formeln für die complexe Multiplication der Function $\wp(u|g_2, 0)$ entwickelt, sodann wird das Legendre'sche Zeichen durch Producte von Teilwerten dieser Function ausgedrückt, wodurch sich das gesuchte Gesetz glatt ergiebt. Sn.

---

P. Bonaventura. Sul teorema di reciprocità della teoria dei residui quadratici pei numeri interi del campo $(1, i\sqrt{2})$. Batt. G. XXX. 221-234.

Es werden für das betrachtete Gebiet die üblichen Definitionen für die Teilbarkeit, Congruenz, die Analogie des Wilson'schen Satzes u. dgl. aufgestellt. Die Hauptaufgabe bildet die Aufstellung der verschiedenen Formen des quadratischen Reciprocitätsgesetzes für

$$\left\{\frac{-1}{a+bi\sqrt{2}}\right\},\quad \left\{\frac{i\sqrt{2}}{a+bi\sqrt{2}}\right\},\quad \left\{\frac{\alpha+\beta i\sqrt{2}}{a+bi\sqrt{2}}\right\}.$$

Sn.

---

L. Gegenbauer. Ueber die aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen. Wien. Ber. CI. 984-1012.

Der Verfasser sagt: „Ich werde in der vorliegenden Mitteilung, in welcher ich mich auf das Gebiet der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten primären ganzen complexen Zahlen beschränke, einige bekannte zahlentheoretische Functionen in der Weise verallgemeinern, dass ihr Wert von der für jede von ihnen besonderen Beziehung beeinflusst wird, in welcher ihr Argument zu einer vor-

gegebenen ganzen complexen Zahl steht, einige auf diese allgemeineren Functionen bezügliche arithmetische Relationen und Sätze aufstellen und sodann einerseits die Werte von Summen ermitteln, welche dadurch entstehen, dass das Argument einiger von diesen Functionen alle primären ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$ mit einer die reelle Zahl $n$ nicht übersteigenden Norm durchläuft, andrerseits Summen von Werten betrachten, welche bekannte zahlentheoretische Functionen erhalten, wenn für ihr Argument gewisse ausgewählte von den eben genannten complexen Zahlen gesetzt werden." — Die Definitionen der hier behandelten zahlentheoretischen Functionen, die Sätze über Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten, Mittel, grösste gemeinsame Teiler u. s. f. sind so ungemein complicirt, dass an ein genaueres Eingehen an dieser Stelle nicht zu denken ist. Sn.

---

L. Gegenbauer. Ueber den grössten gemeinsamen Teiler. Wien. Ber. CI. 1143-1221.

Die hier vorliegenden Untersuchungen beziehen sich auf die allgemeinsten Zahlengebiete, in welchen das Euklid'sche Verfahren des Aufsuchens des grössten gemeinsamen Teilers gilt, und gipfeln in Verallgemeinerungen der Untersuchungen von Tschebyscheff und de Polignac über die Verteilung der Primzahlen. Zum Schluss finden sich Beweise für die Erweiterung eines Kronecker'schen Determinantensatzes auf Determinanten beliebigen Ranges und die Verallgemeinerung eines Euler'schen Theorems aus der Theorie der Zerlegung der ganzen Zahlen. Sn.

---

L. Gegenbauer. Ueber eine arithmetische Formel. Monatsh. f. Math. III. 336.

Die angezogene Formel ist von Kronecker aufgestellt worden (J. für Math. CVIII. 348; vgl. auch F. d. M. XXIII. 1891. 205). Hier findet sich eine Verallgemeinerung, worin $\sin a m$ an Stelle des einfachen sinus eine Rolle spielt. Sn.

---

E. Catalan. Sur quelques théorèmes d'analyse et d'arithmétique. S. M. F. Bull. XX. 40-43.

Einige fernere Reihen zur Theorie der elliptischen Functionen. Z. B. man setze:

$$\frac{q}{1-q} = q\sum_{n=0}^{n=\infty} F(n, 1)q^n;$$

dann ist

$$-F(n-1, 1)+F(n-3, 2)-F(n-6, 3)+F(n-10, 4)- \cdots$$

Null, wenn $n$ keine Pentagonalzahl ist; sonst $\pm 1$. Sn.

---

F. Rogel. Arithmetische Entwickelungen. Hoppe Arch. (2) XI. 77-84.

Es werden die Reihen, welche die Bernoulli'schen Zahlen $B_n$ als Coefficienten enthalten, mit Hülfe des Staudt'schen Satzes in solche umgeformt, bei welchen die Stellenvariable eine Primzahl ist.

Sn.

---

F. Rogel. Arithmetische Relationen. Prag. Ber. 1892. 3-33.

Es werden Entwickelungen nach den Functionen

$$\frac{x^n}{1-x^n}, \quad \frac{x^n}{1-x^{2n}}, \quad l(1-x^n) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

untersucht und gezeigt, dass eine stetige Function sich so nur auf eine einzige Art darstellen lässt. Die Coefficienten sind zunächst zahlentheoretische Functionen der Indices; die Untersuchung ihrer Eigenschaften führt zu Beziehungen zwischen den arithmetischen Abhängigkeiten und stetigen (speciell auch elliptischen) Functionen.

Sn.

---

E. Busche. Ueber die Function $E(x)$ mit complexem Argument. J. für Math. CX. 338-343.

E. Busche. Bemerkung über die Function $E(x)$ mit complexem Argument. Hamb. Mitt. III. 103-107.

Bereits in einer früheren Abhandlung „Ueber grösste Ganze" (J. für Math. CIII. 118-125, vgl. F. d. M. XX. 1888. 183-184) hatte

Herr Busche auf die Analogien der von ihm aufgestellten Formeln mit den Relationen zwischen gewissen bestimmten Integralen hingewiesen. Diesmal handelt es sich um die Zurückführung von Summen, welche sich auf einen zweidimensionalen Bereich beziehen, auf andere, in denen nur Randwerte vorkommen, so dass sich ein Theorem ergiebt, welches gleichsam an den Green'schen Satz erinnert. In der ersten Arbeit findet sich zunächst eine Discussion einiger Definitionen der Function $E(x)$ mit Rücksicht auf eine Uebertragung auf das complexe Gebiet, sowie die Ableitung jener Hauptformel, zum Schluss ein ganz durchgeführtes Zahlenbeispiel. In der zweiten Arbeit wird der letzte Summand in einfacher Weise bestimmt und noch einmal die Theorie der Doppelintegrale in Analogie genommen. Sn.

---

M. Lerch. Arithmetische Lehrsätze. Casopis XXI. 90-95, 185-190. (Böhmisch.)

Bezeichnet $E$ (entier) das bekannte Symbol Legendre's, so ist

$$(1)\qquad E\left(\frac{n}{k}\right)-E\left(\frac{n-1}{k}\right)=\begin{cases}1, & \text{(divis. } k),\\ 0, & \text{(non div. } k);\end{cases}$$

daraus folgt dann

$$\sum_{k=1}^{n}\left[E\left(\frac{n}{k}\right)-E\left(\frac{n-1}{k}\right)\right]=\Theta(n),$$

wo $\Theta(n)$ die Divisorenanzahl von $n$ bezeichnet, und

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{n}\Theta(k)=\Sigma E\left(\frac{n}{k}\right).$$

Aus Formel (1) folgt weiter

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n}\Theta_1(k)=\Sigma k E\left(\frac{n}{k}\right),$$

wenn

$$\Theta_1(n)=\Theta(n)+2,$$

und ebenso

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{n}\Theta_s(k)=\Sigma k^s E\left(\frac{n}{k}\right),$$

wo $\Theta_s(n)$ die Summe der zur Potenz $s$ erhobenen Divisoren von $n$

bedeutet, so dass daraus für $s = 0, 1$ die Formeln (2), (3) sich ergeben.

Allgemein gilt dann, wenn

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \dots$$

beliebige Grössen bezeichnen und $\delta$ alle Divisoren vertritt, also

$$\sum_{\delta} f(\delta) = F(n),$$

wie z. B.

$$F(12) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(6)+f(12),$$

die Relation

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{n} F(k) = \sum f(k) E\left(\frac{n}{k}\right).$$

Std.

---

A. P. Minine. Zur Frage von der Auffindung der Zahlenidentitäten mit Hülfe der Zahldifferentiation und Integration. Abh. der Phys. Abt. der Ges. der Freunde der Naturkunde in Moskau. V. Heft 1. (Russisch.)

Es handelt sich um eine Vergleichung der Abhandlungen des Herrn Gegenbauer: „Ueber einige zahlentheoretische Functionen und zahlentheoretische Relationen" mit der „Lehre von den Zahlderivirten" von Hrn. Bugaiew. Die meisten Resultate der ersteren Arbeit finden sich schon in der letzteren. Wi.

---

D. N. Sokolow. Zur Theorie der discontinuirlichen zahlentheoretischen Functionen. Mosk. Math. Samml. XVI. 282-294. (Russisch.)

Die betrachteten zahlentheoretischen Functionen sind: $\xi_\mu(n)$, die Anzahl derjenigen $\mu^{\text{ten}}$ Potenzen der Primzahlen, welche $n$ teilen; $\varrho_\mu(n)$ und $\int_\mu(n)$, die Anzahl und die Summe der Divisoren von $n$, welche $\mu^{\text{te}}$ Potenzen von anderen Divisoren sind, u. s. w. Für diese Functionen werden die Beziehungen verallgemeinert, welche für den Fall $\mu = 1$ und $\mu = 2$ von Liouville und Bugaiew gefunden waren. Wi.

D. T. Egorow. Einige Beziehungen aus der Theorie der Zahlenintegrale nach den Divisoren. Mosk. Math. Samml. XVI. 236-255. (Russisch.)

Der Verfasser betrachtet eine allgemeine Beziehung von N. W. Bugaiew zwischen drei willkürlichen Functionen:

$$\sum_n \psi(\delta).\sum_d \theta(\delta').f(d') = \sum_n f(d).\sum_\delta \psi(\delta').\theta(d') = \sum_n \theta(\delta)\sum_d f(d').\psi(\delta')$$

$$(n = \delta.d,\ d = \delta'.d')$$

(Mosk. Math. Samml. XVI. 169-197, F. d. M. XXI. 1889. 182) und ihre vielfachen Anwendungen. Speciell werden einige Zahlenidentitäten von Liouville bewiesen, welche in einer früheren Arbeit von D. N. Sokolow (F. d. M. XXIII. 1891. 197) nicht betrachtet sind. Wi.

---

L. Bianchi. Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari. Math. Ann. XL. 332-412.

Die früheren Untersuchungen des Verfassers über lineare Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten (Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie, Math. Ann. XXXVIII. 313-333; F. d. M. XXIII. 1891. 216) werden hier auf den allgemeinen Fall ausgedehnt, wo die Coefficienten einem beliebigen complexen quadratischen Zahlkörper angehören, wobei natürlich die Dedekind'sche Theorie der Ideale verwertet wird. Bei der Unmöglichkeit, die Fülle der Resultate in den engen Rahmen eines Referates hineinzudrücken, müssen wir uns damit begnügen, den Leser auf die Abhandlung selbst, sowie auf das Referat über die oben angeführte Arbeit zu verweisen. Vi.

---

L. Gegenbauer. Ueber einige arithmetische Determinanten höheren Ranges. Wien. Ber. CI. 425-487.

Bericht auf S. 139 dieses Bandes.

Schumacher. Berichtigung. Schlömilch Z. XXXVII. 64.

## B. Theorie der Formen.

G. B. MATHEWS. Note on Dirichlet's formula for the number of classes of binary quadratic forms for a complex determinant. Lond. M. S. Proc. XXIII. 159-162.

Dirichlet hat mit Hülfe seiner allgemeinen analytischen Methoden die Klassenanzahl $h$ der quadratischen binären Formen mit ganzen imaginären Coefficienten und von gegebener Determinante $D=\alpha+i\beta$ berechnet; er findet für dieselbe einen Ausdruck, dessen wesentlicher Bestandteil eine unendliche Reihe ist, und fügt dann diesem Resultat die Bemerkung zu, dass jene unendliche Reihe durch die sogenannten Lemniskatenfunctionen, d. h. die elliptischen Functionen mit dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$, summirbar sind. Der Verfasser führt nun diese Summation aus, freilich in einer Weise, welche, wie er selbst hervorhebt, nicht den Anforderungen der Strenge genügt. Das Resultat ist:

$$h\log\sigma = \log \frac{\prod\limits^{a} \psi\left(\frac{a(\alpha+\beta i)K}{m}\right)\psi\left(\frac{a(\alpha-\beta i)K}{m}\right)}{\prod\limits^{b} \psi\left(\frac{b(\alpha+\beta i)K}{m}\right)\psi\left(\frac{b(\alpha-\beta i)K}{m}\right)}.$$

Hierbei bedeutet, wenn $T$, $U$ die Grundlösungen der diophantischen Gleichung $T^2-DU^2=1$ sind, die Zahl $\sigma$ den absoluten Betrag von $T+U\sqrt{D}$; ferner ist $m=|D|^2=\alpha^2+\beta^2$; $a$ sind die quadratischen Reste von $m$ und $b$ die quadratischen Nichtreste von $m$, $K$ das vollständige elliptische Integral für den Modul $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$, und $\psi(u)$ bedeutet die Lemniskatenfunction $\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$. Leider hat es der Verfasser unterlassen, die Uebereinstimmung seiner Formel mit den allgemeineren Kronecker'schen Resultaten zu zeigen. Ht.

---

E. NETTO. Anwendung der Modulsysteme auf einen geometrischen Satz und auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. J. für Math. CX. 184-187.

Bericht auf S. 125 dieses Bandes.

---

X. STOUFF. Sur la composition des formes quadratiques quaternaires et ses applications aux groupes fuchsiens. Toulouse Ann. VI. G. 1-19.

Bericht auf S. 126 dieses Bandes.

---

# Capitel 3.

## Kettenbrüche.

E. DE AMICIS. Una nuova dimostrazione del teorema fondamentale della teoria delle frazioni continue. Batt. G. XXX. 217-220.

Es wird ein Gesetz angegeben, wonach man, wenn die Teilnenner eines gewöhnlichen Kettenbruchs durch Indices bezeichnet werden, formal jeden Näherungsbruch allein aus dem letzten vorangegangenen ableiten kann. Daraus folgt das gewöhnliche Verfahren mit Hülfe der zwei letzten Brüche. R. M.

---

W. JUNG. Notiz über Kettenbrüche. Casopis XXI. 88-90. (Böhmisch.)

Bietet eine deductive Ableitung der Formel für den $n^{\text{ten}}$ Näherungswert eines Kettenbruches. Std.

---

F. J. STUDNIČKA. Beitrag zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche. Prag. Ber. 1892. 254-256.

Wird der $n^{\text{te}}$ Näherungswert des unendlichen Kettenbruchs

$$\frac{a_1}{a_1+1} \,\dot{-}\, \frac{a_2}{a_2+1} \,\dot{-}\, \frac{a_3}{a_3+1} \,\dot{-}\, \cdots$$

mit $\frac{p_n}{q_n}$ bezeichnet, so ist $q_n = p_n+1$ und $\lim p_n = \infty$, woraus sich der Wert des Kettenbruches gleich 1 findet. Die beiden Sätze werden mit Zuhülfenahme der Determinanten verificirt. Lh.

---

G. Landsberg. Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche. J. für Math. CIX. 231-237.

E. Netto. Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn G. Landsberg. Ibid. CX. 349-352.

Es werde Zähler und Nenner des Kettenbruchs:

$$g_\mu \dotplus \frac{h_{\mu+1}}{g_{\mu+1}} \dotplus \frac{h_{\mu+2}}{g_{\mu+2}} \dotplus \cdots \dotplus \frac{h_{\nu-1}}{g_{\nu-1}}$$

durch $Z_{\mu\nu}$ resp. $N_{\mu\nu}$ bezeichnet; dann ist $N_{\mu\nu} = Z_{\mu+1,\nu}$, und es besteht folgende, alle speciellen Kettenbruch-Relationen umfassende Formel:

$$\prod_{k=q+1}^{r}(-h_k) Z_{p+1,q} Z_{r+1,s} - Z_{p+1,r} Z_{q+1,s} + Z_{p+1,s} Z_{q+1,r} = 0,$$
$$(p < q < r < s)$$

welche eine Verallgemeinerung derjenigen analogen Relation ist, die Kronecker für Kettenbrüche mit den Teilzählern —1 gegeben hat.

Aus einem periodischen Kettenbruch kann man formal leicht diejenige quadratische Gleichung ableiten, deren eine Wurzel durch ihn dargestellt wird, und ebenso leicht ergiebt sich ein zweiter periodischer Bruch für die andere Wurzel. Es liegt auch auf der Hand, dass keiner der beiden Kettenbrüche convergiren kann, falls die Discriminante der quadratischen Gleichung negativ ist. Ist diese aber positiv, so ist zur Convergenz noch eine weitere Ungleichheit nötig. Herr L. ermittelt sie durch eine lineare Transformation, welche die Gleichung in eine reciproke Gleichung überführt. Hat letztere ihre beiden Wurzeln $= -1$, so ist Divergenz vorhanden, sonst aber stets Convergenz, und beide Wurzeln sind als grössere und kleinere sofort von einander zu unterscheiden.

Auch die von Thiele (F. d. M. XI. 1879. 150) bekannt gegebene Ausnahme, sowie der Fall zweier gleichen Wurzeln und endlich der einer linearen Gleichung erledigen sich hierbei.

Herr N. weist nach, wie die erwähnten Resultate auch aus seinen und Isenkrahe's Entwickelungen über die Auflösung numerischer Gleichungen (F. d. M. XX. 1888. 76) gefolgert werden können. R. M.

---

E. Bortolotti. Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche periodiche. Palermo Rend. VI. 1-13.

Die in der vorangegangenen Arbeit (F. d. M. XXIII. 1891. 225) gewonnenen formalen Resultate wendet Verf. nun auf den Fall an, wo die Elemente $a$ Binome ersten Grades von $x$, die Elemente $b$ Constanten sind. Die beiden Reihen von Elementen dienen dann (wie bei Pincherle) unter gewissen Convergenz-Bedingungen dazu, zwei analytische Functionen $\sigma_1$, $\sigma_2$ zu definiren, welche nach absteigenden Potenzen von $x$ vom Grade $-1$ resp. $-2$ entwickelbar sind, welche ferner als Grenzwerte zweier rationalen Functionen desselben Nenners (bei wachsendem Grade) erscheinen, und welche Wurzeln einer algebraischen Gleichung dritten Grades sind, sobald die beiden Reihen der Elemente mit derselben Periode periodisch sind. R. M.

---

P. L. Tschebyscheff. Ueber die Kettenbruchentwickelung der Reihen, welche nach absteigenden Potenzen der Veränderlichen fortgehen. Petersb. Abh. LXXI. 3. (Russisch.)

In den früheren Abhandlungen: „Ueber die Darstellung der Grenzwerte der Integrale mit Hülfe der Residuen“ (F. d. M. XVII. 1885. 172) und: „Ueber die Summen, welche aus den Werten der einfachsten Monome, mit einer beständig positiv bleibenden Function multiplicirt, gebildet sind“ (F. d. M. XXIII. 1891. 418) hat der Verfasser gezeigt, dass die Grenzwerte der Integrale und der Summen mit Hülfe der Näherungsbrüche der Kettenbruchentwickelung der Reihe $\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\cdots$ sich finden lassen; aber die allgemeinen Formeln für diese Näherungsbrüche erhält man nur in Ausnahmefällen. In der vorliegenden Abhandlung nun wird der allgemeine Fall betrachtet und das folgende Theorem bewiesen: „Wenn die Reihe $\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^3}+\cdots$ in einen Kettenbruch:

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 x+\beta_2-\cfrac{1}{\alpha_3 x+\beta_3-\cdots-}}}$$

entwickelt ist, wo $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, ..., $\alpha_m>0$ und alle Wurzeln der Gleichungen $\psi_1(x)=0$, $\psi_2(x)=0$, ..., $\psi_m(x)=0$, deren linke Seiten die Nenner ihrer $m$ Näherungsbrüche

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},\quad \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)},\quad \dots,\quad \frac{\varphi_m(x)}{\psi_m(x)}$$

bilden, positiv sind, so findet dasselbe statt bei derselben Zahl $m$ in Bezug auf den Kettenbruch, der aus der Zerlegung der Reihe $\frac{C_0}{x}+\frac{C_1}{x^2}+\cdots$ und ihrer $m$ ersten Näherungsbrüche in dem Falle entsteht, wenn die Coefficienten $C_0$, $C_1$, $C_2$, ..., $C_{2m-1}$ nicht in die Grenzen:

$$c_0-\frac{1}{H_0},\quad c_1-\frac{h}{H_0},\quad c_2-\frac{h^2}{H_0},\quad \dots,\quad c_{2m-1}-\frac{h^{2m-1}}{H_0},$$
$$c_0+\frac{1}{H_0},\quad c_1+\frac{h}{H_0},\quad c_2+\frac{h^2}{H_0},\quad \dots,\quad c_{2m-1}+\frac{h^{2m-1}}{H_0}$$

übergehen; $h$ ist hier eine willkürliche positive Grösse, $H_0$ eine positive Grösse, grösser als die Summe

$$\frac{h^m-1}{h-1}L^{(m)}+\frac{\psi_m(-h)}{\psi_m(0)}L_0^{(m)},$$

wo $L^{(m)}$ die höchste Grenze der Zahlenwerte der Coefficienten des Polynoms

$$\frac{\psi_{m-1}(-h).\psi_m(x)-\psi_m(-h).\psi_{m-1}(-x)}{x+h}$$

und $L_0^{(m)}$ das constante Glied dieses Polynoms ist". Wi.

# Vierter Abschnitt.

## Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

E. JABLONSKI. Théorie des permutations et des arrangements circulaires complets. Journ. de Math. (4) VIII. 331-349.

E. JABLONSKI. Sur l'analyse combinatoire circulaire. C. R. CXIV. 904-907.

Ordnet man die Elemente einer Permutation auf einem Kreis oder auf irgend einer geschlossenen Curve an, so ist die Anzahl dieser circularen Permutationen ohne Wiederholungen schon bekannt. Der Verf. leitet zunächst die Anzahl der circularen Permutationen und Arrangements (d. h. aller Gruppen von $m$ Buchstaben, die man aus $p$ verschiedenen Buchstaben bilden kann) mit Wiederholungen auf elementare Weise ab, ohne jedoch hierdurch eine einfache Schlussformel zu erhalten. Unter Zuhülfenahme zahlentheoretischer Untersuchungen erhält er aber folgendes Resultat:

Die Anzahl der circularen Permutationen verschiedener Objecte, die bezw. $\alpha$-, $\beta$-, ..., $\lambda$-mal wiederholt sind, ist

$$\frac{1}{m}\sum_1^D P\left(\frac{D}{d}\right)\varphi(d);\quad \varphi(1)=1,$$

wo $m=\alpha+\beta+\cdots+\lambda$ ist. $D$ ist der grösste gemeinschaftliche Teiler der Zahlen $\alpha$, $\beta$, ..., $\lambda$ und $d$ jeder beliebige Teiler von $D$, 1 und $D$ inbegriffen. Die ganze Zahl $\varphi(d)$ drückt aus, wie viele

Zahlen, die kleiner als $d$ sind, relativ prim zu $d$ sind; $P\left(\frac{D}{d}\right)$ endlich ist die Anzahl der gewöhnlichen Permutationen derselben Objecte, wenn sie $\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d}, \dots, \frac{\lambda}{d}$ Male wiederholt sind.

Die Formel für die circularen Arrangements mit Wiederholungen ergiebt sich aus diesem Resultat durch eine einfache Ueberlegung.

Schliesslich wird gezeigt, wie dieselbe Methode, die zur Lösung der Aufgabe geführt hat, auch noch viel allgemeinere Fragen zahlentheoretischer und algebraischer Natur zu behandeln gestattet. Z. B. ergiebt sich die Identität:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} = \alpha+1+\sum_{\alpha'=1}^{\alpha'=\alpha}(\alpha+1-\alpha')a^{\alpha'}\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

Die Note in den C. R. ist ein Auszug aus der ersten Abhandlung. Bö.

---

D. André. Sur le partage en quatre groupes des permutations des $n$ premiers nombres. C. R. CXV. 872-874.

Die Permutationen der $n$ ersten Zahlen gehören zu der ersten oder zweiten Klasse, je nachdem sie eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Störungen in der Aufeinanderfolge der Zahlen (dérangements) enthalten; sie sind dagegen von der ersten oder zweiten Art, je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Folgen (vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 230) darbieten. Betrachtet man gleichzeitig Klassen und Arten, so kann man die Permutationen der $n$ ersten Zahlen in vier Gruppen teilen.

Im Hinblick auf diese Einteilung der Permutationen giebt der Verf. ohne Beweise eine Zusammenstellung von neun Theoremen, indem er die Beweise und mehrere andere Entwickelungen in einer besonderen Abhandlung zu bringen verspricht. Bö.

---

K. Reich. Ueber Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen. Hoppe Arch. (2) XI. 225-261.

Unter Combinationen zur Summe $n$ werden solche mit Wie-

derholungen verstanden. Variationen zur Summe $n$ sind alle Permutationen der Combinationen zur Summe $n$.

Nach einer Verallgemeinerung des für die Binomial-Coefficienten eingeführten Functionszeichens $\binom{n}{k}$ werden zahlreiche Entwickelungen und Sätze für die Variationen und die Combinationen zur Summe $n$ gegeben, die indessen im allgemeinen von gar zu speciellem Interesse sind. Die meisten der sich auf Combinationen zu bestimmten Summen beziehenden Sätze sind übrigens schon von Euler in seiner Einleitung in die Analysis des Unendlichen auf viel müheloserem Wege abgeleitet, oder lassen sich wenigstens nach den Euler'schen Methoden leicht entwickeln. Bö.

---

A. Holtze. Einige Aufgaben aus der Combinatorik. Hoppe Arch. (2) XI. 284-338.

Die behandelten Aufgaben sind ohne vorheriges Quellenstudium und daher auch ohne Rücksicht auf etwaige frühere Lösungen entstanden.

In der ersten Aufgabe wird die Frage beantwortet: Wieviel Permutationen von $n$ verschiedenen Elementen giebt es, wenn $k$ dieser Elemente $k$ verschiedene Plätze nicht einnehmen dürfen?

Die weiteren Untersuchungen betreffen die Darstellung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen gegebener Zahlen, die Addition gewisser aus den combinatorischen Operationen hervorgehender Zahlen, die Bestimmung der Anzahl der Variationen und der Anzahl der Zahlen von gegebener Quersumme und das Problem der bunten Reihe. Das letzte Problem lautet im besonderen:

Auf wie viele verschiedene Weisen kann man $n$ Herren und $n$ Damen in bunter Reihe, an einem oder an mehreren Tischen placiren, wenn jede Anordnung in einer geschlossenen oder Kreisreihe erfolgt? Bö.

---

T. B. Sprague. A new algebra by means of which permutations can be transformed in a variety of ways, and their properties investigated. Edinb. Trans. XXXVII. 399-411.

Der Gedanke ist derjenige einer Operation (einer sogenannten „Locomotion"), die einer Substitution analog ist, die aber, statt an bestimmten Buchstaben bewirkt zu werden, an den Buchstaben erfolgt, welche bestimmte Plätze in einer Anordnung inne haben. So hat man für Substitutionen:

$$\left|\frac{badc}{abcd}\right| abcd = badc,$$

d. h. $\left|\frac{badc}{abcd}\right|$ ist die Substitution, welche $a$ in $b$, $b$ in $a$, $c$ in $d$, $d$ in $c$ verwandelt, und die daher, auf $abcd$ ausgeübt, dieses in $badc$ verwandelt. Für „Locomotionen" jedoch hat man

$$\left|\frac{2143}{1234}\right| abcd = badc,$$

d. h. $\left|\frac{2143}{1234}\right|$ ist die Locomotion, welche, an $abcd$ erfolgend, den ersten Buchstaben in den zweiten, den zweiten in den ersten, den dritten in den vierten, den vierten endlich in den dritten verwandelt, wobei dasselbe Ergebnis $badc$ wie vorher herauskommt. Für einen anderen Operandus sind aber die Operationen nicht gleichartig, z. B.:

$$\left|\frac{badc}{abcd}\right| bcda = adcb, \quad \text{dagegen} \quad \left|\frac{2143}{1234}\right| bcda = cbad.$$

Der Gedanke scheint eine Durchführung zu verdienen. Wie angemerkt werden kann, bleibt sowohl für eine Substitution wie für eine Locomotion das Symbol ungeändert durch irgend eine Permutation der Colonnen zweier Terme. Cly. (Lp.)

---

H. Staudacher. Lehrbuch der Combinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den combinatorischen Operationen (Permutiren, Combiniren, Variiren). Nach System Kleyer bearbeitet. Stuttgart. J. Maier. VII + 298 S. 8°.

---

V. Coccoz. Des carrés de 8 et de 9, magiques aux deux premiers degrés. Des carrés de mêmes bases en nombres triangulaires. Assoc. Franç. Pau. XXI. 136-148.

In dem ersten Teile werden die Quadrate mit den Seitenzahlen 8 und 9 betrachtet, welche magisch bleiben, wenn man an die Stelle der ursprünglichen Zahlen deren Quadrate setzt: es werden Methoden zur Herstellung solcher Quadrate gegeben, und es wird die Zahl der Lösungen zu bestimmen gesucht. Der zweite Teil enthält einige Betrachtungen über die aus Dreieckszahlen gebildeten magischen Quadrate. Gz.

---

D. Biddle, W. S. B. Woolhouse. Aufgaben über magische Quadrate. Ed. Times LVII. 25-28, 104-106.

1) Eine Regel zur Ausfüllung eines magischen Quadrates mit ungerader Anzahl von Fächern. Man setze die 1 in das Mittelfach der obersten Horizontalreihe und fahre mit der Besetzung der übrigen Fächer durch die folgenden Zahlen fort, indem man in der Diagonalrichtung nach rechts oben aufsteigt. Hierbei nehme man, a) falls man oberhalb des Quadrates gerät, das tiefste Fach der nächsten Colonne; b) wenn man rechts ausserhalb des Quadrates gelangt, das äusserste Fach links der höheren Reihe; c) wenn das zu besetzende Fach schon eine Zahl enthält, das Fach unterhalb der eben eingesetzten Zahl; d) ähnlich bei der rechten oberen Ecke. (Gestellt als No. 11320 von Hrn. Biddle, bewiesen von den Herren Woolhouse und Kolbe, eine Abänderung einer alten bekannten Methode.) 2) Das magische Quadrat aus 25 oder 49 Fächern so aufzustellen, dass es, in der Gestalt ⊞ viermal wiederholt, ein neues Quadrat erzeugt, bei welchem jedes herausgeschnittene zusammenhängende Quadrat von 25 oder 49 Fächern wieder ein magisches Quadrat ergiebt. (Gestellt und gelöst von Hrn. Woolhouse als No. 11460). Lp.

---

V. Schlegel. Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik. Hoppe Arch. (2) XI. 93-100.

Die Frage, welche vier Gewichtsstücke man besitzen müsse, um jede ganze Anzahl von Gewichtseinheiten von 1 bis 40 damit abwägen zu können (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 186: Willis, Everett,

MacMahon), wird vom Verf. verallgemeinert, und dies führt ihn zu folgenden vier Sätzen:

I. Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum_0^n 3^r$ können als algebraische Summen der $n+1$ Potenzen $3^0, 3^1, \ldots, 3^n$ dargestellt werden, wobei keine dieser Potenzen mehr als einmal in jeder Summe enthalten ist.

II. Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum_0^n 2^r$ können als absolute Summen der $n+1$ Potenzen $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$ dargestellt werden, wobei keine dieser Potenzen mehr als einmal in jeder Summe enthalten ist.

III. Alle ganzen Zahlen von 1 bis $\sum_0^n k^r$ können als Vielfachen-Summen der $n+1$ Potenzen $k^0, k^1, \ldots, k^n$ dargestellt werden, wobei keine anderen Coefficienten zur Verwendung kommen, als $1, 0, -1, -2, \ldots, -(k-2)$, deren Anzahl gleich $k$ ist.

IV. Alle ganzen Zahlen von 1 bis $a\sum_0^n k^r$ können als Vielfachen-Summen der $n+1$ Potenzen $k^0, k^1, \ldots, k^n$ dargestellt werden, wobei keine anderen Coefficienten zur Verwendung kommen, als Glieder der Reihe

$$a,\ a-1,\ a-2,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots,\ -(k-a-1),$$

und wobei $a$ eine ganze Zahl aus der Reihe

$$1,\ 2,\ \ldots,\ (k-1)$$

sein muss.

Der Satz II giebt noch Veranlassung zur Construction von Zahlentabellen oder Zauberkarten (wenn als obere Grenze 100 genommen wird, sind es sieben), von denen man sich jedesmal nur die erste Ziffer (die ersten Potenzen von 2) zu merken braucht, um ohne hinzublicken sofort eine Zahl angeben zu können, von der man nur weiss, auf welchen Karten sie steht. Bö.

---

W. W. Rouse Ball. Mathematical recreations and problems of past and present times. London. Macmillan and Co. XII + 240 S. 8°. [Nature XLVI. 123-125, New York M. S. Bull. II. 37-46.]

Bericht in F. d. M. XXIII. 1891. 33.

---

M. Azzarelli. Generalizzazione di alcune formole numeriche. Rom. Acc. P. d. N. L. XLV. 72-77.

Zieht man aus einer Lotterie, die die Nummern 1 bis 90 enthält, auf einmal drei Nummern, welches ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe dieser drei Zahlen nicht grösser als 90 ist?

Die schon bekannte Lösung dieser Aufgabe $\left(\frac{155}{979}\right)$ erfordert gewisse numerische Summationen, die vom Verf. verallgemeinert werden. Er leitet nämlich folgende Summationsformeln ab:

$$a^2+(a+r)^2+(a+2r)^2+\cdots+(a+(n-1)r)^2 = na^2+arn(n-1) + \frac{r^2n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}$$

und

$$ab+(a+r)(b+r)+(a+2r)(b+2r)+\cdots+(a+(n-1)r)(b+(n-1)r) = nab+r(a+b)\frac{n(n-1)}{1.2}+r^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{1.2.3}.$$

Aehnliche Formeln werden auch noch für die Summen der dritten Potenzen und der Producte aus drei Factoren dieser Art gegeben.

Bö.

---

H. Ekama. Het schimmel- of klok en hamerspel. Nieuw Archief XIX. 107-112.

Der Verfasser beabsichtigt, eine Theorie des bekannten Spieles „Glocke und Hammer“ zu entwickeln. Als wahrscheinlicher Gewinn jedes Spielers wird der Ausdruck gefunden $\frac{5^2.21.6^5-5^8}{6^8}$. Ist nun in $m$ Würfen die Kasse so weit erschöpft, dass sie nicht mehr zahlen kann, ist weiter $n$ die Zahl der Spieler, $I$ der Einsatz eines jeden derselben, und sind $S$, $K$, $H$, $K_h$, $H_u$ die Kaufpreise der Karten mit dem Schimmel, der Glocke, dem Hammer, Glocke und Hammer, endlich dem Kaufhause, so stellt der Verfasser die Relationen auf

$$nI+H_u = \frac{5^2.21.6^5-5^8}{6^8},$$

$$S = m\frac{5^6}{6^6}, \quad K = m\frac{5.21.6^5 - 5^7}{6^8} = H,$$

$$K_h = \frac{21.6^6 - 5^6}{6^8}m$$

und knüpft hieran einige Betrachtungen. Schliesslich wird der wahrscheinliche Gewinn für das Kaufhaus hergeleitet. Mo.

---

G. J. D. Mounier. Volledige berekening van het schimmel- of klok en hamerspel. Nieuw Archief XIX. 188-210.

Einwürfe gegen die in der vorhergehenden Abhandlung aufgestellten Beziehungen. Der Verfasser leitet zuerst einen Ausdruck her für die Wahrscheinlichkeit, dass nach einer gewissen Zahl von Würfen noch ein Betrag von $x$ Marken in der Kasse übrig ist, wo $x$ kleiner als 21 ist, stellt sodann die Wahrscheinlichkeit auf, dass bei jener Annahme das Kaufhaus zu gewinnen anfängt, und berechnet die mathematische Hoffnung jedes Spielers zu Anfang des Spieles und diejenige des Hauses. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass die Resultate bedeutend von den von Hrn. Ekama erhaltenen abweichen. Die Formeln sind zu umständlich, um hier mitgeteilt zu werden. Mo.

---

R. Strachey. On the probable effect of the limitation of the number of ordinary fellows elected into the Royal Society to fifteen in every year on the eventual total number of fellows. Lond. R. S. Proc. LI. 463-471 u. 4 Taf.; Nature XLVI. 116-117.

Der Schluss, zu dem der Verf. kommt, ist der, dass die gegenwärtige Beschränkung der Anzahl der in jedem Jahre gewählten ordentlichen Mitglieder auf fünfzehn zu einer eventuellen Maximalzahl führen wird, die 420 nicht überschreitet, und dass die äusserste Vermehrung für jeden über 15 Wählbaren als 28 angenommen werden kann, sodass eine Vermehrung auf 18 zu einem äussersten Bestande von 500 Mitgliedern führen würde. Cly. (Lp.)

---

Aufgaben über geometrische Mittelwerte und Wahrscheinlichkeiten. Ed. Times LVI. 26-27, 51-56, 80, 89-90, 102-103, 123-124; LVII. 41-42, 63-66, 96-97, 122-124.

Das Interesse, welches für Aufgaben dieser Art in England vorhanden ist, zeigt sich an der grossen Anzahl der gestellten Probleme und ihrer eingelieferten Lösungen. Aus Mangel an Raum können wir, wie im vorigen Jahrgange (vergl. F. d. M. XXIII. 235 unter Zerr), die einzelnen Fragen hier nicht vorführen, sondern beschränken uns nur darauf, die Gelehrten aufzuführen, deren Beiträge an den im Titel angeführten Stellen abgedruckt sind: Biddle, Crofton, Evans, Foster, Hendricks, MacColl, Matz, Mukhopadhyay, Radikanshuan, Sarkar, Schoute, Sylvester, Woodall, Wolstenholme, Zerr. Besonders der Letztgenannte zeichnet sich durch die Mannigfaltigkeit der gelieferten Artikel aus. Lp.

---

M. d'Ocagne. Sur la détermination du point le plus probable donné par une série de droites non convergentes. C. R. CXIV. 1415-1416.

Sind in einer Ebene $n$ Gerade $d_1, d_2, \dots, d_n$ gegeben, so soll ein Punkt $M$ derart bestimmt werden, dass, wenn $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ seine Abstände von den $n$ Geraden bedeuten, die Summe

$$k_1\delta_1^2+k_2\delta_2^2+\cdots+k_n\delta_n^2,$$

wo $k_1, k_2, \dots, k_n$ gegebene Constanten sind, ein Minimum ist.

Die Aufgabe ist zwar schon früher, z. B. von Herrn Bertot in den C. R. von 1876, gelöst worden, die Ableitung des Herrn d'Ocagne ist aber eine vollständig andere.

Zunächst wird auf einfache Weise die ebenfalls bekannte Eigenschaft abgeleitet, dass $M$ mit dem Schwerpunkte seiner mit den Massen $k_1, k_2, \dots, k_n$ behafteten Projectionen auf die gegebenen Geraden zusammenfällt. Hierauf fussend, ergiebt sich folgende Lösung der Aufgabe:

Ist $O$ irgend ein Punkt der Ebene, so sei $G$ der Schwerpunkt der mit den Massen $k_1, k_2, \dots, k_n$ behafteten Projectionen von $O$ auf die Geraden $d_1, d_2, \dots, d_n$;

$H$ der Schwerpunkt der Massen $k_1, k_2, \ldots, k_n$, die in den Projectionen des Punktes $G$ auf die durch $O$ parallel zu den Geraden $d_1, d_2, \ldots, d_n$ gezogenen Geraden angebracht sind;

$K$ die Projection von $H$ auf die durch $O$ gezogene Senkrechte zu $OG$;

$J$ der Punkt, wo die Gerade $GH$ die in $O$ gegen $OH$ errichtete Senkrechte schneidet:

dann ist der gesuchte Punkt $M$ der Durchschnittspunkt von $OH$ und der durch $G$ gehenden, zu $JK$ senkrecht stehenden Geraden. Bö.

---

S. Levänen. Bidrag till experimentel bekräftelse af Bernoulli's teorem. Öfversigt af finska vetenskapssocietetens Förhandlingar. Helsingfors. XXXIV. 36-59.

„Buffon's Nadelproblem“ und andere ähnliche führen zu Wahrscheinlichkeitsausdrücken, in welche die Zahl $\pi$ eingeht. Hieraus folgt die Möglichkeit, durch Nadelwerfen den Wert von $\pi$ experimentell zu bestätigen. Der Verf. teilt die Resultate seiner Versuche in dieser Richtung mit. Auf ähnliche Weise kann man auch die Grösse eines gegebenen Winkels und das Verhältnis zweier gegebenen Strecken bestimmen, wie näher gezeigt wird.

Bdn.

---

P. Mansion. Sur le théorème de Jacques Bernoulli. Brux. S. sc. XVI A. 85-87.

Skizze eines strengen Beweises für diesen Satz.

Mn. (Lp.)

---

P. Mansion. Sur la loi des grands nombres de Poisson. Messenger (2) XXII. 56.

Nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird Poisson's Gesetz der grossen Zahlen geprüft. Glr. (Lp.)

---

W. W. Johnson. The theory of errors and method of least squares. New York. John Wiley & Sons. X + 174 S. 12°. [New York M. S. Bull. II. 162-163, Anzeige von Mansfield Merriman.]

---

P. Pizzetti. La legge di probabilità degli errori d'osservazione. Rom. Acc. L. Rend. $I_1$. 380-383.

Herr Pizzetti berichtet über eine Begründung des Gesetzes der Fehlerwahrscheinlichkeit, die er in einer demnächst erscheinenden Arbeit: „I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali" (vergl. das folgende Referat) zu geben versucht hat. Er macht, wie vor ihm schon andere, zunächst die Voraussetzung, dass der zufällige Fehler aus einer grossen Anzahl verschiedener Ursachen hervorgeht, von denen keine den andern gegenüber von hervorragendem Einfluss ist. Sodann wird noch folgendes Postulat aufgestellt: Wenn man aus einer Reihe von Beobachtungen derselben Art durch eine geeignete Combination den passendsten Wert einer physikalischen Grösse ableitet, so wird sich der so berechnete Wert bei unendlicher Zunahme der Anzahl der Beobachtungen dem wahren Werte dieser Grösse unendlich nähern müssen.

In dem hieraus sich ergebenden Fehlergesetz

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-a)^2}$$

muss dann $a$ entweder Null oder a priori bekannt sein. Bö.

---

P. Pizzetti. I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali. IV Centenario Colombiano. Atti della R. Università di Genova. Tipografia del R. Istituto Sordo-Muti. 113-333. 4°.

Herr Pizzetti stellt sich in dieser sehr wichtigen Abhandlung die Aufgabe, zu untersuchen, auf welche Postulate eine rationelle Theorie der Beobachtungsfehler gegründet werden könne.

Das Problem, aus einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen die angemessensten Werte der Unbekannten abzuleiten, ist unbestimmt, so lange man nicht eine Relation zwischen der Angemessenheit eines Resultates und der Grösse des Fehlers, mit welchem es behaftet sein kann, a priori zu Grunde legt. Eine solche Relation mag nach dem Verfasser darin bestehen, dass das „totale Fehlerrisiko" (rischio totale d'errore) so klein als möglich sein soll;

man versteht darunter die Summe der Producte der Wahrscheinlichkeiten $X_i$ der einzelnen Fehler $x_i$ mit einer gewissen Function $\varphi(x_i)$ von $x_i$, welche als das Mass des aus dem Fehler $x_i$ entstehenden Schadens angesehen werden darf, mit anderen Worten: dieselbe Grösse, die man im Spiele als „mathematische Hoffnung" zu bezeichnen pflegt. Setzt man ferner voraus, dass die Fehlerursachen in unendlicher Anzahl und sämtlich von gleicher Wichtigkeit sind, so gelangt man zum exponentiellen Gesetze, woraus sich die ganze Fehlertheorie entwickeln lässt. Die Abhandlung ist bereichert durch drei historische Anhänge, welche die Grundlagen der Fehlertheorie, das Princip des arithmetischen Mittels und das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Fehler behandeln, sowie durch ein Verzeichnis von 503 Arbeiten über die Wahrscheinlichkeitstheorie und deren Anwendungen. Einen Zusatz von 11 weiteren Arbeiten findet man in einer Recension von V. Reina (Nuovo Cimento (3) XXXIII. 43-48). Vi.

---

J. W. Sleschinsky. Zur Theorie der Methode der kleinsten Quadrate. Odessa Ges. XIV. 201-264. (Russisch.)

Im Laufe seines berühmten Streites mit Bienaymé über die Frage der Ausgleichung der Beobachtungen hat Cauchy in den Abhandlungen: „Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature et sur les résultats les plus probables" und „Mémoire sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations" (C. R. XXXVII. 1853. 2e Sem.) eine Reihe von Sätzen gegeben, die zum Beweise der Methode der kleinsten Quadrate dienen können. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, alle diese Sätze vollständig zu beweisen und somit der Methode der kleinsten Quadrate eine neue Grundlage zu geben. In der Einleitung liefert der Verfasser eine historische Skizze der behandelten Frage. Wi.

---

C. Rusjan. Ueber den Beweis des Gauss'schen Gesetzes. Prace mat.-fiz. III. 49-51. (Polnisch.)

Enthält einige Einwendungen gegen die von Herrn Gosiewski

in seinem Aufsatze über das Gauss'sche Fehlergesetz (Prace mat.-fiz. II. 223 - 227) benutzte Methode. Vgl. F. d. M. XXII. 1890. 235. Dn.

---

W. Gosiewski. Ueber das Gesetz der Wahrscheinlichkeit des Systems von Fehlern, die als von einander abhängige Ereignisse betrachtet werden. Prace mat.-fiz. III. 33-48. (Polnisch.)

Die Analogie zwischen dem Maxwell'schen Gesetze der Verteilung der Geschwindigkeiten in vollkommenen Gasen und dem Gauss'schen Gesetze der Verteilung der Beobachtungsfehler hat den Verfasser zu einer neuen Auffassung der Fehlertheorie geführt. Es werden die Beobachtungsfehler

$$u_1 = x - x_1, \quad u_2 = x - x_2, \quad \ldots, \quad u_n = x - x_n$$

(wo $x$ der wahre Wert, $x_1, x_1, \ldots, x_n$ die beobachteten Werte von $x$) als Coordinaten eines Punktes in einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, der radius vector des Punktes seiner Grösse und Lage nach als die „Resultante" des Fehlersystems betrachtet. Es wird mit Gauss vorausgesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit des Systems eine Function der Resultante ist, aber eine von der Richtung der letzteren unabhängige Function. Das zu Grunde gelegte Coordinatensystem sei im allgemeinen schiefwinklig; $(\mu, \nu)$ bedeute den Winkel, den die Axen $\mu$ und $\nu$ des Systems mit einander bilden [$\mu = 1, 2, \ldots, n$; $\nu = 1, 2, \ldots, n$; $\cos(\mu, \mu) = 1$].

Die Wahrscheinlichkeit $P$ des Fehlersystems wird unter den genannten Voraussetzungen durch die Formel dargestellt:

$$(1) \qquad P = k_n f(\Sigma_\mu \Sigma_\nu u_\mu u_\nu \cos(\mu, \nu)) du_1 \, du_2 \ldots du_n,$$

wo

$$k_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(1,2) & \ldots & \cos(1,n) \\ \cos(2,1) & \cos(2,2) & \ldots & \cos(2,n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cos(n,1) & \cos(n,2) & \ldots & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

und die Natur der Function $f$ zu bestimmen ist. Bezeichnet man diese Function für $n = 1$ mit $\varphi$, so wird die Wahrscheinlichkeit des ersten Fehlers $= \varphi(u^2)du$; wenn also die Fehler $u_1, u_2, \ldots, u_n$

unabhängige Ereignisse sind, so wird

$$(2) \qquad P = \varphi(u_1^2)\varphi(u_2^2) \ldots \varphi(u_n^2)\, du_1\, du_2 \ldots du_n.$$

Vergleicht man die beiden Formeln (1) und (2), so gelangt man zur Gauss'schen Formel

$$\varphi(u^2)du = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha u^2} du,$$

wo $\alpha$ eine positive Constante bedeutet.

Es wird dann der Begriff der gegenseitigen Abhängigkeit der Ereignisse definirt und das Mass dieser Abhängigkeit mit dem zu Grunde gelegten Coordinatensysteme in Verbindung gesetzt. Der völligen Unabhängigkeit entspricht das orthogonale, der grössten Abhängigkeit das „nullwinklige“, den übrigen Stufen der Abhängigkeit das schiefwinklige Coordinatensystem. Es wird die Function

$$(3) \qquad \varrho_n^2 = \Sigma_\mu \Sigma_\nu\, u_\mu u_\nu \cos(\mu, \nu)$$

durch eine orthogonale Transformation in die Form $\Sigma_\lambda s_\lambda v_\lambda^2$ gebracht und auf das System $\sqrt{s_\lambda} v_\lambda$ unabhängiger Ereignisse die Gauss'sche Formel angewandt. Es wird dann aus (1):

$$(4) \qquad P = k_n \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\alpha\varrho_n^2}\, du_1\, du_2 \ldots du_n.$$

Der wahrscheinliche Wert von $P$ muss also der Bedingung

$$\Sigma_\mu \Sigma_\nu (x - x_\mu)(x - x_\nu)\cos(\mu, \nu) = \text{Minimum}$$

Genüge leisten: Schreibt man Gleichung (3) unter der Form

$$\varrho_n^2 = \Sigma_\mu \Sigma_\nu (x - \bar{x} + \bar{x} - x_\mu)(x - \bar{x} + \bar{x} - x_\nu)\cos(\mu, \nu)$$

und wählt $\bar{x}$ so, dass

$$(5) \qquad \Sigma_\mu \Sigma_\nu (\bar{x} - x_\mu)\cos(\mu, \nu) = 0,$$

so ist:

$$\varrho_n^2 = \Sigma_\mu \Sigma_\nu (\bar{x} - x_\mu)(\bar{x} - x_\nu)\cos(\mu, \nu) + \Sigma_\mu \Sigma_\nu \cos(\mu, \nu)\varepsilon^2$$

$[x - \bar{x} = \varepsilon]$; es wird also das aus den Fehlern $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_n$ bestehende Ereignis in die zwei folgenden Systeme zerlegt: das erste enthält $n-1$ Ereignisse mit den $n$ Fehlern $\bar{x} - x_1, \bar{x} - x_2, \ldots, \bar{x} - x_n$, die die Relation (5) erfüllen; das zweite entspricht dem Fehler $(\Sigma_\mu \Sigma_\nu \cos(\mu, \nu))^{\frac{1}{2}}\varepsilon$. Die Wahrscheinlichkeit des zweiten ist

$$p_\varepsilon = \left(\frac{\alpha}{\pi} \Sigma_\mu \Sigma_\nu \cos(\mu, \nu)\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha \Sigma_\mu \Sigma_\nu \cos(\mu,\nu)\varepsilon^2} d\varepsilon.$$

In den Formeln dieser Theorie sind $1+\frac{1}{2}n(n-1)$ Constanten $\alpha$ und $\cos(\mu, \nu)$ enthalten. Der Verfasser zeigt, wie sie in speciellen Fällen zu bestimmen sind. Er untersucht die Fälle, wo alle $(\mu, \nu)$ gleich 0 sind und $(\mu, \nu)$ gleich einer Constante. Aus der Untersuchung zieht er mehrere interessante Schlüsse, die sich auf die Fehlertheorie und auf das Gauss'sche Princip des arithmetischen Mittels beziehen. Dn.

---

W. W. Johnson. On Peter's formula for probable error. New York M. S. Bull. II. 57-61.

Nach einigen einleitenden Betrachtungen über den wahrscheinlichen Fehler $r$, den mittleren Fehler $\varepsilon$ und den mittleren absoluten Fehler $\eta$ werden einige Ableitungen der Formel

$$r = \varrho\sqrt{\pi}\frac{\Sigma[v]}{\sqrt{n(n-1)}}$$

angeführt, welche von C. A. F. Peters in den Astron. Nachr. XLIV. 29-32. (1856) zuerst aufgestellt ist. Die kurz besprochenen Autoren sind Chauvenet („Spherical and practical astronomy"), Watson („Theoretical astronomy"), Merriman („Text-book on the method of least squares"). Die Darstellung in Czuber's „Theorie der Beobachtungsfehler" (F. d. M. XXIII. 1891. 235) S. 163 ff. mit der Helmert'schen Begründung aus Astron. Nachr. LXXXV und LXXXVIII ist dem Verf., wie es scheint, nicht bekannt geworden. Lp.

---

F. Y. Edgeworth. Correlated averages. Phil. Mag. (5) XXXIV. 190-204.

F. Y. Edgeworth. The law of error and correlated averages. Phil. Mag. (5) XXXIV. 429-438, 518-526.

Die „Correlation" zwischen den Gliedern eines Systems, wie z. B. den Gliedmassen oder anderem messbaren Zubehör eines Organismus, kann im allgemeinen durch die Formel

$$\Pi = Je^{-R}dx_1\,dx_2\,dx_3\ldots$$

ausgedrückt werden, wo

$$R = p_1(X_1-x_1)^2+p_2(X_2-x_2)^2+\cdots$$
$$+2q_{12}(X_1-x_1)(X_2-x_2)+2q_{13}(X_1-x_1)(X_3-x_3)+\cdots,$$

wenn $X_1, X_2, \ldots$ die Durchschnittswerte für die bezüglichen Organe sind, ferner $x_1, x_2, \ldots$ besondere Werte für dieselben, endlich $p_1, p_2, \ldots, q_{12}, q_{13}, \ldots$ Constanten, die aus Beobachtungen zu erlangen sind; $J$ ist eine aus der Bedingung abgeleitete Constante, dass das Integral von $\Pi$ zwischen extremen Grenzen die Einheit ist. Der Ausdruck $\Pi$ stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass irgend welche besonderen Werte von $x_1, x_2, \ldots$ zusammentreffen; er ermöglicht die Beantwortung der Fragen, welches der wahrscheinlichste Wert einer einzelnen Abweichung $x_r$ ist, welche festgehaltenen Werten $x'_1, x'_2, \ldots$ der anderen Variabeln entspricht; ferner welches die Verstreuung der Werte von $x_r$ um ihr Mittel ist, sobald die anderen Variabeln fest gehalten werden. In dem ersten Artikel wird gezeigt, wie die Constanten $p_1, p_2, \ldots, q_{12}, q_{13}, \ldots$ berechnet werden, und mehrere Erläuterungen hierzu werden gegeben. Der zweite Aufsatz dagegen ist ein Beitrag zur Aufsuchung der allgemeinsten Bedingungen, unter denen das Exponentialgesetz für den Fehler erfüllt wird, unter Zufügung einiger Anwendungen auf die Theorie der correlaten Mittelwerte. Man nehme den Fall an, bei welchem jedes Glied einer Gruppe messbarer Gegenstände nicht eine lineare Function ist, sondern irgend eine Function einer linearen Function zahlreicher Elemente $x_1, x_2, \ldots$, die nach irgend einem unabhängigen Gesetze der Häufigkeit zwischen den Grenzen schwanken bezw. 0 bis $a_1$, 0 bis $a_2, \ldots$, welche klein sind im Vergleich zu der Summe $\Sigma a$ der Spielweiten, wenn $\Sigma a$ als Einheit genommen wird. Möge $F(\Xi)$ die Function sein, wo

$$\Xi = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

ist und $p_1, p_2, \ldots$ von einer und derselben Grössenordnung sind. Nach der üblichen Theorie schwankt $\Xi$ um seinen Durchschnittswert $X$ gemäss einer Wahrscheinlichkeitscurve, deren Modulus von der Ordnung $1/\sqrt{n}$ ist. Es ist aber

$$F(\Xi) = F(X+\xi) = F(X) + \xi F'(X) + \tfrac{1}{2}\xi^2 F''(X+\theta\xi),$$

und dieser Ausdruck wird angenähert seinen ersten beiden Termen gleich, wenn $\frac{1}{2}\xi F''(X+\theta\xi)$ klein ist im Vergleich mit $F'(X)$ für Werte von $\xi$ von der Ordnung $1/\sqrt{n}$. Wenn diese Bedingung gilt, dann ordnet sich der grössere Teil der aus den variirenden Werten

von $\Xi$ gebildeten Gruppe nach der üblichen Theorie gemäss einer Wahrscheinlichkeitscurve mit dem Mittelpunkte $X$ bis zu einem Abstande $\pm\xi$ von jenem Mittelpunkte hin, wo $\xi$ ein kleiner Bruch ist. Demnach tritt der grössere Teil der Gruppen $F(\Xi)$ unter das Gesetz einer Wahrscheinlichkeitscurve mit dem Mittelpunkte $F(X)$ und mit einem Modulus gleich dem von $\xi$, multiplicirt mit $F'(X)$. Beispiele, in denen die Bedingungen erfüllt sind, werden gegeben, und die Grenzen, innerhalb deren man erwarten kann, dass die Regel gelte, werden durch die Betrachtung einer Ausnahme angedeutet. Diese Ausnahmen entstehen, wenn $F$ eine Function der Abweichung einer Beobachtung von ihrem Durchschnittswerte ist; die Regel ist erfüllt, wenn $F$ eine einfache stetige Function der Beobachtungen selbst ist, gemessen von einem Nullpunkte an unterhalb des geringsten möglichen Wertes. Wenn irgend eine derartige Function einer Beobachtung für die Beobachtung selbst in einer dem Fehlergesetze gehorchenden Gruppe substituirt wird, so darf man erwarten, dass die transformirte Gruppe auch jenem Gesetze gehorche. Eine Anwendung dieser Ueberlegung wird zur Beantwortung des Einwandes von Cournot und anderen gegen Quetelet's Lehre vom Durchschnittsmenschen gemacht. Die Abhandlung geht dann über zur Betrachtung des allgemeinen Falles, bei welchem jedes Glied einer Gruppe eine beliebige Function einer Anzahl von Elementen ist, indem jedes einzelne, wie vorher, nach irgend einem unabhängigen Gesetze der Häufigkeit innerhalb eines Spielraumes schwankt, der relativ klein ist; die Function

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(X_1+\xi_1, X_2+\xi_2, \ldots),$$

wo $X_1, X_2, \ldots$ die Mittelwerte sind, wird hierbei entwickelt, und die Glieder, welche höhere Potenzen von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ als die erste enthalten, werden vernachlässigt. Ausnahmen werden betrachtet, und eine Anwendung wird gemacht auf die Theorie der correlaten Mittel in der Absicht, den oben gegebenen Ausdruck für $\Pi$ herzustellen.

Gbs. (Lp.)

---

J. Bertrand. Note sur un théorème du calcul des probabilités. C. R. CXIV. 701-703.

Ist $N$ die wahrscheinliche Anzahl des Eintreffens eines Er-

eignisses bei einer bestimmten Serie von Versuchen, und sind die absoluten Abweichungen gegen $N$, wenn diese Versuchsreihe $m$-mal wiederholt worden ist, gleich $z_1, z_2, \ldots, z_m$, so hat der Quotient

$$\left(\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_m}{m}\right)^2 : \frac{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_m^2}{m}$$

den wahrscheinlichen Wert $\frac{2}{\pi}$.

Dieses Theorem kann man unmittelbar auf die Messungen einer und derselben Grösse anwenden; jedoch muss man bei seiner Anwendung auf andere Fälle sehr vorsichtig sein, da es gewisse Bedingungen voraussetzt, ohne die es seine Gültigkeit verliert.

Als Herr Bertrand dieses an einem bestimmten Beispiel zeigen wollte, erhielt er ein merkwürdiges Resultat.

Gilt nämlich für eine sehr grosse Anzahl von Messungen einer Grösse das Gauss'sche Fehlergesetz

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 x^2},$$

so ist der wahrscheinliche Wert des absolut genommenen Fehlers $\frac{1}{k\sqrt{\pi}}$ und der seines Quadrats $\frac{1}{2k^2}$. Daher ist das Verhältnis

$$\frac{\frac{1}{2k^2}}{\left(\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\right)^2} = \frac{\pi}{2},$$

in Uebereinstimmung mit dem obigen Theorem.

Ist nun die Anzahl der Messungen $n$, und stellt man die $n$ absolut genommenen Fehler durch $\frac{1}{k\sqrt{\pi}} + z_i$ dar, so ist der wahrscheinliche absolute Wert von $z_i$ gleich

$$\frac{2}{k\sqrt{\pi}}\left[\Theta\left(\frac{1}{\pi}\right) - 1 + e^{-\frac{1}{\pi}}\right]; \quad \Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

Der wahrscheinliche Wert von $z_i^2$ ist ferner

$$\frac{1}{k^2} \frac{\pi - 2}{2\pi}.$$

Wenn nun das fragliche Theorem hier anwendbar wäre, so müsste sein

$$\frac{\pi-2}{8\left[\Theta\left(\frac{1}{\pi}\right)-1+e^{-\frac{1}{\pi}}\right]^2}=\frac{\pi}{2}$$

oder

$$\Theta\left(\frac{1}{\pi}\right)=1+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}-e^{-\frac{1}{\pi}}.$$

$\Theta\left(\frac{1}{\pi}\right)$ ist aber 0,57497, während der Ausdruck rechts gleich 0,574028 ist.

Auf die Frage, weshalb diese beiden Werte so sehr nahe gleich sind, obgleich das Theorem sicher nicht mehr anwendbar war, weiss Herr Bertrand keine Antwort. Bö.

---

R. Mehmke. Ueber das Seidel'sche Verfahren, um lineare Gleichungen bei einer sehr grossen Anzahl der Unbekannten durch successive Annäherung aufzulösen. Mosk. Math. Samml. XVI. 342-345.

R. Mehmke und P. A. Nekrassoff. Auflösung eines linearen Systems von Gleichungen durch successive Annäherung. Mosk. Math. Samml. XVI. 437-459. (Deutsch und Russisch.)

P. A. Nekrassoff. Zur Frage von der Auflösung des linearen Systems von Gleichungen mit einer grossen Zahl von Unbekannten durch successive Annäherungen. Petersb. Abh. LXIX. (Russisch.)

Das Referat über die beiden ersten Arbeiten ist S. 105 dieses Bandes gegeben worden. Die letzte Abhandlung schliesst sich an die Artikel des Hrn. Mehmke an und giebt fünf andere Regeln für die Convergenz des Seidel'schen Verfahrens. Wi.

---

J. Merkel. Theoretische und experimentelle Begründung der Fehlermethoden. Wundt's Philosophische Studien VII. 558-629, VIII. 97-137.

Der Aufsatz beschäftigt sich mit den psychophysischen Methoden, und zwar wesentlich mit der „Methode der richtigen und falschen Fälle“ und der ihr verwandten Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle; eine eingehendere Untersuchung der mittleren Fehler soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Die Disposition der umfangreichen Abhandlung ist die folgende: Einleitung. I. Die Methode der richtigen und falschen Fälle. A. Zur Theorie der Beobachtungsfehler. B. Methode der richtigen und falschen Fälle bei Benutzung gleicher Reize. C. Methode der richtigen und falschen Fälle bei Benutzung verschiedener Reize. II. Die Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle. III. Die Methode der mittleren Abstufungen, der doppelten Reize und gleicher Reizverhältnisse. IV. Beziehungen zwischen den Schwellenwerten der Methode der richtigen und falschen Fälle, der Methode der Gleichheits- und Ungleichheitsfälle und der Methode der Minimaländerungen. V. Experimentelle Begründung der theoretischen Ergebnisse auf Grund bereits veröffentlichter Versuche. — Ueber die Arbeit selbst urteilt Herr Kämpfe, der auf demselben Gebiete arbeitet: Hr. J. Merkel „hat in seinen neuesten Veröffentlichungen in so gründlicher und origineller Weise aus den Elementen heraus die mathematischen Formeln entwickelt, dass ich dadurch des ersten Teiles meiner Aufgabe überhoben wurde. In Bezug auf die Natur der Elementarfehler, ihre Grösse, die relative Häufigkeit ihres Zusammentreffens, in Bezug ferner auf die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die durch zufällige Fehlervorgänge beeinflusste Beurteilung einer Reizdifferenz stimmen meine Anschauungen mit den seinigen vollständig überein“. Lp.

---

Br. Kämpfe. Beiträge zur experimentellen Prüfung der Methode der richtigen und falschen Fälle. Wundt's Philosophische Studien. VIII. 511-591.

---

L. Stieda. Ueber die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik. 2. Aufl. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. VI + 25 S. 8°.

Diese Abhandlung ist eine Neuausgabe eines bereits 1882 im Archiv für Anthropologie veröffentlichten Aufsatzes. Der Verf. empfiehlt die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und des Gauss'schen Fehlergesetzes auf solche anthropologischen Messungen, die darauf hinzielen, einen „Typus" kennen zu lernen. Nachdem auf die allen Mathematikern geläufige Weise der Mittelwert der Messungen und der wahrscheinliche Fehler einer Messung sowie des Resultats definirt und berechnet ist, wird sich durch Vergleichung der diesem wahrscheinlichen Fehler entsprechenden Gauss'schen Fehlercurve mit der Curve der den einzelnen Beobachtungen anhaftenden Fehler unter andern auch erkennen lassen, ob man es wirklich mit einem „Typus" zu thun hat, oder nicht. An 900 Schädelmessungen werden die Vorschläge des Verf. ausführlich erläutert. Bö.

---

R. H. van Dorsten. De grondslagen der verzekering tegen invaliditeit. Haag. Mart. Nyhoff. 76 S.

Der erste Abschnitt enthält eine geschichtliche kritische Zusammenstellung der Untersuchungen von Heym, Wiegand, Zeuner, Wittstein, Wolf, Kanner, Behm, Dienger, Küttner und Zimmermann betreffs des Gesetzes, nach welchem sich die vier Wahrscheinlichkeiten $W_x(l, v)$, $W_x(l, i)$, $W_x(i, s)$, $W_x(v, s)$ aus den Sterblichkeits- und Invaliditätserwartungen für eine $x$-jährige Person zusammensetzen. Hierin stehen die Buchstaben $l$, $s$, $v$, $i$ abgekürzt für Leben, Sterben, Valide- und Invalidesein, sodass z. B. $W_x(l, v)$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass eine $x$-jährige Person im nächsten Jahre am Leben und valide bleibt.

Im zweiten Abschnitte werden die der Berechnung der Prämien zu Grunde gelegten Tabellen besprochen und mit einander verglichen. Heym's Hypothese, die Zeuner'sche Invaliditätstabelle, die von Wiegand, Behm und Zimmermann aus den Daten des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen hergeleiteten Invaliditätserwartungen, sowie die von Caron, Küttner und Kaan für Steinkohlenbergleute gegebenen Zahlen werden einer näheren Betrachtung unterworfen. Auch die Behm'sche Tafel, welche dem deutschen

Reichsgesetze vom 23. Mai 1889 zu Grunde liegt und mehrere andere werden berücksichtigt.

Der dritte Abschnitt enthält die Herleitung der zur Nettoprämienberechnung bei mehreren Combinationen dienlichen Formeln. Zum Schluss sind vergleichende Tabellen der Invaliditäts- und Sterblichkeitserwartungen hinzugefügt, sowie einige dieselben anschaulich darstellende Curven. Mo.

---

G. Friedrich. Die berufsgenossenschaftlichen Gefahrentarife und ihr Genauigkeitsgrad. Ehrenzweig's Assecuranz-Jahrb. XII. (1891.) 69-132.

Die Kosten der reichsgesetzlichen Unfallversicherung der Arbeiter werden bekanntlich durch Beiträge der Unternehmer aufgebracht, die sich nach der ausgezahlten Lohnsumme und nach der Gefährlichkeit des Betriebes bemessen, indem man zum Ausgleich des verschieden hohen Kostenaufwandes, den gleich grosse, aber verschieden gefährliche Betriebe verursachen, Beitrags-Verhältniszahlen je nach der Gefährlichkeit der Betriebe aufstellt (Gefahrentarife). Zur Revision dieser vorerst noch ziemlich unsicheren Tarife hat sich jetzt schon umfangreiches statistisches Material aufgesammelt. Es wird nun gezeigt, dass man auf Grund der statistischen Ermittelungen zwar nie absolut scharfe Gefahrenziffern wird aufstellen können, dass sich aber wohl Grenzen angeben lassen, innerhalb deren die Gefahrentarife mit beliebigem Wahrscheinlichkeitsgrade zu suchen sind. Diese Grenzen rücken mit wachsender Anzahl der entschädigten Unfälle für jeden einzelnen Gewerbebetrieb im Laufe der Zeit immer mehr zusammen. Sie werden mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmt, und hieraus wird eine sachgemässe Methode zur Revision der Gefahrentarife abgeleitet.

In dem Aufsatz werden in vier Capiteln: Allgemeines über Gefahrentarife, die Zahl der Unfälle, die Kosten der Unfälle und die wahrscheinlichen Fehler der Gefahrentarife behandelt.

Bö.

---

E. KOBALD. Ueber das Versicherungs-Wesen der Bergwerks-Bruderladen und ähnlicher Kasseneinrichtungen. I. Teil. Die Invaliditätsversicherung. (Sonderabdr. aus dem Berg- und Hüttenmännischen Jahrb. XL.) Leoben. L. Nüssler. 68 S. 8°.

Dieser Aufsatz entstand aus Vorlesungen, die der Verf. an der k. k. Bergakademie in Leoben alljährlich über Versicherungswesen hält. Demgemäss beziehen sich die Entwickelungen des Verf. fast ausschliesslich auf die Bestimmungen und auf die Nomenclatur des österreichischen Bruderladengesetzes von 1889, das die Principien der wissenschaftlichen Versicherungstechnik am reinsten zum Ausdruck bringe, während die Durchführung der Invaliditätsversicherung nach dem deutschen Reichsgesetze sich in mehrfacher Hinsicht von der durch die Versicherungswissenschaft vorgeschriebenen unterscheide. Wenn der Aufsatz auch nur zur Einleitung in die Theorie der Invaliditätsversicherung dienen soll, so glaubt der Verf. dennoch, manches Neue bieten zu können.

Nach einer dem Gesetz der grossen Zahlen, der Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit, der Zinseszinsrechnung und der Interpolation gewidmeten Einleitung werden in zwei Abschnitten die allgemeinen Leibrenten einzelner Personen auf den Erlebensfall sowie die constanten und steigenden Invalidenpensionen behandelt. Die durchgeführten Aufgaben scheinen die möglichen Fälle ziemlich vollständig zur Darstellung zu bringen; namentlich wurden in der Theorie der steigenden Invalidenpensionen einige bisher unberücksichtigt gebliebene Fälle in Betracht gezogen.

Die mathematische Behandlung des Gegenstandes wurde durch die Einführung eines früher nicht betrachteten Elementes, nämlich der Anzahl lebender Invaliden, welche aus der Reihe von $A(x)$ Activen vom Alter $x$ im Laufe von $n$ Jahren hervorgehen, bedeutend vereinfacht.

Den Schluss bilden fünf Zahlentabellen für die am meisten bei den Berechnungen gebrauchten Functionen. Ihnen wurde die Mortalitätstafel für die österreichischen Berg- und Hüttenarbeiter zu Grunde gelegt. Bö.

---

## Weitere Litteratur.

IRVING FISHER. Mathematical investigations in the theory of value and prices. New Haven. 124 S. [New York M. S. Bull. II. 204-211, Anzeige von Hrn. Th. S. Fiske.]

T. CARRERAS. Traité analytique du problème d'échecs. Paris. VIII + 447 S.

J. DOMKE. Beitrag zur theoretischen und rechnerischen Ausgleichung periodischer Schraubenfehler. Berlin. III + 46 S.

A. NEWSHOLME. Elements of vital statistics. 3rd ed. London. 850 S.

H. WESTERGAARD. Die Grundzüge der Theorie der Statistik. Jena. Gustav Fischer. [Nature XLVI. 437-439.]

A. FRANCKE. Mathematische Grundlagen der Wirtschaftslehre. Berlin. Ernst und Sohn. 51 S. 8°.

PH. FALKOWICZ. Der Pensionsfond. Darstellung und versicherungstechnische Berechnung der Leibrenten, Invalidenpensionen, Wittwenpensionen und Erziehungsbeiträge für Waisen. Prag. II + 101 S. gr. 4°.

A. ARNAUDEAU. Guide des emprunts. Tables des valeurs intrinsèques et durées probables des obligations de 500fr pour toutes les époques de l'emprunt et à tous les taux usuels, etc. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

H. E. NIGHTINGALE. Formulas and tables of values for life interests and reversions. London. Journ. Inst. Actuar. 71 S.

P. DE LAFITTE. Tables de communication à divers taux d'intérêt pour les trois assurances des sociétés de secours mutuels. Supplément à l'essai d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels. Paris. 34 S. 8°. (1893).

---

# Fünfter Abschnitt.

## Reihen.

### Capitel 1.

### Allgemeines.

E. Catalan. Nouvelles notes d'algèbre et d'analyse. Belg. Mém. XLVIII. 98 S.

Titel der vierzehn Paragraphen, aus denen diese Arbeit besteht: I. Ueber die Binomialformel. II. Beziehungen zwischen bestimmten Integralen. III. Ueber die Euler'schen Integrale. IV. Ueber eine Poisson'sche Formel. V. Ueber die Function $\frac{1}{x(1+x)^p}$. VI. Verallgemeinerung einer Formel des Hrn. Genocchi. VII. Einige Summirungen von Sinus und von Cosinus. VIII. Ueber die unendlichen Producte. IX. Ueber das Integral $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^p x \cos^q x dx$. X. Vergleichung zweier Kreisfunctionen. XI. Ueber eine Frage der Wahrscheinlichkeit. XII. Ueber die Gleichung $x^p - 1 = 0$, wenn $p$ eine Primzahl von der Form $4\mu+1$ ist. XIII. Ueber die Gleichung $x^m - 1 = 0$ ($m = pq$, $p$ und $q$ ungerade und relativ prim). XIV. Eine auf Kreisfunctionen bezügliche Formel. — Wir fügen einige Andeutungen über die in einigen dieser Capitel behandelten Gegenstände aus dieser Schrift hinzu, welche eine Ergänzung mehrerer früherer Arbeiten ist, unter anderem derjenigen über die Constante $G$.

1. Man setze

$$C_{m,n} = \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n},$$

so ist

$$(1+x)^{n-1} + C_{q,1}x(1+x)^{n-2} + C_{q+1,2}x^2(1+x)^{n-3} + \cdots + C_{q+n-2,n-1}x^{n-1}$$
$$= 1 + C_{q+n-1}x + C_{q+n-2,2}x^2 + \cdots + C_{q+n-1,q}x^{n-1}.$$

Verschiedene Folgerungen, insbesondere: Wenn $\alpha+\beta = 1$, $p+q = m$, so ist die Summe der $p+1$ ersten Glieder der Entwickelung von $(1-\beta)^{-q}$, mit $\alpha^q$ multiplicirt, gleich der Summe der $p+1$ ersten Glieder der Entwickelung von $(\alpha+\beta)^m$.

2. Verschiedene besondere Fälle der Formel:

$$f(1+x) = q\int_0^1 u^{q-1}f(u+x)du + \int_0^1 u^q f'(u+x)du;$$

unter den erhaltenen Formeln ist anzumerken:

$$\int_0^1 l\,\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}\,dx = y(ly-1).$$

3. Indem hierin $l\Gamma(x)$ durch einen seiner bekannten Werte ersetzt wird, findet der Verf. andere merkwürdige bestimmte Integrale. Er beschäftigt sich auch mit der Reihe

$$B = \varpi(1) - \varpi(2) + \varpi(3) - \varpi(4) + \cdots,$$

wo $\varpi(x)$ die Binet'sche Function ist, und beweist, dass

$$G = \int \frac{12-2e^x}{e^{4x}-1}\,x\,dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

5. Haupteigenschaften der Function $y = \dfrac{1}{x(1+x)^p}$, welche Analogien mit den Functionen $X_n$ aufweist.

9. Streng abgeleitete Resultate von Serret in allen Fällen, in denen sie existiren.

11. Aufgabe des Untergangs des Spielers. Kritische Darstellung dreier Lösungen Rouché's und einer mit der ersten Rouché'schen übereinstimmenden Lösung von Delannoy. Daraus sich ergebende Identitäten.

12-13. Ergänzungen und Vereinfachungen früherer Noten.

14. Zerlegung von

$$\frac{\sin(pqx)\sin x}{\sin(px)\sin(qx)}$$

in eine Summe von Cosinus. Zahlreiche Integrale, die aus der gefundenen Formel folgen. Mn. (Lp.)

---

M. Fouché. Démonstration d'un théorème très général sur les limites. J. de Math. élém. (4) I. 31-33.

Die Notiz enthält eine einfache Herleitung des folgenden, von Jablonski (compléments d'algèbre) herrührenden Satzes: Sind zwei Grössenfolgen $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ und $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ so beschaffen, dass für beliebige Indices stets $a_i < b_j$ ist, und dass die Differenz $b_n - a_n$ mit wachsendem $n$ gegen Null convergirt, so nähern sich die Elemente der beiden Grössenfolgen mit wachsendem Index einem gemeinsamen Grenzwerte. Gz.

---

H. Brunn. Ueber die Grössenfolge einer Reihe von Mittelwerten. Schlömilch Z. XXXVII. 60-63.

Die Mittelwerte $M_\nu$ aus $n$ von einander verschiedenen positiven Grössen $a_1, a_2, \dots, a_n$, berechnet mittels der fundamentalen symmetrischen Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$, bilden eine fallende Reihe.

Dabei bedeutet $f_m(a_1, a_2, \dots, a_n)$ die Summe der als Producte aufgefassten Combinationen (ohne Wiederholung) der $n$ Grössen zur $m^{\text{ten}}$ Klasse; und es ist

$$M_\nu = \sqrt[\nu]{\frac{f_\nu(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\binom{n}{\nu}}}.$$

Wz.

---

Fl. Cajori. Multiplication of series. New York M. S. Bull. I. 184-189.

Kurze Uebersicht über die historische Entwickelung der Lehre von der Multiplication unendlicher Reihen; offenbar unter dem

Einflusse der Arbeiten der Herren Pringsheim (F. d. M. XV. 1883. 177ff.) und Voss (F. d. M. XVI. 1884. 195). Lp.

---

Fl. Cajori. Evolution of criteria of convergence. New York M. S. Bull. II. 1-10.

Eine kurze Darstellung der historischen Entwickelung der Lehre von der Convergenz der Reihen, hauptsächlich nach den grossen Arbeiten des Herrn Pringsheim (F. d. M. XXI. 1889. 230ff.)

Lp.

---

A. Cayley. Note on uniform convergence. Edinb. Proc. XIX. 203-207.

Der Verf. macht einen Einwand geltend (man kann sagen einen sprachlichen) gegen die Definition der gleichmässigen Convergenz, sowie diese in Jordan's Cours d'analyse de l'École Polytechnique (I, 1882) und in Chrystal's Algebra (II, 1889) gegeben wird, und entwickelt eine andere und nach seiner Ansicht bessere Methode zur Behandlung der Frage. Cly. (Lp.)

---

V. Jamet. Sur les séries à termes positifs. C. R. CXIV. 57-60.

A. de Saint-Germain. Caractère de convergence des séries. C. R. CXV. 1258-1259.

Herr Jamet behandelt eine Klasse convergenter Reihen positiver Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots$, für welche $\lim u_n = 0$ und $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$ ist, und leitet den folgenden Satz ab: Die Reihe positiver Glieder $u_0, u_1, u_2, \ldots$ ist convergent oder divergent, je nachdem eine positive Zahl $p$ von der Beschaffenheit existirt, dass $(u_n)^{n^{-p}}$ für ein unendliches $n$ gegen eine Grenze convergirt, die kleiner oder grösser als 1 ist.

Von diesem Satze giebt Herr A. de Saint-Germain folgende Verallgemeinerung: Bedeutet $\varphi(n)$ eine Function, welche für grosse Werte von $n$ positiv ist und für $n = \infty$ gegen Null convergirt, so

ist die Reihe positiver Glieder $u_0, u_1, u_2, \dots$ convergent oder divergent, je nachdem für $n=\infty$ der Ausdruck

$$(u_n)^{\varphi(n)}$$

kleiner oder grösser als 1 wird. — Setzt man ferner diesen Ausdruck gleich $1-\varepsilon_n$, wo $\varepsilon_n$ für $n=\infty$ verschwindet, so ist die Reihe convergent oder divergent, je nachdem $\lim \frac{\varepsilon_n}{\varphi(n)\log n} > 1$ oder $< 1$ ist. Wz.

---

V. Jamet. Sur les séries à termes positifs. Nouv. Ann. (3) XI. 99-103.

Es wird folgender Satz aufgestellt und bewiesen. Die Reihe der positiven $u_1, u_2, u_3, \dots$ convergirt noch selbst im Falle $\lim \sqrt[n]{u_n}=1$ für $n=\infty$, wenn erstens $n(1-\sqrt[n]{u_n})=\infty$ ist, und zweitens zwischen 0 und 1 eine Zahl $p$ existirt, derart dass $n^{1-p}(1-\sqrt[n]{u_n})$ einen endlichen Grenzwert ($>0$) hat. Die weitere Untersuchung ergiebt, dass die Reihe convergirt, wenn, für irgend ein positives $p$, $\lim (u_n)^{\frac{1}{n^p}} < 1$; divergirt, wenn für irgend ein positives $p$ der Grenzwert $>1$ ist.

H.

---

A. de Saint-Germain. Sur la convergence des séries. Nouv. Ann. (3) XI. 267-268.

Das von Hrn. Jamet erhaltene (im vorigen Bericht zuletzt ausgesprochene) Convergenz-Kriterium wird hier durch einen sehr einfachen Schluss gewonnen. H.

---

G. de Longchamps. Le calcul des séries convergentes. Progreso mat. II. 10-15, 37-41.

Untersuchungen über die Frage, wie viele Glieder einer convergenten Reihe

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

zu nehmen sind, damit $U$ mit einer vorgegebenen Annäherung $1/\alpha$ gefunden werde; Anwendungen auf einzelne besondere Reihen.

Tx. (Lp.)

---

J. Bruno de Cabêdo. Sobre a convergencia dos productos infinidos. Teixeira J. X. 138-140.

Beweis einiger bekannten elementaren Lehrsätze betreffs der Convergenz unendlicher Producte. Tx. (Lp.)

---

J. Petersen. Mindre Meddelelser. Naturforskermöde. 354-356.

Kleine Mitteilungen. Vortrag gehalten bei der Naturforscherversammlung in Kopenhagen, 1892.

1) $u_0, u_1, u_2, \ldots$ sei eine Reihe complexer Grössen. Werden diese Grössen und ihre Summe auf die gewöhnliche Weise dargestellt, so bekommen wir eine gebrochene Linie, die sich einer continuirlichen Curve mehr und mehr annähert.

Betrachten wir jetzt die Grenzstellung für den osculirenden Kreis, und nennen wir die dem Centrum dieses Kreises entsprechende Zahl $b$, so wird die Summe dieser Reihe die Form $b+a$ annehmen, indem $a$ ein unbestimmtes Argument ist, wenn die Bedingung stattfindet, dass

$$\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{mod}(u_n+u_{n+1})}{\arg u_{n+1}-\arg u_n}$$

von einem gewissen Gliede an stets abnimmt und gegen einen bestimmten Wert $a$ convergirt.

2) Die Summe der Reihe

$$l2\left(\frac{1}{l2}+\frac{1}{l4}+\frac{1}{l6}+\cdots\right)+l3\left(\frac{1}{l3}+\frac{1}{l6}+\frac{1}{l9}+\cdots\right)$$
$$+l5\left(\frac{1}{l5}+\frac{1}{l10}+\frac{1}{l15}+\cdots\right)-l6\left(\frac{1}{l6}+\frac{1}{l12}+\frac{1}{l18}+\cdots\right),$$

wo die Vorzeichen durch die Möbius'schen Factoren bestimmt werden, und wo die Reihen aufhören, wenn die Zahl vor der Parenthese einen gewissen Wert $n$ oder das unmittelbar niedrigere Multiplum erreicht hat, giebt die Anzahl der Primzahlen an + der

halben Anzahl der Primzahlquadrate u. s. w., welche niedriger oder gleich $n$ sind.

Eine erste Annäherung an diese Summe ist der Integrallogarithmus, mit

$$\tfrac{1}{2}l2+\tfrac{1}{3}l3+\tfrac{1}{5}l5-\tfrac{1}{6}l6+\cdots$$

multiplicirt.

3) Wenn drei Punkte die Massen $m_a$, $m_b$, $m_c$ haben, und wenn ihre Abstände $AB$, $BC$, $CA$ gleich $c$, $a$, $b$ sind, dann hat man

$$m_b m_c a^2 \frac{d\theta_a}{dt} + m_a m_c b^2 \frac{d\theta_b}{dt} + m_a m_b c^2 \frac{d\theta_c}{dt} = 0,$$

wenn sie sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, und wenn $a$ in der Zeit $dt$ den Winkel $d\theta_a$ beschreibt u. s. w.

Für $n$ Punkte gilt die analoge Formel. V.

---

M. D'OCAGNE. Sur les suites récurrentes. S. M. F. Bull. XX. 121-122.

Wenn eine recurrirende Folge durch ihre $p$ ersten Glieder und ausserdem durch die Gleichung

$$Y_n + A_1 Y_{n-1} + A_2 Y_{n-2} + \cdots + A_p Y_{n-p} = 0$$

definirt ist, so sagt man, „sie entspreche der Kette $p^{\text{ter}}$ Ordnung $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$".

Ist nun

$$\varphi(x) = x^p + A_1 x^{p-1} + A_2 x^{p-2} + \cdots + A_p = 0$$

die erzeugende Gleichung dieser Folge, und setzt man:

$$Q_i(x) = x^i + A_1 x^{i-1} + \cdots + A_i,$$

$$\psi(x) = Y_{p-1} + Q_1(x) Y_{p-2} + \cdots + Q_{p-1}(x) Y_0,$$

so gilt Folgendes: Wenn die Gleichungen $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$ eine gemeinsame Wurzel $\alpha$ haben, so entspricht die gegebene Folge der Kette $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $[Q_1(\alpha), Q_2(\alpha), \ldots, Q_{p-1}(\alpha)]$. Wz.

---

M. D'OCAGNE. Sur la sommation d'une certaine classe de séries. C. R. CXV. 790-792.

Der Verfasser teilt zunächst einen Doppelsatz mit, dessen Beweis bald erscheinen soll, und ausserdem Folgendes: Ist

$$\Phi(x) = x^p - a_0 x^{p-1} - a_1 x^{p-2} - \cdots - a_{p-1} = 0$$

die erzeugende Gleichung einer fundamentalen Folge, welche durch $u_0 = 0, u_1 = 0, \ldots, u_{p-2} = 0, u_{p-1} = 1$ und

$$u_n = a_0 u_{n-1} + a_1 u_{n-2} + \cdots + a_{p-1} u_{n-p}$$

definirt ist; bezeichnet $u_n^i$ das Glied der fundamentalen Folge, die durch

$$u_n^i = a_0^i u_{n-1}^i + a_1^i u_{n-2}^i + \cdots + a_{p_i-1}^i u_{n-p}^i$$

und die erzeugende Gleichung

$$\varphi_i(x) = x^{p_i} - a_0^i x^{p_i-1} - a_1^i x^{p_i-2} - \cdots - a_{p_i-1}^i$$

definirt ist; ist endlich

$$\Phi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x),$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = p,$$

so kann durch die Formel

$$u_{n+p-1} = \Sigma u^1_{n_1+p_1-1} u^2_{n_2+p_2-1} \ldots u^m_{n_m+p_m-1},$$

wo sich die Summation auf alle Combinationen der Indices $n_1, n_2, \ldots, n_m$ erstreckt, für welche

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

ist, ein beliebiges Glied der Folge $u$ durch die Glieder der Folgen $u^1, u^2, u^3, \ldots, u^m$ dargestellt werden. Wz.

D. Gambioli. Sopra lo sviluppo secondo le potenze di $x$ della frazione $1 : \sum_0^n a_r x^r$, ove è $a_0 = 1$. Batt. G. XXX. 35-39.

Setzt man $\sum_0^n a_r x^r = f(x)$, so kann man $1:f(x)$ in die Reihe

$$\sum_0^\infty (-1)^r P_r x^r$$

entwickeln, wo gesetzt ist

$$P_0 = 1,\ P_1 = a_1,\ P_2 = a_1^2 - a_2,\ P_3 = a_1^3 - 2a_1 a_2 + a_3,\ \ldots;$$

dann besteht die Gleichung

$$\sum_1^n (-1)^{n+1} P_{n\ \ r} a_r = 0.$$

Bezeichnet $s_r$ die Summe der $r^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so ist

$$(-1)^r P_r = \frac{1}{r+1} \frac{\partial s_{r+1}}{\partial a_1},$$

und man kann der Entwickelung von $1:f(x)$ auch die Form

$$\sum_0^\infty \frac{1}{r+1} \frac{\partial s_{r+1}}{\partial a_1} x^r = \sum_0^\infty \frac{1}{(r+1)^2} \frac{\partial s_{r+1}}{\partial a} \frac{\partial x^{r+1}}{\partial x}$$

geben. Wz.

---

G. Morera. Osservazione relativa al resto nello sviluppo di Taylor. Rivista di Mat. II. 36.

Wenn die Function $f(x)$ nebst ihren $m$ ersten Ableitungen im Intervall $(a, b)$ endlich und stetig ist und eine $(m+1)^{\text{te}}$ Ableitung $f^{(m+1)}(x)$ besitzt, die im Intervall $(a, b)$ nicht verschwindet, so kann man dem Reste $R_m$ der Taylor'schen Reihe

$$f(b) = f(a) - \sum_{n=1}^m \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_m$$

die Form geben:

$$R_m = \theta^m \{f^{(m)}(b) - f^{(m)}(a)\} \frac{(b-a)^m}{m!} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Wz.

---

J. de Séguier. Sur la série de Fourier. Nouv. Ann. (3) XI. 299-301.

In der Summe

$$S_k = \sum_{n=-k}^{n=+k} \frac{e^{\frac{2\pi i n z}{\omega}}}{\omega} \int_{u_0}^{u_0+\omega} f(u) e^{\frac{-2\pi i n u}{\omega}} du$$

wird $u = u_0 + \omega t$, $z = u_0 + \omega\zeta$, $f(u_0+\omega t) = \varphi(t)$ gesetzt und auf die Form

$$\int_0^1 \varphi(t) \frac{\sin(2k+1)\pi(t-\zeta)}{\sin \pi(t-\zeta)} dt$$

gebracht; dann werden die Bedingungen angegeben, unter denen $S = \lim_{k=\infty} S_k$ die Werte $\varphi(\zeta) = f(z)$ oder $\frac{1}{2}[\varphi(a-0)+\varphi(a+0)]$ oder $\frac{1}{2}[\varphi(0)+\varphi(1)] = \frac{1}{2}[f(u_0)+f(u_0+\omega)]$ annimmt. Wz.

---

M. Lerch. Bemerkungen zur Interpolationstheorie.
Rozpravy. I. Nr. 32. (Böhmisch.)

Zusammenhang der Gauss'schen Interpolationsformel mit der Theorie der symmetrischen Functionen. Angenäherte Restangabe. Die Analyse einer Hermite'schen Formel (J. für Math. LXXXIV, F. d. M. IX. 1877. 312) giebt zur Untersuchung gewisser Determinanten Anlass und liefert das Nebenresultat, dass in der Entwickelung der Function $(1+x)^k(1-x)^{2k-\sigma}$ der Coefficient von $x^\sigma$ gleich $(-1)^\sigma \binom{k}{\sigma}$ ist. Interpolation im complexen Gebiete, namentlich durch gebrochene Functionen. Lh.

---

Laur. Jelínek. Ueber den Grad der Genauigkeit von interpolirten Tabellenzahlen. Casopis XXI. 31-39. (Böhmisch.)

Bildet, so zu sagen, eine theoretische Einleitung zu der Sammlung von „Zahlentabellen und Formeln“, welche 1889 von Červený und Řehorovský veröffentlicht worden sind. Std.

---

M. Martone. Introduzione alla teoria delle serie. Parte II. Il problema universale del Wronski e la risoluzione algebrica delle equazioni. Catanzaro. Asturi.

---

# Capitel 2.

## Besondere Reihen.

Ch. Michel. Sur le binôme de Newton. Journ. de Math. spéc. (4) I. 30-32.

Die Binomialformel wird durch Specialisirung des folgenden Satzes und seiner Umkehrung gewonnen:

Damit eine homogene Function $m^{ten}$ Grades $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ die Form

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^m$$

habe, ist notwendig und hinreichend, dass die Ableitungen einer beliebigen Ordnung proportional sind. Gz.

---

J. E. A. Steggall. Note on an approximate fractional expression for the expansion of $(1+x)^n$ to any odd number of terms. Edinb. M. S. Proc. X. 21-23.

Ein Resultat, welches, wie in dem Aufsatze bemerkt wird, in einer der Gauss'schen Formeln zu der hypergeometrischen Reihe enthalten ist (Werke III. 209. [82]). Gbs. (Lp.)

---

C. A. Laisant. Transformation d'un polynôme entier. S. M. F. Bull. XX. 6-10.

Es sei $\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ und

$$[\varphi-1]^1 = \varphi(1) - \varphi(0),\ [\varphi-1]^2 = \frac{\varphi(2) - 2\varphi(1) + \varphi(0)}{2!},$$

$$[\varphi-1]^3 = \frac{\varphi(3) - 3\varphi(2) + 3\varphi(1) - \varphi(0)}{3!},\quad \text{u. s. w.}$$

Enthält $\varphi(x)$ nur gerade Potenzen von $x$, so ist die symbolische Entwickelung

$$2[\varphi-1]^1x + \frac{[\varphi-1]^2}{2!}[x(x-1) - x(x+1)]$$
$$+ \frac{[\varphi-1]^3}{3!}[x(x-1)(x-2) + x(x+1)(x+2)] + \cdots$$

identisch Null.

Enthält $\varphi(x)$ nur ungerade Potenzen von $x$, so ist die symbolische Entwickelung

$$2\varphi(0)+\frac{[\varphi-1]^2}{2!}[x(x-1)+x(x+1)]$$
$$+\frac{[\varphi-1]^3}{3!}[x(x-1)(x-2)-x(x+1)(x+2)]+\cdots$$

identisch Null. Wz.

---

F. J. Studnička. Beitrag zur Theorie der gemischten Reihen. Prag. Ber. 1892. 98-99.

Es wird die Summe

$$S_n^m = a_1+a_2q+a_3q^2+\cdots+a_nq^{n-1},$$

in welcher die Coefficienten $a$ eine arithmetische Progression $m^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, durch die successiven Differenzen von $a_1$ linear ausgedrückt. Lh.

---

M. d'Ocagne. Sur une classe particulière de séries. Nouv. Ann. (3) XI. 526-532.

Nach formeller Berichtigung zu dem Artikel III. 65 und IX. 93 wird folgender Satz bewiesen: Ist

$$U_n = a_0 U_{n-1}+a_1 U_{n-2}+\cdots+a_{n-1} U_0,$$

wo $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ eine arithmetische Reihe von constanter Differenz $r$ bilden, das allgemeine Glied einer convergenten unendlichen Reihe, so ist deren Summe gleich Null für jedes $U_0$, $a_0$, $r$. H.

---

Verniory. Sur quelques suites finies. Mathesis (2) II. 217-219.

Verniory. Sommation de quelques séries convergentes. Mathesis (2) II. 265-270.

Das allgemeine Glied der Reihe ist

$$u_n = i^\alpha(i+1)(i+2)\ldots(i+k-1),$$

oder der umgekehrte Wert, oder ähnliche Ausdrücke.

Mn. (Lp.)

BASCHWITZ. Une identité remarquable. Belg. Bull. (3) XXIV. 56.

In dieser Note giebt der Verf. eine gewisse Zerlegungsart für den Ausdruck an:

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z^2-1}+\cdots+\frac{1}{z^n-1}.$$ Dml. (Lp.)

H. W. SEGAR. On the summation of certain series. Messenger (2) XXI. 145-147.

Der Gegenstand der Abhandlung ist die Summirung der Reihen

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{c^{sr}}{u_r u_{r+1} u_{r+2}\dots u_{r+2s}} \quad \text{und} \quad \sum_{r=1}^{n}\frac{c^{sr}}{u_r u_{r+1} u_{r+2}\dots u_{r+2s-1}}$$

in dem Falle, dass $u_r$, $u_{r+1}$, $u_{r+2}$, ... eine recurrirende Reihe von Zahlen bilden nach dem Beziehungsgesetze $1-bx+cx^2=0$. Der besondere Fall, bei welchem die recurrirende Reihe eine arithmetische wird, ist wohl bekannt. Es wird gezeigt, dass die zweite der obigen Reihen immer summirt werden kann, dass jedoch die Summirung der ersten nur in einem besonderen Falle gelingt, der denjenigen einschliesst, bei welchem $u_1$, $u_2$, $u_3$, ... eine arithmetische Progression bilden. Glr. (Lp.)

G. v. ESCHERICH. Zur Zerlegung in Partialbrüche. Monatsh. f. Math. III. 348.

Ist $X^k G(x)$ der Nenner des zu zerlegenden Bruches, hat die ganze Function $X$ nur ungleiche lineare Factoren und $G(x)$ keinen derselben, so lässt sich der Bruch ohne Auflösung der Gleichung $X=0$ in Partialbrüche mit den Nennern $X^k$, $X^{k-1}$, ..., $X$, $G(x)$ zerlegen. Nachdem der Verfasser dies bewiesen hat, findet er die Zähler nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, indem er einen Partialbruch nach dem andern abtrennt, aus der Identität, welche für jede Abtrennung erfüllt sein muss. H.

ED. WEYR. Summirung gewisser unendlicher Reihen. Časopis XXI. 161-180. (Böhmisch.)

Von einem Satze Appell's (C. R. LXXXVI. 953) ausgehend

und mit Benutzung der Gauss'schen Formel

$$\Psi(z) = \lim_{k=\infty}\left[\lg\operatorname{nat} k - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{z+n}\right]$$

entwickelt der Autor eine Reihe von Summirungsformeln mit Hülfe von logarithmisch-goniometrischen Ausdrücken, wie z. B.

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(4\nu+1)} = 4-\frac{\pi}{2}-3\lg\operatorname{nat}2,$$

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1+\nu}{2\nu-\nu^2-\nu^3} = \tfrac{7}{12}-\tfrac{4}{3}\lg\operatorname{nat}2,$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1+2\nu}{q+21\nu+16\nu^2+4\nu^3} = \frac{\pi}{2}-2(1+\lg\operatorname{nat}2).$$

Std.

---

E. Catalan. Quelques séries trigonométriques. Belg. Bull. (3) XXIII. 143-147.

Der Titel ist irreführend: man hat zu lesen „logarithmiques.“ Der Verf. beweist und verallgemeinert die folgende Formel des Hrn. Baschwitz:

$$\log\sqrt{7} = \left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}\right)-\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^5}\right) + \left(\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^6}-\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{3^8}\right)-\cdots$$

und einige ähnliche Beziehungen. Mn. (Lp.)

---

Niels Nielsen. Et Par Egenskaber ved Talräkkens Tal. Nyt Tidss. IIIB. 91-92.

Es wird rein elementar bewiesen, dass

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{np} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-1}\mu\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\frac{1}{\nu\mu(\nu p-\mu)},$$

wo alle vorkommenden Grössen ganze Zahlen sind, und dass

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{np}\right] = \log p.$$

Ferner wird bewiesen, dass

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right] = \frac{s_2}{2}-\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}+\cdots = -\Gamma'(1),$$

wo

$$s_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots. \qquad \text{V.}$$

---

E. GRABOWSKI. Ueber die Convergenz der drei von Euler für die Zahl $\pi$ gegebenen Entwickelungen. Prace mat.-fiz. III. 130-134. (Polnisch.)

Es handelt sich um die von Euler in den „Institutiones calculi differentialis" (II. §§ 91, 92) aus der Entwickelung

$$\operatorname{arctg}(x+h) = \operatorname{arctg} x + \frac{h}{1}\sin\varphi\sin\varphi - \frac{h^2}{2}\sin^2\varphi\sin 2\varphi - \cdots,$$

wo $\operatorname{tg}\varphi = 1/x$, für

$$h = -x, \quad h = -\sqrt{1+x^2}, \quad h = -x - \frac{1}{x}$$

abgeleiteten Reihen. Es werden die Bedingungen ihrer Convergenz untersucht. Dn.

---

M. N. RAY, J. BEYENS, BORDAGE. Solution of question 8722. Ed. Times LVI. 112.

Es wird bewiesen, dass $\operatorname{tg} x = e^{i \operatorname{arctg}(i \cos 2x)}$ ist. Lp.

---

N. J. SONIN. Ueber einige convergente Reihen. Berichte der phys.-chem. Abt. der Naturf. Ges. zu Warschau. III. (1891-1892.) (Russisch.)

Untersuchung der semiconvergenten Zerlegungen der Integrale

$$\int_x^\infty e^{-z}.z^{-a}dz \quad (a>0,\ x>0) \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{f(z)\,dz}{z^k+x^k} \quad (k>0).$$

Bei der Bestimmung der Grenzen des Restgliedes benutzt der Verfasser seine Restformel für die Taylor'sche Reihe (s. F. d. M. XXIII. 1891. 253) und die Ungleichheit von Tschebyscheff für die Integrale von Producten von Functionen. Wi.

M. LERCH. Ueber die Eigenschaften der unendlichen Reihe $\varphi(x, a)$. Casopis XXI. 65-68. (Böhmisch.)

Behandelt die unendliche Reihe

$$\varphi(x, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-a},$$

wo $x$ eine complexe Variable, $|x| < 1$, $a$ hingegen eine beliebige von 1, 2, 3, ... verschiedene Zahl bedeutet, und gelangt zur allgemeinen Definition

$$\varphi(x, a) = \frac{2\pi i x^a}{1-e^{2a\pi i}} + \frac{x}{1-e^{2a\pi i}} \int_{C_1} \frac{t^{a-1}-x^{a-1}}{t-x}\, dt,$$

wobei $C_1$ eine geschlossene, die Punkte 0, $x$ einschliessende, in der Ebene von $t$ liegende Curve bedeutet. Std.

---

M. d'Ocagne. Extrait d'une lettre adressée à M. F. Gomes Teixeira. Teixeira J. X. 185-186.

Hr. d'Ocagne bringt in diesem Briefe eine recurrirende Formel bei zur Berechnung seiner Zahlen $K_m^p$, die er im American J. IX. 353-380 und in Teixeira J. VIII. 171-174 behandelt hat (F. d. M. XIX. 1887. 155 u. 241). Tx. (Lp.)

---

F. Rogel. Ueber die Reihe der reciproken Binomial-Coefficienten. Hoppe Arch. (2) XI. 412-432.

Für die Reihe

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{\binom{m+n}{n}}$$

wird folgende Summe abgeleitet:

$$n\left[\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{s_{n-1}-s_r}{x^{r+1}} + \frac{(-1)^n}{x^n}(1-x)^{n-1}\log(1-x)\right].$$

Aus $f(x)$ erhält man andere summirbare Reihen. Wenn man z. B. $x = ke^v$ setzt, $p$-mal nach $v$ differentiirt und $v=0$ setzt, erhält man folgende Formel, welche für positive ganze $m$, $n$, $p$ und solche Werte von $k$, die der Bedingung $-1 \leq k < 1$ genügen, gültig ist:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m m_p}{\binom{m+n}{m}}$$

$$= n\left[\frac{(-1)^n}{k^n} \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} A_r L_{p-r} + (-1)^p \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-1}{r} (s_{n-1} - s_r \frac{(r+1)^p}{k^{r+1}}\right],$$

dabei ist:

$$L_0 = \log(1-k); \quad L_h = -\sum_{r=1}^{h} \frac{1}{r}\left(\frac{k}{1-k}\right)^r E_h^r,$$

$$E_h^r = r^k - \binom{r}{1}(r-1)^h + \binom{r}{2}(r-2)^h - \cdots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1} 1^h,$$

$$A_0 = (1-k)^{n-1}; \quad A_q = (-1)^q \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^s \binom{n-1}{s} k^s (n-s)^q.$$

Die Substitution

$$x = \varrho e^{i\varphi}$$

führt gleichfalls zu einer Reihe von Formeln, z. B. zu

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m \cos^m \varphi \cos m\varphi}{\binom{m+r}{m}}$$

$$= -\frac{\varphi \sin(n+1)\varphi}{2^n \cos^{n+1}\varphi} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\cos r\varphi}{(n-r+1) 2^r \cos^r \varphi},$$

$$\sum_{r=1}^{n+1} (-1)^{r-1} \frac{1}{r} \binom{n}{r-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m \cos^m \varphi \sin m\varphi}{\binom{m+r}{m}}$$

$$= -\frac{\varphi \cos(n+1)\varphi}{2^n \cos^{n+1}\varphi} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\sin r\varphi}{(n-r+1) 2^r \cos^r \varphi}.$$

Herr Schlömilch hat schon in dem Aufsatze: Ueber eine besondere Gattung von Reihen (Zeitschr. für Math. und Phys. I. Jahrgang) untersucht, unter welchen Bedingungen eine Function in Reihen dieser Art entwickelt werden kann. Die Frage, ob dies nur auf eine einzige oder auf mehrere Arten geschehen kann, wird vom Verfasser in folgender Weise entschieden. Für die Functionen

$$\cos^n \varphi \,.\, \cos n\varphi, \quad \cos^n \varphi \,.\, \sin n\varphi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

lassen sich unendlich viele Systeme linearer Verknüpfungen angeben; es ist nämlich für $\varphi > m\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}\cos^r\varphi\sin r\varphi=0,\quad n=0,2,4,6,\ldots,$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r-1}{r-n}\cos^r\varphi\cos r\varphi=0,\quad n=1,3,5,7,\ldots,$$

$$\sum_{r=n}^{\infty}\frac{2^{r-n}}{r!}\cos^r\varphi\sin r\varphi=0,\quad n=0,2,4,\ldots,$$

$$\sum_{r=n}^{\infty}\frac{2^{r-n}}{r!}C_{r-n}^{r}\cos r\varphi=0,\quad n=1,3,5,\ldots.$$

Daraus folgt: Wenn eine Function in eine nach $\cos^r\varphi.\cos r\varphi$ oder $\cos^r\varphi\sin r\varphi$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, so giebt es unendlich viele derartige, von einander verschiedene, aber gleichwertige Entwickelungen.

Zum Schlusse werden die zwischen den Functionen

$$P_n=\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi},\qquad Q_n=\frac{\cos n\varphi}{\cos^n\varphi}$$

bestehenden Relationen

$$P_n-\binom{n}{1}P_{n-1}+\binom{n}{2}P_{n-2}-\cdots-\binom{n}{n-1}P_1=0\qquad (n \text{ gerade}),$$

$$Q_n-\binom{n}{1}Q_{n-1}+\binom{n}{2}Q_{n-2}-\cdots-1=0\qquad (n \text{ ungerade})$$

angegeben. Werden diese für $n$, $n-1$, $n-2$, ... gebildet, so führen sie zu zwei Systemen von $\frac{1}{2}n$ resp. $\frac{1}{2}(n+1)$ Gleichungen. Hieraus folgt, dass $\frac{1}{2}n$ resp. $\frac{1}{2}(n+1)$ Coefficienten der $P$ resp. $Q$ in den oben genannten Ausdrücken jeder mögliche Wert beigelegt werden kann. Wz.

F. Rogel. Asymptotischer Wert der Facultätencoefficienten. Hoppe Arch. (2) XI. 210-212.

Bedeutet $C_k^n$ den aus der Zahlenreihe 1, 2, 3, ..., $n-1$ gebildeten Facultätencoefficienten, so ist für $n=\infty$:

$$\lim\frac{1}{n^{2k}}C_k^n=\frac{1}{k!\,2^k},$$

$$\lim\frac{(C_k^n)^2}{C_{2k}^n}=\binom{2k}{k}.$$

Wz.

**L. Saalschütz.** Vorlesungen über die Bernoulli'schen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Secanten-Coefficienten und ihre wichtigeren Anwendungen. Berlin. J. Springer. VIII + 208 S. 8°.

Das Buch zerfällt in vier Abschnitte. In jedem ist soviel als möglich die historische Folge beobachtet. Es ist zunächst für die studirende Jugend bestimmt, wird gewiss aber auch jedem, der sich mit den Bernoulli'schen Zahlen eingehender beschäftigt, willkommen sein. Einige Wünsche hat schon Herr Hoppe in seiner Besprechung des Werkes (Hoppe's Arch. Lit. Ber. Jahrgang 1894. S. 24-26) geäussert.

Im ersten Abschnitt werden die unverkürzten und verkürzten Recursionsformeln abgeleitet und der Zusammenhang der Bernoulli'schen Zahlen mit den Entwickelungscoefficienten der Functionen

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1},\quad \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2},\quad \frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2},\quad \operatorname{tang}x,\quad \operatorname{cosec}x,\quad \log\left(\frac{\sin x}{x}\right),$$
$$\log(\cos x),\quad \sec x$$

und der Summe der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen ermittelt.

Der zweite Abschnitt beginnt mit den Gleichungen von Eytelwein und Laplace, enthält die Formeln, welche durch den Mac-Laurin'schen Satz gewonnen sind, diejenigen, welche mit Differenzenreihen in Verbindung stehen, die Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen durch bestimmte Integrale, ihren Zusammenhang mit den Bernoulli'schen Functionen und den Wurzeln der Einheit.

Den Inhalt des dritten Abschnittes bilden zahlentheoretische Untersuchungen; es handelt sich hier um den von Staudt-Clausen'schen Satz, um Recursionsformeln zwischen den ganzzahligen Bestandteilen der Bernoulli'schen Zahlen, um Congruenzen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen und den Secantencoefficienten und um Congruenzen zwischen den Lipschitz'schen Producten und den Tangentencoefficienten.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit dem Restglied der Mac-Laurin'schen Reihe.

Den Schluss bilden litterarische Nachweise und die Zahlenwerte der ersten 32 Bernoulli'schen Zahlen. Wz.

L. SAALSCHÜTZ. Verkürzte Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen. Schlömilch Z. XXXVII. 374-378.

Seidel und Stern haben Recursionsformeln aufgestellt, vermittelst deren zur Berechnung von $B_m$ nur die vorangehenden $B_{m-1}$, $B_{m-2}$ bis $B_{\frac{1}{2}(m+1)}$ bez. $B_{\frac{1}{2}m}$ gebraucht werden. Der Verfasser leitet folgende Formeln ähnlichen Charakters ab:

$$\frac{1}{(2p)_p(2p+1)} = B_p - \frac{2(p)_3}{2p-2}B_{p-1} + \frac{2(p)_5}{2p-4}B_{p-2} \mp \cdots$$
$$+\begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}}\dfrac{2}{p+1}B_{\frac{1}{2}(p+1)}, & \text{wenn } p \text{ ungerade,} \\ (-1)^{\frac{p+2}{2}}\dfrac{2(p)_{p-1}}{p+2}B_{\frac{1}{2}(p+2)}, & \text{wenn } p \text{ gerade,} \end{cases}$$

und:

$$1 = 2(2^{2p}-1)B_p - \frac{(p)_3}{p-1}2^3(2^{2p-2}-1)B_{p-1} + \frac{(p)_5}{p-2}2^5(2^{2p-4}-1)B_{p-2}$$
$$\mp\cdots+\begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}}\dfrac{1}{\frac{1}{2}(p+1)}2^p(2^{p+1}-1)B_{\frac{1}{2}(p+1)} & (p \text{ ungerade}), \\ (-1)^{\frac{p-2}{2}}\dfrac{(p)_{p-1}}{\frac{1}{2}p+1}2^{p-1}(2^{p+2}-1)B_{\frac{1}{2}(p+2)} & (p \text{ gerade}). \end{cases}$$

Wz.

---

G. PLATNER. Sul polinomio bernoulliano. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1179-1188.

Der Verfasser leitet die Formel

$$S_{2n} = \frac{1}{\alpha}\begin{vmatrix} u_{2n+1} & \binom{2n+1}{3} & \binom{2n+1}{5} & \cdots & \binom{2n+1}{2n-1} & \binom{2n+1}{2n+1} \\ u_{2n-1} & \binom{2n-1}{1} & \binom{2n-1}{3} & \cdots & \binom{2n-1}{2n-3} & \binom{2n-1}{2n-1} \\ u_{2n-3} & 0 & 1 & \cdots & \binom{2n-3}{2n-5} & \binom{2n-3}{2n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_3 & 0 & 0 & \cdots & \binom{3}{1} & \binom{3}{3} \\ u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ab, worin $S_{2n}$ die Summe der $(2n)^{\text{ten}}$ Potenzen der $x$ ersten natürlichen Zahlen bedeutet und

$$a = \begin{vmatrix} \binom{2n+1}{1} & \binom{2n+1}{3} & \cdots & \binom{2n+1}{2n-1} & \binom{2n+1}{2n+1} \\ 0 & \binom{2n-1}{1} & \cdots & \binom{2n-1}{2n-3} & \binom{2n-1}{2n-1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{3}{1} & \binom{3}{3} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$u_{2n+1-2p} = x^{2n+1-2p} + \sum_{s=1}^{n-p} \tfrac{1}{2} \binom{2n+1-2p}{2s} x^{2n+1-2p-2s}$$

ist. Für $S_{2n+1}$, $S_{2n+2}$ ergeben sich ähnliche Ausdrücke und hieraus die Entwickelungen:

$$S_{2n} = a' x^{2n+1} + a'' x^{2n} + \sum_{s=1}^{n} a_s x^{2n+1-2s},$$

$$S_{2n+1} = b' x^{2n+2} + b'' x^{2n+1} + \sum_{s=1}^{n} b_s x^{2n+2-2s},$$

$$S_{2n+2} = c' x^{2n+3} + c'' x^{2n+2} + \sum_{s=1}^{n+1} c_s x^{2n+3-2s}.$$

Es werden die Coefficienten $a'$, $a''$, $a_s$, $b'$, $b''$, $b_s$, $c'$, $c''$, $c_s$ und ihre Beziehungen zu einander und zu den Bernoulli'schen Zahlen ermittelt und $B_{2n}$ durch eine Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung dargestellt.

Wz.

---

F. Rogel. Trigonometrische Entwickelungen. Prag. Ber. 1892. 273-310.

Enthält mehrere lineare Beziehungen zwischen den Ausdrücken von der Form

$$P_n = \frac{\sin n\varphi}{\cos^n \varphi}, \quad Q_n = \frac{\cos n\varphi}{\cos^n \varphi}, \quad R_n = \frac{\sin n\varphi}{\sin^n \varphi}, \quad S_n = \frac{\cos n\varphi}{\sin^n \varphi},$$

welche durch Specialisiren auf Eigenschaften der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen führen. Ausserdem werden hier neben einigen Bemerkungen inbetreff der Entwickelung nach diesen

Grössen Formeln mitgeteilt, welche die Kugelfunctionen, die Bernoulli'schen und verwandten Ausdrücke durch diese Grössen darstellen. Die allgemeinen Formeln werden für die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen verwertet. Lh.

---

F. Rogel. Arithmetische Relationen. Prag. Ber. 1892. 3-33.

Der Verfasser leitet zunächst die Identität

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \sum_c \frac{x^{c_m}}{1-x^{c_m}} = x$$

in empirischer Weise ab, indem er einige Anfangsglieder der Potenzentwickelung der linken Seite gleich Null findet; es bezieht sich hier die innere Summation auf sämtliche Producte $c_m$ von je $m$ Primzahlen. Indem in dieser Gleichung $x$ durch $x^r$ ersetzt wird, erhält man ein Mittel, um sämtliche Potenzreihen in die nach $\frac{x^n}{1-x^n}$ fortschreitenden Entwickelungen formal zu verwandeln. Auf die nähere Begründung der Convergenz und Gültigkeit dieser Entwickelung geht jedoch der Verf. nicht ein.

Die Hauptformel

$$f(x) = \sum A_r x^r = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{m=\mu}(-1)^m f\left(\frac{n}{c_m}\right)\cdot\frac{x^n}{1-x^n},$$

welche wir, um dieses Referat abzukürzen, durch Anwendung des Kronecker'schen Symbols $\varepsilon_n$ in der Form

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r x^r = \sum_{\delta\delta'=n} A_\delta \varepsilon_{\delta'} \frac{x^n}{1-x^n}$$

schreiben wollen, soll nun zur Ableitung von Eigenschaften der arithmetischen Function

$$\Phi(n) = \sum_{\delta\delta'=n} A_\delta \varepsilon_{\delta'}$$

dienen, indem man in derselben $x$ durch eine passend gewählte Function $g(y)$ ersetzt und beiderseits nach Potenzen von $y$ entwickelt.

Die Ausführungen beziehen sich auf die Annahmen

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},\quad l(1\pm x),\quad e^x,\quad (1+x)^p,$$

sowie

$$g(x)=\frac{y}{1\pm y},\quad e^{y-1},\quad l(1+y)$$

und sind zum Teil bekannt.

In dem folgenden zweiten und dritten Artikel werden die nach $\frac{x^n}{1-x^{2n}}$ und $l(1-x^n)$ fortschreitenden Entwickelungen in analoger Weise verwertet. Aus der Entwickelung von $lf(x)$ erhält man im Art. IV die Productdarstellung

$$f(x)=c\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{\Phi(n)},$$

und es werden die Fälle

$$f(x)=e^{-\frac{x}{1-x}},\quad \frac{1}{1-x},\quad \frac{\sqrt{x}}{\sin\pi\sqrt{x}},\quad \cos\frac{\pi\sqrt{x}}{2},\quad \sqrt{1-2\varrho\cos\varphi+\varrho^2}$$

behandelt.

Es ergiebt sich dann eine Darstellung der Lambert'schen Reihe

$$L(x)=\Sigma\frac{x^\nu}{1-x^\nu}=l\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-\Sigma\frac{\varphi(t)}{t}},$$

(wobei in $\Sigma\frac{\varphi(t)}{t}$ der Summationsindex $t$ sämtliche Teiler von $n$ durchläuft).

Wird $\Sigma\frac{\varphi(t)}{t}=\psi(n)$ gesetzt und mit $\lambda_n$ die Teilerzahl von $n$ bezeichnet, so ergiebt sich hieraus die Formel $\Sigma t\psi(t)=n\lambda_n$, welche jedoch der Verfasser in der Form $\sum_1^n t\psi(t)$ hinschreibt, was ja ein Missverständnis nicht ausschliesst.

In ganz analoger Weise werden dann die elliptischen Ausdrücke

$$l\sqrt{\frac{1-\sin\operatorname{am}u}{1+\sin\operatorname{am}u}},\quad \frac{K}{2\pi}-\frac{1}{4},\quad \frac{1}{8}l\,\frac{1-\Delta\operatorname{am}u}{1+\Delta\operatorname{am}u}$$

behandelt, und zum Schluss einige Determinanten betrachtet, auf welche die hier die Hauptrolle spielende Coefficientenbestimmung führt (vgl. das Referat S. 185 dieses Bandes). Lh.

F. Rogel. Solution of question 10961. Ed. Times LVI. 74-76.

Die von dem Verf. gestellte und dann auch gelöste Aufgabe verlangt einen Beweis dafür, dass jede Potenz $a^n$ als derjenige Wert angesehen werden kann, den der $n^{\text{te}}$ Differentialquotient der Function $e^{ax}$ beim Verschwinden des Exponenten $x$ annimmt. Zur Erläuterung hierfür werden Beispiele beigebracht. Lp.

J. W. L. Glaisher. On a series involving inverse squares of prime numbers. Quart. J. XXVI. 33-47.

J. W. L. Glaisher. On the series $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+$ etc. Quart. J. XXVI. 48-65.

Auf Grund der Formel

$$Y_n = -\log u_n + \tfrac{1}{3}\log u_{3n} + \tfrac{1}{5}\log u_{5n} + \tfrac{1}{7}\log u_{7n} + \cdots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\log U_{2n} - \tfrac{1}{6}\log U_{6n} - \tfrac{1}{10}\log U_{10n} - \tfrac{1}{14}\log U_{14n} - \cdots,$$

worin

$$Y_n = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \cdots,$$

$$u_n = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \cdots,$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \cdots,$$

wird $Y_2 = 0{,}0946\,1989\,2867$ berechnet.

Es werden weitere Eigenschaften von $Y_n$ entwickelt und die Zahlen $p^6-(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}$ in ihre Primfactoren zerlegt ($p = 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots, 97$).

Setzt man:

$$\Gamma_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} + \cdots,$$

$$g_n = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

$$G_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \cdots,$$

so besteht die Formel:

$$\Gamma_n = \begin{cases} -\log g_n + \tfrac{1}{3}\log g_{3n} + \tfrac{1}{5}\log g_{5n} + \tfrac{1}{7}\log g_{7n} + \cdots \\ + \tfrac{1}{2}\log G_{2n} - \tfrac{1}{6}\log G_{6n} - \tfrac{1}{10}\log G_{10n} - \tfrac{1}{14}\log G_{14n} - \cdots. \end{cases}$$

In derselben Weise wird $\Gamma'_n$ durch $g'_n, g'_{3n}, \ldots, G'_{2n}, G'_{6n}, \ldots$ ausgedrückt, wobei

$$\Gamma'_n = \Gamma_n - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \cdots,$$

$$g_n = \frac{2^n}{2^n+1} g'_n, \quad G_n = \frac{2^n}{2^n-1} G'_n,$$

$$g'_n = 1 - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \cdots,$$

$$G'_n = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \cdots$$

ist. Auf Grund dieser Formeln wird dann $\Gamma'_n$ für alle ungeraden Zahlen von 1 bis 17, $\Gamma_n$ für alle ungeraden Zahlen von 1 bis 39 auf 12 Decimalstellen berechnet. Wz.

---

A. Lafay. Note sur la série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$. Toulouse Ann. VI. *I.* 1-6.

Die Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$, worin $s = a+bi$, ist 1) absolut convergent, wenn $a > 1$; 2) endlich, aber unbestimmt, wie der Ausdruck $\lim_{x=\infty} \frac{1}{b}(\sin bLx + i\cos bLx)$, wenn $a = 1$, $b \gtrless 0$; 3) divergent, wenn $a = 1$, $b = 0$ oder $a < 1$, $b$ beliebig.

Es wird sodann gezeigt, dass der Geltungsbereich der Reihe von $a > 1$ auf $a > 0$ erweitert werden kann, und sodann werden einige Eigenschaften der Riemann'schen Function

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} B_1 s - \frac{B_2}{1.2.3.4} s(s+1)(s+2) + \cdots$$
$$+ (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2.3\ldots(2p-2)} s(s+1)\ldots(s+2p-4)$$
$$- s(s+1)\ldots(s+2p-1) \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{\varphi_{2p-1}(u)}{(n+1-u)^{s+2p}} du$$

abgeleitet. Wz.

---

M. Lerch. Grundzüge der Theorie der Malmstén'schen Reihen. Rozpravy I. No. 27. (Böhmisch.)

Bericht in Abschnitt VII, Capitel 2, B.

---

# Sechster Abschnitt.

## Differential- und Integralrechnung.

### Capitel 1.

### Allgemeines (Lehrbücher etc.).

F. G. TEIXEIRA. Curso de analyse infinitesimal. Calculo integral. (Secunda parte). Porto. Typographia occidental. 318 S. gr. 8°. [Darboux Bull. (2) XVI. 302-305.]

Die Anzeige des ersten Teiles der Integralrechnung geschah in F. d. M. XXI. 1889. 255; auch der vorliegende Teil verdient dasselbe Lob wie die beiden vorangegangenen Bände: ein dem Verfasser eigentümliches Verarbeiten des dargestellten Stoffes, bezeugt durch parallel laufende Abhandlungen in Zeitschriften, über welche schon früher im Jahrbuche berichtet ist, erweckt beim Leser das angenehme Gefühl des Einblickes in eine originelle Gedankenwerkstatt. Der Inhalt des zum Berichte stehenden Bandes gehört zum grösseren Teile schon dem Gebiete der Functionentheorie an. Von den sechs Capiteln, in welche der Inhalt gesondert ist, handelt das erste von der Integration der Functionen imaginärer Variabeln. Die Theoreme von Cauchy und Laurent stehen hier im Mittelpunkte; von ihnen aus wird die Reihenentwickelung der Functionen nach Potenzen und den trigonometrischen Functionen der unabhängigen Variabeln bewältigt, die Interpolation nach Hermite und dem Verfasser (F. d. M. XVIII. 1886. 210, XXII. 1890. 408) vorgetragen. Anwendungen auf die Auswertung bestimmter Integrale zwischen reellen Grenzen und auf die Auflösung

der Gleichungen machen den Beschluss des ersten Capitels. Das zweite ist der Theorie der Euler'schen Integrale, also der Gammafunctionen gewidmet, über die der Verf. in den letzten Jahren wiederholt geschrieben hat (vergl. z. B. F. d. M. XXIII. 1891. 445, 450). Das dritte Capitel giebt einen Abriss der Theorie der elliptischen Functionen nach Weierstrass, indem die Function $\wp(u)$ durch die Umkehrung des elliptischen Integrales

$$u = \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

gewonnen, nicht, wie bei Halphen, durch eine geometrische Ueberlegung erhalten wird. Sowohl die Sigmafunction als auch die Jacobi'schen Thetafunctionen werden eingeführt; die analytische Darstellung der doppeltperiodischen Functionen wird gelehrt, und zuletzt finden die Functionen sn$u$, cn$u$, dn$u$ eine verhältnismässig ausführliche Darstellung. Einige Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen machen den Gegenstand des vierten Capitels aus: die Integration irrationaler Functionen, die Rectification der Ellipse, das Problem der einem Kegelschnitte eingeschriebenen, einem anderen umgeschriebenen Polygone, die Behandlung der Curven dritter Ordnung. Die allgemeinen Principien der „mehrdeutigen Functionen“ kommen zunächst im fünften Capitel zum Vortrag. Die algebraischen Functionen, einige transcendente Functionen, die Lagrange'sche Reihe nebst einer vom Verf. herrührenden Verallgemeinerung (F. d. M. XXI. 1889. 239) und die durch Integrale definirten Functionen sind die Gegenstände, welche nach jenen allgemeinen Principien behandelt werden, in Anlehnung an Puiseux sowie an Briot und Bouquet. Das letzte Capitel endlich enthält eine Skizze der Variationsrechnung in drei Abschnitten: Darlegung der Methode, geometrische Anwendungen, Doppelintegrale und Minimalflächen. Lp.

M. Stegemann. Grundriss der Differential- und Integralrechnung. I. Teil: Differential-Rechnung. Sechste vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage mit 154 Figuren im Texte, herausgegeben von L. Kiepert. Hannover. Helwing'sche Verlagsbuchhdl. XII + 618 S. 8°.

Angesichts des starken Absatzes dieses beliebten Lehrbuches hat Hr. Kiepert, der sich durch die den Ansprüchen an Schärfe und Genauigkeit genügende Umgestaltung der ursprünglichen Darstellung ein grosses Verdienst erworben hat, jetzt grössere Aenderungen als in den beiden früheren, von ihm besorgten Auflagen durchgeführt und hat dabei sowohl die Erfahrungen seiner eigenen Lehrthätigkeit benutzt, als auch die Wünsche anderer in ähnlicher Wirksamkeit befindlichen Lehrer berücksichtigt. Ausser vielen Verbesserungen einzelner Stellen ist zu erwähnen, dass namentlich die geometrischen Anwendungen vermehrt worden sind, dass die alten Figurenstöcke, deren Gebrauch dem Texte oft Fesseln schlug, ganz unbenutzt geblieben und durch neue in mehr als doppelter Zahl ersetzt sind, dass endlich ein kurzer Abriss der Determinantentheorie hinzugetreten ist, wodurch den Studirenden an technischen Hochschulen sicherlich ein lange gehegter Wunsch befriedigt ist. Durch alle diese Aenderungen ist der Umfang des Buches allerdings beinahe um 10 Bogen vergrössert. Lp.

G. J. Deter. Repetitorium der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl. Berlin. M. Rockenstein. 118 S. 8°.

Eine Zusammenstellung der notwendigsten Formeln und Sätze, mit Uebungsbeispielen zur Veranschaulichung und mit vielen Anwendungen auf die Geometrie. Der Ausdruck ist nicht immer von Mängeln frei, und die Rechnungen lassen sich vielfach kürzer und eleganter durchführen. Für Anfänger ist vielleicht der geringe Umfang des Büchleins eine Empfehlung, weil der Stoff leicht übersehen werden kann. Lp.

G. Peano. Sulla definizione del limite d'una funzione. Rivista di Mat. II. 77-79.

Ist eine reelle, zu- oder abnehmende Folge $u$ gegeben, deren Grenzwert $a$ ist, so bezeichnet Hr. Peano als die „Grenzklasse einer Function $f(x)$ für $u$ und $a$" ($\lim_{x,u,a} f(x)$) den Inbegriff sämtlicher Werte, denen $f(x)$ sich unbeschränkt nähert, wenn $x$ die Werte $u$

annimmt. So wird z. B. $\lim_{x,q,\infty} \sin x$, wo $q$ die Klasse der reellen Zahlen bezeichnet, durch das ganze Intervall von $-1$ bis $+1$ gebildet. Diese Erweiterung des Grenzbegriffes führt zu einer Vereinfachung einiger bekannten Sätze. Vi.

R. Bettazzi. Il concetto di lunghezza e la retta. Annali di Mat. (2) XX. 19-39.

Der Verfasser bezeichnet als Zweck dieser Arbeit die Aufstellung des Begriffes von „Länge“ unabhängig von demjenigen der Geraden. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet das unveränderlich verbundene Punktepaar, durch welches sich die Kugelfläche leicht definiren lässt (Post. I). Ist nun eine begrenzte Linie $l$ gegeben, so kann man aus dieser durch gewisse Operationen, auf welche wir nicht näher eingehen können, ein unendliches, von einem gemeinsamen Punkte $O$ ausgehendes Liniensystem (das „von $l$ derivirte geschlossene Liniensystem“ $\sigma$) ableiten (Post. II). Die Kugeln, deren Mittelpunkt $O$ ist, und deren Oberflächen durch die Endpunkte der einzelnen Linien von $\sigma$ gehen, haben eine obere Grenze $K$ („Grenzkugel“), und es entspricht umgekehrt jeder Kugel $K$ als obere Grenze ein einziges Liniensystem $\sigma$ (Post. VI). Demnach kann man sagen, dass zwei Linien gleiche oder ungleiche „Länge“ haben, je nachdem sie einem und demselben Liniensysteme angehören oder nicht, und dass im letzteren Falle diejenige Linie eine grössere Länge besitzt, deren derivirtes Liniensystem eine grössere Grenzkugel hat. Unter allen irgend zwei Punkte verbindenden Linien giebt es eine einzige, welche die kleinste Länge hat (Post. VII); man nennt diese eine „Strecke“. Man kann die Strecke als Mass der Länge annehmen, da es eine einzige Strecke giebt, welche mit einer vorgegebenen Linie gleiche Länge hat; und es ist leicht zu beweisen, dass die obere Grenze der (im gewöhnlichen Sinne genommenen) Längen aller einer Linie $l$ eingeschriebenen Polygonallinien die Länge der dem von $l$ derivirten Liniensysteme angehörigen Strecke (d. i. die Länge des Radius der Grenzkugel dieses Systemes) ist. Vi.

R. Bettazzi. Sull'infinitesimo attuale. Rivista di Mat. II. 38-41.

Fortsetzung der im vorigen Jahrgang der F. d. M. (S. 61) besprochenen Discussion zwischen den Herren Bettazzi und Vivanti über das actuale Unendlichkleine. Der Verf. constatirt beiderseitige Uebereinstimmung in den Hauptpunkten, versagt sich näheres Eingehen auf einen von Hrn. Vivanti gegen seine Beweisführung erhobenen Einwand, um nicht auf philosophisches Gebiet zu geraten, und sucht hinsichtlich einiger Einzelheiten, z. B. der Existenz der Cantor'schen transfiniten Zahl, durch weitere Ausführung seiner Ansichten ein Einverständnis zu erzielen. Schg.

G. Veronese. Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale. Palermo Rend. VI. 73-76.

Entgegnung des Verf. auf einen Artikel Peano's im Märzheft der Rivista di Matematica (S. 68 dieses Bandes). Wbg.

---

Weitere Litteratur.

C. Jordan. Cours d'analyse de l'École Polytechnique. Tome I. Calcul différentiel. 2e éd., entièrement refondue. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XVIII + 612 S. 8°. (1893). [Darboux Bull. (2) XVII. 249-250.]

Ph. Gilbert. Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire. 4e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Demartres. Cours d'analyse de la faculté des sciences de Lille, rédigé par E. Lemaire. Partie I: Fonctions de variables réelles. Partie II: Propriétés des fonctions analytiques. Lille. lithogr. Paris. Hermann. [Darboux Bull. (2) XVII. 233-237.]

J. Edwards. Elementary treatise on the differential calculus, with applications and numerous examples. Second edition, revised and enlarged. London and New York. Macmillan & Co. XIII + 521 S. 8°. [New York M. S. Bull. I. 217-223, scharf urteilende Anzeige von Charlotte Angas Scott.]

A. Haas. Lehrbuch der Differentialrechnung. 2. Teil: Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Functionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen, Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VIII + 322 S. 8°.

R. Dedekind. Stetigkeit und irrationale Zahlen. 2. Aufl. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn. VII + 24 S. 8°.

P. Mansion. Limite de la racine $m^{\text{ième}}$ d'une variable. Mathesis (2) II. 39-42.

G. Galán. Estudio del triángulo infinitesimal. Progreso mat. II. 41-49.

## Capitel 2.

## Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

G. Peano. Sur la définition de la dérivée. Mathesis (2) II. 12 - 14.

In dieser Note vergleicht der Verf. die beiden folgenden Definitionen der Ableitung: A. Die Ableitung von $f(x)$ ist die Grenze von $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, wenn $h$ bei endlichem $x$ der Null zustrebt. B. Die Ableitung von $f(x)$ ist die Grenze des Verhältnisses $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, wenn $x_1$ und $x_2$ einem und demselben Werte $x$ zustreben. Geht man von der Definition A aus, so begreift man die Fälle ein, in denen die Ableitung unstetig ist; bei Annahme der Definition B schliesst man sie aus. Hr. Peano ist der Meinung, dass es bei dem elementaren Unterricht vielleicht vorzuziehen sei, jene Unstetigkeitsfälle auszuschliessen, indem man die Definition B annehme. Wenn die Ableitung einer Function nicht vorhanden ist, so sind gemäss der Definition B immer zwei Functionen vorhanden, die

ihre Rolle übernehmen, und von denen der Verf. einige Eigenschaften angiebt. Dml. (Lp.)

F. Rogel. Die Nullwerte höherer Ableitungen gewisser zusammengesetzter Functionen. Hoppe Arch. (2) XI. 14-76.

Die Arbeit geht nicht auf Lösung einer allgemeinen Aufgabe aus, sondern verwendet die Coefficienten der MacLaurin'schen Entwickelung specieller Functionen zu reicher Ausbeute an anderen Relationen. Zuerst werden die independenten Ausdrücke jener Coefficienten mit Hülfe vorher aufgestellter allgemeiner Formeln in weitest möglichem Umfange erschöpfend hergeleitet. Da die behandelten Functionen in der Form $F(f(x))$ eingeführt werden, so stützt sich die Herleitung insbesondere auf die für $(f(x))^m$. Es ergeben sich Sätze über die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen und Facultätencoefficienten. Weiterhin werden specielle Folgerungen für Reihenfunctionen gezogen. H.

---

F. Rogel. Solution of question 11209. Ed. Times LVI. 100-102.

Independenter Ausdruck für den $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der Function

$$y = \left\{ l\left( \frac{2 l \sec ax}{a^2 x^2} \right) \right\}^p$$

für den Wert $x = 0$. Lp.

---

J. C. Fields. Transformation of a system of independent variables. American J. XIV. 230-236.

Es sei $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ eine Function von $n$ unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots, u_n$, und es seien diese letzteren wiederum Functionen von ebenso vielen anderen unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dann bietet sich die Aufgabe dar, irgend eine Differentiation von $\varphi$ nach den $x$ zu transformiren in die äquivalente Differentiation nach den $u$, eine Aufgabe, die für $n = 1$ zuerst von Bruno gelöst worden ist.

Der Verf. schlägt das Verfahren ein, für $\varphi$ zuerst eine specielle Function zu substituiren, nämlich $\varrho^{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n}$, wo die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ arbiträre Parameter bedeuten.

Da der gesuchte Differentialquotient stets der Form nach bereits bekannt ist, so handelt es sich nur noch um die Bestimmung der auftretenden Zahlencoefficienten: diese werden aber gerade in dem erwähnten Beispiel aus einer Reihe von Identitäten ermittelt, die aus der Willkürlichkeit der $\alpha$ entspringen. My.

---

E. B. Elliott. Notes on dualistic differential transformations. Lond. M. S. Proc. XXIII. 188-202.

Der Verf. betrachtet solche Berührungstransformationen (ohne übrigens den Namen zu nennen) bei ein, zwei und drei unabhängigen Veränderlichen, die den Charakter einer Involution haben. Sind also etwa für eine unabhängige Veränderliche $x$ die ursprünglichen Variabeln $y$, $x$, die transformirten $y_1$, $x_1$, und ist noch $y' = \frac{dy}{dx}$, $y_1' = \frac{dy_1}{dx_1}$, so soll die gemeinte Transformation derart sein, dass $y_1$, $x_1$, $y$, $x$, $y'$ mit $y$, $x$, $y'$, $x'$, $y_1'$ vertauscht werden dürfen. Es tritt dann die weitere Specialisirung ein, dass die höheren Ableitungen von $y$ nach $x$ übereinstimmen mit den entsprechenden Ableitungen von $x_1$ nach $x$, wodurch ein unmittelbarer Zusammenhang mit der Sylvester'schen Reciprocantentheorie hergestellt wird.

Geometrisch sind derartige Transformationen gewisse Reciprocitäten, die schon von anderer Seite her untersucht worden sind.

My.

E. Czuber. Ueber die Differentialquotienten von Functionen mehrerer Variabeln. Wien. Ber. CI. 1417-1435.

Der Begriff des Differentialquotienten lässt sich auf folgende Weise auf Functionen von $n$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ übertragen. Man deute die Variabeln als rechtwinklige Coordinaten in einem Raume von $n$ Dimensionen. Ist nun $f$ eine Function der $n$ Va-

riabeln, die im Gebiete $K$ einwertig und stetig ist, so lege man durch den Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Gebietes $K$ eine Gerade $S$ und bezeichne mit $s$ die Entfernung jenes Punktes von einem festen Punkte der Geraden. Längs der Geraden $S$ ist dann $f$ eine Function von $s$, und der Differentialquotient $\frac{df}{ds}$ heisst der „in der Richtung $S$ genommene Differentialquotient von $f$ im Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$". Die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ subsumiren sich unter diesen Begriff, und wenn $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n$ die Richtungscosinus von $S$ sind, so hat man

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n.$$

Trägt man auf der Richtung $S$ vom Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus die Grösse $\frac{df}{ds}$ ab, so ist der Ort des Endpunktes für wechselnde Richtung $S$ eine $(n-1)$-dimensionale Kugel. Die Richtung $S$, in welcher $\frac{df}{ds}$ ein Maximum erreicht, lässt sich hiernach leicht bestimmen. In ähnlicher Weise wird der Begriff der höheren, nach einer bestimmten Richtung genommenen Differentialquotienten aufgestellt und der Verlauf dieser Differentialquotienten um einen Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ discutirt. Der Fall $n = 2$ findet besondere Berücksichtigung. Der Hinweis auf die Verwendung des Begriffes des Differentialquotienten bei der Theorie der Maxima und Minima und bei der Taylor'schen Entwickelung beschliesst die Abhandlung.

Hz.

## C. A. Laisant. Remarques sur les fonctions homogènes.

S. M. F. Bull. XX. 117-121.

Von dem Euler'schen Theorem für homogene Functionen und einer bekannten Erweiterung desselben ausgehend, findet der Verf. als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Function $u$ mehrerer Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots$ in eine Summe von $p$ homogenen Functionen zerlegbar sei, die Existenz einer linearen homogenen Relation mit constanten Coefficienten zwischen

$u, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$, worin

$$u^{(k)} = \left[x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots\right]^{(k)}$$

ist und der rechts stehende Ausdruck eine symbolische Potenz bedeutet, in welcher die Potenzen der Ableitungen durch entsprechende Ableitungsindices zu ersetzen sind. Zugleich wird ein Verfahren angegeben, die homogenen Functionen wirklich herzustellen, aus denen $u$ besteht, falls es der obigen Bedingung genügt. Ein Beispiel dazu bildet die Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}\right) + bu = c$$

durch die Summe zweier willkürlichen homogenen Functionen, deren Grade durch die Constanten $a$ und $b$ bestimmt sind.

Wbg.

---

S. Pincherle. Sulle forme differenziali lineari. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 273-278.

Normale lineare Differentialform $p^{\text{ter}}$ Ordnung heisst hier der Ausdruck:

$$\Delta = f_p \varphi^{(p)} + f_{p-1} \varphi^{(p-1)} + \cdots + f_1 \varphi' + f_0 \varphi,$$

wo $\varphi$ eine beliebige Function einer Variable $t$, $f_p$ ein Polynom $p^{\text{ten}}$ Grades in $t$ ist. Auf diese kommen zwei Operationen in Anwendung: $D$ und $S_\varrho$, nämlich

$$D\Delta = f'_p \varphi^{(p-1)} + f'_{p-1} \varphi^{(p-2)} + \cdots + f'_1 \varphi,$$

$$S_\varrho \Delta = \Delta + \varrho D\Delta + \binom{\varrho}{2} D^2 \Delta + \cdots + \binom{\varrho}{p} D^p \Delta.$$

Beide Operationen sind distributiv. Ueberdies ist

$$DS_\rho = S_\rho D \quad \text{und} \quad S_\sigma S_\varrho = S_{\varrho+\sigma}.$$

Hiervon werden Anwendungen gemacht auf Transformation von Differentialgleichungen in solche, deren Lösung bekannt ist. Namentlich bringt die Integration einer Gleichung $\Delta = 0$ die Integration aller in $S_\varrho \Delta = 0$ enthaltenen Gleichungen mit sich.

H.

R. BANAL. Su alcuni parametri differenziali di 1° ordine. Batt. G. XXX. 235-240.

Der Artikel schliesst sich an die Abhandlung von Beltrami: „Ricerche d'Analisi applicate alla Geometria“ l. c. vol. I. an, in welchem neben den bekannten Differentialparametern erster Ordnung $\Delta$, $U$, $\nabla UV$ noch andre eingeführt werden, die sich zu geometrischen Interpretationen eignen. Er beschränkt sich auf den einfachsten unter diesen, der sich für den Fall von zwei Functionen zweier unabhängigen Variabeln auf das Quadrat der Functionaldeterminante reducirt, und wendet zu seiner Entwickelung die Methode von G. Ricci an in dessen Abhandlung: „Sui parametri e gli invarianti delle forme differenziali quadratiche“, Annali di Mat. (2) XIV (F. d. M. XVIII. 1886. 102). H.

O. HEAVISIDE. On operators in physical mathematics. Lond. R. S. Proc. LII. 504-529.

Es wird das Thema der Operatoren erst im allgemeinen besprochen, dann über einzelne Fragen, z. B. betreffend Differentialquotienten mit gebrochener Ordnungszahl, verallgemeinerte Differentiation, inverse Factorialfunction, Interpretation der verschwindenden Differentialquotienten, Zusammenhang zwischen Factorialen und Gammafunctionen, Verallgemeinerungen des Exponentialtheorems, der Bessel'schen Functionen, des Binomialtheorems, des Taylor'schen Satzes besonders gehandelt. H.

D. F. SELIWANOW. Ueber die unbestimmten Ausdrücke. Nachr. des St. Petersb. Techn. Instituts. (1891 u. 1892.) (Russisch.)

Der Verfasser betont besonders die Notwendigkeit, die Grenze von $f(x)$ bei $x = a$ und den particulären Wert $f(a)$ zu unterscheiden. Wi.

W. P. ERMAKOW. Vollständige Theorie der Maxima und Minima der Functionen einer Veränderlichen. Charkow Ges. (2) III. 155-162. Auch Kiew Univ. Nachr. 1892 Nr. 2. 22-32. (Bericht Phys.-Math. Ges. f. 1891.) (Russisch.)

Der Verfasser betrachtet verschiedene mögliche Fälle: wenn $f'(a)=0$ und $f''(a)\gtrless 0$, oder $=0$, oder wenn eine unendliche oder endliche Discontinuität an der Stelle $a$ vorliegt, wie auch den Fall, wo $f'(a)=\infty$, oder wo ein endlicher Sprung eintritt. Der Fall der in einem beliebig kleinen Intervall unendlich oft oscillirenden Function ist dabei ausgeschlossen. Um die nötigen Rechnungen zu verkürzen, wird erwähnt, dass die ihr Zeichen nicht ändernden Factoren bei der Untersuchung ausgelassen werden dürfen. Die elementare und übersichtliche Darstellung hat somit den Zweck, die betreffende Lücke der meisten gangbaren Lehrbücher auszufüllen. Si.

W. P. Ermakow. Maxima und Minima einer Function zweier Veränderlichen. Moskau Math. Samml. XVI. 415-436. (Russisch.)

Eine vollständigere Umarbeitung der §§ 2-4 (S. 2-8) der in F. d. M. XXIII. 407 besprochenen Arbeit. Das Resultat ist das folgende: Beginnt der Zuwachs der nach steigenden Potenzen der Veränderlichen entwickelten Function mit den Gliedern zweiter Ordnung der Kleinheit, und wird die Summe dieser letzteren einem mit dem Coefficienten $A$ multiplicirten Quadrat gleich, so ist es möglich, diesen Zuwachs so darzustellen:

$$\Delta F = A(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{m-2})^2+\theta_m(\xi,\eta)+\theta_{m+1}(\xi,\eta)+\cdots,$$

wo $\theta_m$ nicht durch $\omega_1$ teilbar ist. Es sei dann $\omega_2=\eta-h\xi$. Ist $m$ ungerade, so haben wir weder Maximum noch Minimum; ist $m$ aber gerade, so ist es notwendig und hinreichend für die Existenz eines extremen Wertes, dass $\theta_m(\xi, h\xi)$ dasselbe Zeichen habe, wie $A$ ($A<0$: Maximum; $A>0$: Minimum). Der Ausnahmefall kann eintreten, wenn der Zuwachs $\Delta F$ als Factor ein vollständiges Quadrat enthält; derselbe ist dann von Anfang an zu beseitigen.

Hr. Bukrejew hat, wie hier zu erwähnen ist, inzwischen die interessante Bemerkung gemacht, dass diese von Scheffers, Posse und Ermakow untersuchte Frage mit der von Briot (J. Liouville 1845, p. 368-378) gelösten Aufgabe der Auffindung der isolirten Punkte der ebenen Curven identisch sei. Vollständiger wird die

Arbeit von Hrn. Bukrejew (Mosk. M. S. XVI. 813) im folgenden Bande des Jahrbuchs besprochen werden. Si.

A. Mayer. Zur Theorie der Maxima und Minima der Functionen von $n$ Variabeln. Leipz. Ber. XLIV. 54-85.

Die Frage, ob die Function $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ an der Stelle $a_1, a_2, \dots, a_n$ ein Maximum oder Minimum besitzt, ist bekanntlich unmittelbar zu beantworten, wenn die zweite Variation, d. h. die Glieder zweiter Ordnung in der Taylor'schen Entwickelung von $f(a_1+k_1, \dots, a_n+k_n)-f(a_1, \dots, a_n)$, eine definite oder indefinite Form bilden. Eine Schwierigkeit tritt erst ein, wenn die zweite Variation semidefinit ist. Auf diesen Fall, jedoch unter der Voraussetzung, dass die vierte Variation keine weitere Singularität darbietet, bezieht sich die Untersuchung des Verfassers. Soll ein Maximum oder Minimum eintreten, so muss zunächst für diejenigen Werte von $k_1, k_2, \dots, k_n$, für welche die zweite Variation Null wird, auch die dritte Variation verschwinden. Dazu tritt dann noch eine auf das Vorzeichen der vierten Variation bezügliche Bedingung. Der ganzen Untersuchung liegt die folgende Definition des Minimums zu Grunde: Die Function $f(x_1, \dots, x_n)$ hat an der Stelle $a_1, \dots, a_n$ ein Minimum, wenn für alle mit $t$ verschwindenden Potenzreihen $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ die Function $f(a_1+\varphi_1(t), \dots, a_n+\varphi_n(t))$ an der Stelle $t=0$ ein Minimum besitzt. Ob diese Definition sich mit der gewöhnlichen deckt, muss dahingestellt bleiben. Hz.

Dellac. Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur le maximum ou le minimum d'une fonction. J. de Math. élém. (4) I. 208-211, 224-227.

Nach der elementaren Herleitung des im Titel genannten Theorems für Functionen einer und mehrerer Veränderlichen werden einige einfache Anwendungen davon gemacht. Gz.

J. ALEXANDROW. Geometrische Methoden zur Auffindung der Maxima und Minima. Spaczinski's Bote Nr. 148. 69-78. (Russisch.)

Die Methode besteht nur darin, die gegebene Aufgabe als eine bestimmte geometrisch aufzulösen und dann zu sehen, welche Veränderungen die Variation des Elements, welches ein Maximum oder Minimum werden soll, nach sich zieht. Ist es aber zu schwer zu entscheiden, dann solle man die Aufgabe in mehrere einfachere zerlegen. Der Verf. erläutert seine Methode an einigen Beispielen aus J. Petersen's Sammlung, aus der „Sammlung der constructiven geometrischen Aufgaben“ von P. Nekrassow, wie auch aus seinen eigenen: „Methoden zur Auflösung der constructiven geometrischen Aufgaben.“ 4. Aufl. Si.

W. ZINGER. Ueber den Punkt der kleinsten Entfernung. Moskau Math. Samml. XVI. 317-341.

Es handelt sich um die in Steiner's Gesam. Werken II. 95 besprochene Aufgabe. Da die Steiner'sche Lösung nicht veröffentlicht ist, so giebt Hr. Zinger in dieser vorläufigen Mitteilung einige darauf bezügliche elementare Betrachtungen.

Es sei ein Vieleck von der Beschaffenheit gegeben, dass die Verbindungsstrecken seiner $2n+1$ Ecken $a_1, \dots, a_{2n+1}$ den Relationen genügen:

$$a_1a_2 - a_1a_3 + a_1a_4 - \cdots + a_1a_{2n} - a_1a_{2n+1} = 0,$$
$$a_2a_3 - a_2a_5 + a_2a_7 - \cdots + a_2a_{2n+1} - a_2a_1 = 0,$$

dann ist der dem Vieleck umschriebene Kreis der Ort der Punkte $P$, für welche:

$$Pa_2 - Pa_3 + Pa_4 - \cdots + Pa_{2n} - Pa_{2n+1} + Pa_1 = 0,$$
$$(\text{allgem. } \Sigma \pm Pa_i = 0).$$

Etwas Abweichendes liefern analoge Vielecke mit gerader Zahl von Ecken. Dann kann man in der Summe $\Sigma \pm Pa_i = 0$ die Reihenfolge $+ - + - + - \cdots$ nicht annehmen, wohl aber $+ + - - + + - -$ u. s. w.

Ist dann $P$ der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels, welcher auf einem aus $P$ beschriebenen Kreise eine Punktreihe von ge-

nannter Beschaffenheit bestimmt, so ist dieser Punkt $P$ der Punkt der kleinsten Entfernung für jedes System von Punkten $A_i$, von denen jeder Strahl des Büschels einen und nur einen enthält; d. h. für jeden anderen Punkt $M$ ist $\Sigma MA > \Sigma PA$. [Man vergleiche hierzu Sturm: „Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten.“ J. für Math. XCVII; F. d. M. XVI. 1884. 508. Red.] Si.

---

E. Kötter. Ueber diejenigen Polyeder, die bei gegebener Gattung und gegebenem Volumen die kleinste Oberfläche besitzen. I. J. für Math. CX. 198-229.

Unter allen allseitig convexen Polyedern von gleichem Volumen und gleichem morphologischen Typus („Gattung“) sind nach einem Satze von Hrn. Lindelöf die notwendigen Bedingungen für das Eintreten eines Minimums der Oberfläche dann und nur dann erfüllt, wenn die Seitenflächen der Polyeder in ihren Schwerpunkten dieselbe Kugel berühren. Es braucht aber, wie der Verfasser hervorhebt, das Minimumpolyeder („Ideal“) der Gattung nicht immer ein Lindelöf'sches Polyeder zu sein. Aus einem beliebigen Polyeder erhält man nämlich durch unendlich kleine Verrückungen im allgemeinen ein Polyeder derselben Gattung; es kann aber vorkommen, dass die Umgestaltung eines Polyeders in ein Lindelöf'sches seinen morphologischen Typus in so fern ändert, als im Moment des Uebergangs in das Lindelöf'sche Polyeder gewisse Kanten oder Flächen notwendig zusammenfallen. In diesem Fall giebt das Lindelöf'sche Polyeder nicht das Ideal der Gattung. Die Existenz eines solchen Falles hat der Verfasser für Polyeder mit lauter dreikantigen Ecken wirklich nachgewiesen.

Der Verfasser hat auf Grund dieser Ueberlegung das isoperimetrische Problem für Polyeder nochmals in Angriff genommen. Im vorliegenden Aufsatz behandelt er einen Körper $P_n$, der nur von Dreiecken begrenzt wird, und bei dem $n-3$ vierkantige, zwei dreikantige und zwei $n$-kantige Ecken auftreten. Man bildet ihn dadurch, dass man von einer $n$-kantigen Doppelpyramide mit der Grundfläche $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ ausgeht und die Spitzen $B_1$ und $B_2$ in

eine Gerade mit der Ecke $A_0$ bringt. Dadurch scheidet $A_0$ als Ecke aus, während $A_1$ und $A_{n-1}$ dreikantige Ecken werden. Es wird zunächst gezeigt, dass die Winkel

$$A_iB_1B_2 = A_iB_2B_1,$$
$$A_iB_1A_{i+1} = A_iB_2A_{i+1}$$

sind. Bezeichnet man die zwei ersten Winkel durch $\varphi_i$, die letzten durch $\psi_i$, und setzt überdies, wenn $B_0$ die Mitte von $B_1B_2$ ist:

$$A_iB_0A_{i+1} = \chi_i,$$

so ergiebt sich als weitere notwendige Eigenschaft von $P_n$:

$$\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_{n-2} = \varphi_{n-1} = \psi, \quad \chi_1 = \chi_2 = \cdots = \chi_{n-2} = \chi$$

und dann mit Hülfe der Formeln für elliptische Functionen das nachstehende Resultat:

Es sei $k$ der kleinste Modul, für den

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2-3\xi_{03}^2\left(\frac{2i\omega}{n}\right)}{\xi_{23}^2\left(\frac{2\omega}{n}\right)-k^2\xi_{13}^2\left(\frac{2\omega}{n}\right)\xi_{03}^2\left(\frac{2i\omega}{n}\right)} = 0$$

ist, so wird durch die Angaben

$$\xi_{23}\left(\frac{2\omega}{n}\right) = \cos\psi, \quad \xi_{23}\left(\frac{2i\omega}{n}\right) = \cos\varphi_i$$

ein $P_n$ unzweideutig festgelegt, das kleinere Oberfläche besitzt, als irgend ein anderes $P_n$ mit gleichem Volumen, mag dieses allseitig convex sein oder nicht. Das Ideal ist nicht immer allseitig convex. Es ist der Fall, sobald $n \leqq 8$; es ist längs $B_1B_2$ concav, im übrigen convex, sobald $n \geqq 14$. Für die Zwischenzahlen bleibt der Charakter des Ideals unbestimmt.

Die $\xi_{03}, \xi_{13}, \xi_{23}$ bedeuten nach Weierstrass

$$\xi_{03} = \frac{\sigma}{\sigma_3}, \quad \xi_{13} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}, \quad \xi_{23} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

für den obigen Modul $k$. Die Einführung der elliptischen Functionen beruht auf ihrem bekannten Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie.

Für die Fälle $n = 5$ und $n = 6$ lässt sich die Bestimmung des Ideals auf ganzzahlige Gleichungen achten, bezw. dritten Grades zurückführen.

Sfs.

A. Thue. Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer. Naturforskermöde. 352-353.

Gedankengang eines Vortrags über gewisse Probleme des Maximums und Minimums.

Eine ebene Fläche ist von gleichseitigen Dreiecken mit zusammenfallenden Ecken und Seiten zusammengesetzt. Es wird dann gezeigt: wenn auf dieser Fläche eine Anzahl von Punkten verteilt ist, die ebenso gross ist wie die Anzahl der Ecken, dann giebt es jedenfalls ein Paar von Punkten, deren Abstand kleiner als die Dreiecksseite ist. V.

---

G. B. Mathews. Polygons of minimum perimeter circumscribed to an ellipse. Messenger (2) XXII. 68-69.

Geometrischer Beweis des Steiner'schen Satzes, dass, wenn ein Vieleck von gegebener Seitenanzahl einer gegebenen Ellipse umbeschrieben wird, sein Umfang ein Kleinstes wird, wenn seine Ecken alle auf einer confocalen Ellipse liegen. Glr. (Lp.)

---

E. Vicaire. Mémoire sur les propriétés communes à toutes les courbes qui remplissent une certaine condition de minimum ou de maximum. Paris. Mém. Ac. 1892. 24 S.

---

## Capitel 3.

## Integralrechnung.

J. Bergbohm. Entwurf einer neuen Integralrechnung auf Grund der Potential-, Logarithmal- und Numeralrechnung. Leipzig. B. G. Teubner. VI + 66 S. 8°.

J. Bergbohm. Neue Integrationsmethoden auf Grund der Potential-, Logarithmal- und Numeralrechnung. Stuttgart. Selbstverl. d. Verf. 58 S. 8°.

Beide Schriften, grossenteils von gleichem Inhalte, sind teils Ergänzung, teils Fortsetzung der vorjährigen Schrift „Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik". Was in F. d. M. XXIII. 1891. 286 über dieselbe gesagt ist, gilt auch von den gegenwärtigen und charakterisirt sie hinreichend. H.

---

F. J. Studnička. Ueber die directe Integration der Differentialausdrücke $\sin^p x \cos^q x\, dx$. Casopis XXI. 180-184. (Böhmisch.)

Entwickelt unter Verwendung von Exponentialfunctionen die nach Multiplen des Arguments fortschreitenden hyperbolischen Cosinus und Sinus $K$ und $S$ für das potenzirte Product

$$S^p(x)\, K^q(x) \qquad (p,\ q \text{ gerade und ungerade})$$

und geht dann zur cyklischen Darstellung über. Std.

---

F. Rogel. Zur Theorie der höheren Integrale. Prag. Ber. 1892. 185-198.

Mehrere die iterirten Integrale

$$\int^n f(x)dx^n$$

betreffende Identitäten, die zum Teil bekannt sind. Von den Resultaten mögen hier zur Charakterisirung folgende zwei Formeln Platz finden:

$$\int x^{2n} - \tfrac{1}{2}\binom{2n}{1} x \int x^{2n-1} + \binom{2n}{2} B_1 x^2 \int x^{2n-2} - \cdots$$
$$+ (-1)^n \binom{2n}{2n-2} B_{n-1} x^{2n-2} \int x^2$$
$$= (2n)! \left\{ \int^{2n+1} + \tfrac{1}{2} x \int^{2n} - \frac{B_2}{4!} x^2 \int^{2n-1} + \cdots + (-1)^n \frac{B_{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2} \int^3 \right\},$$

wobei der Kürze wegen gesetzt ist:

$$\int f(x) x^n dx = \int x^n, \quad \int^n f(x) dx^n = \int^n,$$

und

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k} \binom{2n}{2k-1} B_k s_{2n-2k} = -\frac{1}{4n} + \frac{2n-1}{4n+2} s_{2n},$$

wobei

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Lh.

---

## Capitel 4.
## Bestimmte Integrale.

C. Jordan. Remarques sur les intégrales définies.
Journ. de Math. (4) VIII. 69-99.

Die Abhandlung stellt sich die Untersuchung der einfachen und mehrfachen Integrale unter den allgemeinsten Voraussetzungen über das Integrationsgebiet zur Aufgabe. Abschnitt I recapitulirt Sätze von Weierstrass und Cantor über Punktmengen und definirt die „innere“ und „äussere“ Ausdehnung einer solchen (erstere ist die Grenze der Summe aller Raumelemente, welche nur Punkte der Menge enthalten, letztere die der Summe aller Elemente, welche überhaupt noch Punkte der Menge enthalten; beides für Zerlegung des Raumes durch parallele aequidistante Ebenen und unendliche Verkleinerung ihrer Distanz). Fallen innere und äussere Ausdehnung zusammen, so heisst die Menge messbar. In II wird bewiesen, dass die $n$-fache Integration einer integrabeln Function über einen messbaren Bereich durch $n$ successive einfache Integrationen ersetzt werden kann. In III werden hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Transformation vielfacher Integrale durch Einführung neuer Variabeln aufgestellt. Bdt.

---

Ch. de la Vallée-Poussin. Étude des intégrales à limite infinie, pour lesquelles la fonction sous le signe est continue. Brux. S. sc. XVI B. 150-180.

Ch. de la Vallée-Poussin. Recherches sur la convergence des intégrales définies. Journ. de Math. (4) VIII. 421-467.

Die erste Abhandlung enthält eine Beantwortung der von der

Société scientifique gestellten Preisfrage nach einer strengen Theorie der Differentiation unter dem Integralzeichen im Falle unendlicher Grenzen. Es werden zu diesem Zwecke zunächst die Definitionen aufgestellt: Das Integral $\int_p^\infty f(x, \alpha)dx$ heisst gleichmässig convergent in dem begrenzten Intervall $a \ldots b$, wenn zu jeder positiven Grösse $\varepsilon$ eine Zahl $N'$ von der Beschaffenheit gefunden werden kann, dass

$$\left| \int_N^\infty f(x, \alpha)dx \right| < \varepsilon$$

für jedes $\alpha$ zwischen $a$ und $b$ und für jedes $N > N'$. Es heisst gleichmässig convergent in einem willkürlichen Intervall, wenn dies für jeden Wert von $b$ der Fall ist; gleichmässig convergent in einem unbegrenzten Intervall $a \ldots \infty$, wenn die Bedingung (1) durch eine und dieselbe Zahl $N'$ für jedes $\alpha > A$ erfüllt werden kann. Im allgemeinen gleichmässig heisst die Convergenz, wenn die betreffenden Bedingungen nur für eine endliche Anzahl Stellen nicht mehr erfüllt sind. Es wird dann bewiesen (S. 163): Die Integration eines gleichmässig convergenten Integrals nach dem Parameter zwischen endlichen Grenzen darf stets unter dem Zeichen vorgenommen werden. Soll aber auch die Integration nach dem Parameter ins Unendliche ausgedehnt werden, so sind noch weitere Bedingungen erforderlich, die S. 166-169 angegeben sind. Durch Umkehrung ergeben sich Sätze über die Differentiation unter dem Zeichen. Eine Zusatznote (S. 177) erörtert die sich ergebende Consequenz, dass unter Umständen $\int\int f dT$ einen Sinn haben kann, während $\int f dx$ unendlich oder unbestimmt wird.

Die zweite Abhandlung dehnt die Untersuchung auf den Fall von Unstetigkeiten des Integranden aus. Ihr wesentlichstes Resultat ist (S. 452): Wenn der Integrand sein Zeichen nicht wechselt, so ist zur Reduction eines Doppelintegrals auf zwei einfache Integrationen notwendig und hinreichend, dass man dadurch ein bestimmtes Resultat erhält. Weiterhin wird auch noch der Fall nur relativer Convergenz erörtert S. 453ff.

Uebrigens vergleiche man das Programm von Hossenfelder (F. d. M. XXIII. 1891. 294). Bdt.

Ch. de la Vallée-Poussin. Note sur des intégrales définies à limites infinies d'une forme particulière. Brux. S. sc. XVI A. 6-8.

Zwei alte und zwei neue Beispiele von Integralen dieser Art, welche endlich sind, obschon die Function unter dem Integralzeichen unendlich oft unendlich wird. Folgendes ist das einfachste dieser Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{l(\cos^2 ax)}{x^2}\,dx = -a\pi.$$

Mn. (Lp.)

---

Ch. de la Vallée-Poussin. Note sur certaines inégalités et leur application au calcul intégral. Brux. S. sc. XVI A. 8-11.

Sind $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ positive Grössen, $p$ eine Zahl zwischen 0 und 1, so ist:

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \overline{\overline{<}} (a_1^{\frac{1}{p}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{p}})^p (b_1^{\frac{1}{1-p}} + \cdots + b_n^{\frac{1}{1-p}})^{1-p};$$

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \overline{\overline{>}} \frac{(a_1^{\frac{p}{p+1}} + \cdots + a_n^{\frac{p}{p+1}})^{\frac{p+1}{p}}}{\left(\frac{1}{b_1^p} + \cdots + \frac{1}{b_n^p}\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Anwendungen auf die Integralrechnung. Mn. (Lp.)

---

H. Bentabol. Integrales definidas. Progreso mat. II. 137-146.

Didaktische Darstellung der ersten Grundlehren aus der elementaren Theorie der bestimmten Integrale. Tx. (Lp.)

---

J. Bruno de Cabedo. Demonstração do segundo theorema da media. Teixeira J. XI. 67.

Beweis des zweiten Mittelwertsatzes für die bestimmten Integrale. Tx. (Lp.)

---

Aug. Pánek. Ueber die Auswertung eines bestimmten Integrals. Pr. d. städt. Realgymn. von Prag. (Böhmisch.)

Behandelt das Integral

$$J_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx}{(p+q\,\mathrm{tg}^2 x)^n},$$

wo $p$ und $q$ positiv und $n \gtreqless 2$ ganzzahlig ist, und gelangt auf Grund der Relation

$$J_n = \frac{-1}{n-1}\frac{dJ_{n-1}}{dp} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}J_n}{dp^{n-1}}$$

zu der Formel

$$J_n = \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n-2)}\frac{\pi}{2(pq)^{n-\frac{1}{2}}} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{\pi}{2\sqrt{q}}\cdot\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right).$$

Std.

---

G. A. Gibson. Integrals of the form

$$\int_0^{2\pi} \log\left\{(x-a\cos\theta)^2+(y-b\sin\theta)^2\right\} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, m\theta\, d\theta$$

and allied integrals. Edinb. M. S. Proc. X. 83-90.

Die Auswertung wird bewirkt, indem man setzt:

$$a = c\cosh u, \quad x = c\cosh v\cos\varphi,$$
$$b = c\sinh u, \quad y = c\sinh v\sin\varphi,$$

sodass $(x-a\cos\theta)^2+(y-b\sin\theta)^2$ übergeht in

$$c^2\{\cosh(u+v)-\cos(\theta+\varphi)\}\{\cosh(u-v)-\cos(\theta-\varphi)\},$$

wie dies in Hrn. Greenhill's Calculus (2te Ausg. S. 372) angegeben ist (vergl. Heine's Kugelfunctionen II. 202). Die Integrationen werden in den meisten Fällen dadurch ausgeführt, dass man den Logarithmus durch seine Reihenentwickelung ersetzt.

Gbs. (Lp.)

C. F. Lindman. Om några integraler. I. Stockh. Öfv. 5-19.

Aus den Formeln

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin\beta x . x^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(n)}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin^2\beta x\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-ax^2}dx - \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos 2\beta x\,dx\right]$$

und einigen ähnlichen werden verschiedene andere Integralformeln hergeleitet. Nachher wird bewiesen, dass

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}\,dx = e^a\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\pi}\int_0^{\sqrt{a}} e^{-u^2}du\right)$$

ist. Die Resultate berichtigen in einigen Fällen entsprechende Formeln bei Bierens de Haan. Bdn.

---

L. Clariana y Ricart. Introducción al estudio de las integrales eulerianas. Progreso mat. II. 190-195.

Darstellung der Beweise für die Formel

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

nach Serret, „Cours de calcul intégral“ und nach Briot und Bouquet, „Théorie des fonctions elliptiques“. Tx. (Lp.)

---

E. Catalan, C. Le Paige, P. Mansion. Rapports sur le Mémoire intitulé: Sur l'intégrale eulérienne de première espèce, par M. J. Beaupain. Belg. Bull. (3) XXIV. 606-614.

Erörterungen über zwei Formeln des Herrn Beaupain. Dieser hat seine Abhandlung, die später besprochen werden wird, so eingerichtet, dass sie die von dem einen der Berichter formulirten Ausstellungen vermeidet. Mn. (Lp.)

---

M. Lerch. Ableitungen einiger Formeln der Integralrechnung. Casopis XXI. 218-231. (Böhmisch.)

Der Verfasser geht von dem Integral

$$J=\int_0^\infty \frac{e^{ai\varphi}z^{ai}dz}{1-ze^{i\varphi}}$$

aus, wo $a=\alpha+i\beta$, $0<\alpha<1$ und $\varphi$ zwischen 0 und $2\pi$ liegt, und zeigt, dass sein Wert von dem reellen $\varphi$ unabhängig ist, wobei zahlreiche Nebenresultate miterhalten werden. Std.

---

M. Lerch. Sur une intégrale d'Euler. Darboux Bull. (2) XVI. 337-343.

Es wird zuerst bewiesen, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{ai\varphi}z^{a-1}dz}{1-ze^{i\varphi}}$$

unabhängig von $\varphi$ ist. Dies Resultat enthält viele Relationen, aus denen unter anderen auch die zwei Euler'schen Formeln

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi};\quad \int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}dz=\pi\cot a\pi$$

hervorgehen (vergl. das vorangehende Referat). H.

---

C. Arzelà. Sugli integrali doppi. Bologna Mem. (5) II. 133-147.

Die Reducibilität eines Integrals über ein Feld auf zwei successive Integrationen, bereits von Harnack ausser Zweifel gestellt, unternimmt der Verfasser einfacher und klarer herzuleiten. Er findet, dass sie von zwei notwendigen und hinreichenden Bedingungen abhängt. H.

---

N. N. Zinin. Verschiedene Methoden zur Reduction der mehrfachen Integrale und die hauptsächlichsten Anwendungen dieser Methoden. Warschau 1892. (Russisch.)

Die Monographie des Herrn Zinin giebt eine sorgfältig und elegant geschriebene Zusammenstellung der hauptsächlichsten Methoden der Reduction vielfacher Integrale.

Besondere Beachtung wird der Transformation der mehrfachen Integrale gewidmet und den Beziehungen zwischen den Integralen,

welche über ein gewisses Gebiet erstreckt sind, sowie auch denjenigen, welche über die Begrenzung jenes Gebietes erstreckt sind. Es werden nach einander die lineare Transformation, die verallgemeinerte Polartransformation, die Transformation der Form:

$$x_i = y_1 y_2 \dots y_i (1-y_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$
$$x_n = y_1 y_2 \dots y_{n-1} y_n,$$

die Transformation der Form:

$$x_1 = y_1, \quad x_i = (1-y_1)(1-y_2)\dots(1-y_{i-1})y_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

und die Transformation der Form:

$$\frac{x_1}{y_i-\alpha_1} + \frac{x_2}{y_i-\alpha_2} + \dots + \frac{x_n}{y_i-\alpha_n} = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

nebst den verschiedenen Anwendungen dieser Transformationen studirt.

Nach der Behandlung dieser Transformationen folgt die Ableitung der Beziehungen zwischen den Integralen, welche über ein gewisses Gebiet erstreckt sind, und zwischen denjenigen, welche über die Begrenzung jenes Gebietes erstreckt sind. Es sind die Beziehungen:

$$(1) \qquad \int\limits_{L<0} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} dv = \int\limits_{L=0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial L}{\partial x_k} \frac{ds}{R}$$
$$\left(R = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial L}{\partial x_n}\right)^2}\right),$$

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{L(x_1, x_2, \dots, x_n, t)<0} f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)\, dv = \int\limits_{L<0} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial t} dv$$
$$- \int\limits_{L=0} f(x_1, \dots, x_n, t) \frac{\partial L}{\partial t} \frac{ds}{R},$$

$$(3) \qquad \int\limits_{L<0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dv$$
$$= \int F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Sigma_k (x_k - \alpha_k) \frac{\partial L}{\partial x_k} \frac{ds}{R},$$

wo die Function $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ gleich dem Integral

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1} f[x_1 - (x_1 - \alpha_1)u, \dots, x_n - (x_n - \alpha_n)u]\, du$$

ist. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bedeutet ein System der Werte, welche der Ungleichheit $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ genügen.

Die zwei ersten dieser Beziehungen wurden von Ostrogradsky (F. d. M. XXIII. 1891. 304) entdeckt und von Kronecker wiedergefunden; die dritte ist von Kronecker durch die Benutzung der „Clausius'schen" Coordinaten abgeleitet.

Es folgen dann die Anwendungen dieser Beziehungen auf die Berechnung der Oberflächen und auf die Potentialtheorie (Verallgemeinerung des Gauss'schen Integrals $\int \frac{\cos(n, r) ds}{r^2}$, Berechnung der Componenten der Anziehungskraft einer ellipsoidischen Mannigfaltigkeit, Berechnung des Differentialparameters zweiter Ordnung).

Die zweite Abteilung beschäftigt sich zunächst mit der Darstellung des Cauchy'schen Verfahrens für die Reduction der mehrfachen Integrale von der Form $\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \frac{Q}{P^\mu}$, wo $Q$ das Product der $n$ Functionen $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $P$ die Summe der $n$ Functionen $\varphi(x_i)$ ist, sodann mit den Anwendungen der Formel von Catalan für die Reduction des Integrals

$$\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \psi[L(x_1, x_2, \ldots, x_n)]\, dv,$$

erstreckt über das Gebiet $a < L(x_1, \ldots, x_n) < b$, und mit der Formel von Sonin für die Reduction des über dasselbe Gebiet erstreckten Integrals

$$\int \varphi[x_1, \ldots, x_n, L(x_1, x_2, \ldots, x_n)]\, dv.$$

(F. d. M. XXI. 1889. 287). In dieser Abteilung findet sich auch die Darstellung der eigenen Methode des Verfassers für die Reduction der $n$-fachen, über das Gebiet $x_1 + \cdots + x_n < 1$ erstreckten Integrale auf die zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ genommenen Integrale.

Die dritte Abteilung ist endlich denjenigen Methoden der Reduction der vielfachen Integrale gewidmet, welche auf der Benutzung des discontinuirlichen Factors basiren. Hierbei benutzt

der Verfasser hauptsächlich den discontinuirlichen Factor Cauchy's:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{a(k+ui)}du}{k+ui} = \begin{vmatrix} 1, & \text{wenn } a > 0; \\ 0, & \text{wenn } a < 0. \end{vmatrix}$$

Dieser Factor wurde zuerst von Hrn. Mertens verwendet (De functione potentiali duarum ellipsoidium homogenearum. J. für Math. LXIII. 360-372). Denselben Factor benutzte auch hauptsächlich Kronecker in seinen „Vorlesungen über bestimmte Integrale".

Die besprochene Arbeit Zinin's bildet eine würdige Vervollständigung seiner Arbeiten über die Reduction der vielfachen Integrale, von denen mehrmals in den F. d. M. gesprochen wurde. (F. d. M. XXII. 1890. 292, XXIII. 1891. 304). Wi.

---

F. J. Obenrauch. Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittels elliptischer Coordinaten. Pr. Oberrealsch. Neutitschein. 1891/92. 56 S. gr. 8°.

Im ersten Abschnitt giebt der Verfasser eine eingehende historische Entwickelung der Theorie der elliptischen Coordinaten und ihrer Anwendungen auf die Analysis, Geometrie und mathematische Physik. Im zweiten Abschnitt wird die Transformation und Auswertung des Lamé'schen Doppelintegrales, im dritten hauptsächlich diejenige des die Octantenoberfläche eines dreiaxigen Ellipsoides darstellenden Doppelintegrales nach verschiedenen, teils bekannten, teils neuen Methoden, vorzüglich mit Hülfe elliptischer Coordinaten, durchgeführt. Wbg.

---

G. A. Maggi. Teorema di Stokes in coordinate generali. Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. (4) IV. 12 S.

Sind $q_1, q_2, q_3$ allgemeine Raumcoordinaten, so ist:

$$ds = \Sigma Q_{ij}\,dq_i dq_j.$$

Bezeichnet ferner $Q^2$ die Determinante der $Q_{ij}$, $n$ die Normale zur Integrationsfläche, $n_{ij}$ die den Linien $q_i$, $q_j$ in ihrem Schnittpunkte gemeinschaftliche Normale, $(ij)$ den von den Tangenten an diese beiden Linien gebildeten Winkel, und setzt man endlich:

$$N_r = \sum_{k=1}^{3} Q_{rk}\sqrt{Q_{ii}Q_{jj}}\sin(ij)\cos(n_{ij}n),$$

so ist die allgemeine Form des Stokes'schen Satzes die folgende:

$$\int (X_1 dq_1 + X_2 dq_2 + X_3 dq_3) = \int \Big\{ \Big( \frac{\partial X_3}{\partial q_2} - \frac{\partial X_2}{\partial q_3} \Big) N_1 + \Big( \frac{\partial X_1}{\partial q_3} - \frac{\partial X_3}{\partial q_1} \Big) N_2 + \Big( \frac{\partial X_2}{\partial q_1} - \frac{\partial X_1}{\partial q_2} \Big) N_3 \Big\} \frac{d\sigma}{Q^2}.$$

Vi.

---

E. Padova. Il teorema di Stokes in coordinate generali.
Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1021-1024.

Beltrami hat in seinen Ricerche sulla cinematica dei fluidi § 12. Gl. (30)''' die Transformation eines Integrals, begrenzt durch eine geschlossene Linie, in ein solches, begrenzt durch eine Fläche, in allgemeinen Coordinaten vollzogen; A. Maggi hat in Atti dell'Accad. Gioenia eine Note darüber publicirt. Picard hat in seinem Traité d'analyse die umgekehrte Transformation vollzogen. Beide Transformationen werden im Gegenwärtigen ausgeführt. H.

---

Ph. Gilbert. Sur la formule de Stokes généralisée.
Brux. S. sc. XVI A. 2-4.

Transformation des Integrales:

$$\int (UdL + VdM + WdN),$$

worin $U$, $V$, $W$, $L$, $M$, $N$ Functionen von $x$, $y$, $z$ sind, längs einer geschlossenen, auf einer Oberfläche $z = f(x, y)$ gezogenen Curve in ein Integral bezüglich des Flächeninhaltes $\sigma$, der in dieser Oberfläche abgegrenzt ist. Man findet die Summe dreier Integrale von der Art des folgenden:

$$\int \Delta d\sigma, \text{ wo } \Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \end{vmatrix},$$

worin $X$, $Y$, $Z$ die Richtungscosinus der Normale zur Oberfläche $z = f$ bedeuten. Mn. (Lp.)

---

L. Pochhammer. Ueber eine Gattung von bestimmten Integralen. Math. Ann. XLI. 167-173.

Es handelt sich um einfache und Doppelintegrale über geschlossene Integrationswege im complexen Gebiete; dieselben werden in Reihen entwickelt, welche Grenzfälle hypergeometrischer Reihen sind. Bdt.

---

L. Pochhammer. Ueber fünf Doppelintegrale. Math. Ann. XLI. 179-196.

Es handelt sich um Doppelintegrale, die nach Umkehrung der Integrationsreihenfolge sich als Producte Euler'scher Integrale darstellen. Der Nachweis, dass diese Umkehrung gestattet ist, wird jedesmal ausführlich erbracht. Bdt.

---

K. Heun. Untersuchungen über die Gauss'sche Quadraturmethode. Pr. (No. 108) 1. Höh. Bürgersch. Berlin. 19 S. 4°.

Der erste Teil vorliegender Abhandlung beschäftigt sich mit der Aufgabe, das Integral

$$S=\int_a^\beta \varphi(x)f(x)dx$$

in der Form

$$\text{(A)} \qquad S=p_1\varphi(x_1)+p_2\varphi(x_2)+\cdots+p_\nu\varphi(x_\nu)$$

angenähert darzustellen. Dabei bedeutet $f(x)$ eine fest gegebene Function, $\varphi(x)$ eine durch eine gewöhnliche Potenzreihe darstellbare Function. Die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ sind so zu bestimmen, dass der Fehler sich erst in den Gliedern $(2\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung geltend macht, oder, was dasselbe besagt, dass die Formel (A) genau richtig ist, sobald für $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function $(2\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gesetzt wird. Diese Grössen ergeben sich auf rein algebraischem Wege, ausgedrückt durch die $2\nu$ Integrale

$$a_r=\int_a^\beta x^{r-1}f(x)dx \qquad (r=1,2,3,\ldots,2\nu).$$

Das ganze Problem erweist sich übrigens identisch mit dem anderen, die Form $(2\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten $a_1, a_2, \ldots, a_{2\nu}$ sind,

als Summe von Potenzen von $\nu$ Linearformen darzustellen. Dem entsprechend stimmen auch die Formeln des Verfassers mit bekannten Formeln der Invariantentheorie überein.

Nachdem der Verfasser die erhaltenen Resultate auf die Berechnung der Schwingungsdauer des einfachen Kreispendels angewandt hat, geht er im zweiten Teile zu einer Anwendung allgemeineren Charakters über. Es handelt sich hier um die Lösungen einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung, wenn die Lösungen der reducirten Differentialgleichung als bekannt vorausgesetzt werden. Die Lösung der nicht homogenen Gleichung erfordert dann bekanntlich nur noch die Berechnung einfacher Integrale. Auf diese Integrale wendet der Verfasser die im ersten Teile entwickelten Formeln an. Die Voraussetzung, dass die reducirte Differentialgleichung regulären Charakter besitze, hat dabei Vereinfachungen in der Berechnung der Integrale $a_1, a_2, \dots$ zur Folge. Hz.

---

N. J. Sonin. Ueber den Grad der Genauigkeit der Bestimmung der Zahlenwerte der Integrale. Petersb. Abhandl. LXIX. 1-30. (Russisch.)

In der Abhandlung: „Ueber die Residuen, welche die angenäherten Werte der Integrale geben" (F. d. M. XIX. 1887. 273) hat Hr. Tschebyscheff gezeigt, dass, wenn für zwei positive Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ die Integrale $\int_a^b x^k f(x)dx$ und $\int_a^b x^k f_1(x)dx$ für alle ganzen Werte von $k$ von 0 bis $2m-1$ gleich sind, die Differenz zwischen den Integralen $\int_a^v f(x)dx$ und $\int_a^v f_1(x)dx$ dem Zahlenwerte nach nicht einen gewissen Bruch $\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$ übersteigen kann. Für den besonderen Fall, wenn

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{x^2}}, \quad a = -\infty, \; b = +\infty$$

ist, wurde die höchste Grenze dieses Bruches $\frac{1}{S_{n-1}}$ von Hrn. Tsche-

byscheff in der Form

$$\frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}}{2(m-3)^2\sqrt{m-1}}(q^2v^2+1)^2$$

gegeben; diese Grenze wächst also gleichzeitig mit $v$; Herr Sonin zeigt in der vorliegenden Abhandlung, dass

$$\frac{1}{S_{m-1}}<\sqrt{\frac{\pi}{2m-1}}.$$

Das Theorem von Tschebyscheff (F. d. M. XIX. 1887. 275) kann mithin in folgender etwas veränderter Form angegeben werden: „Die Function $f_1(x)$ gebe, indem sie positiv bleibt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx=1,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k}f_1(x)dx=\frac{1.3\ldots(2k-1)}{q^{2k}}$$

$$(k=1,2,\ldots,m-1);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1}f_1(x)dx=0 \qquad (k=1,2,\ldots,m),$$

so bleibt der Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{v} f_1(x)dx$ zwischen den Grenzen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx-\sqrt{\frac{\pi}{2m\pm1}}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}dx+\sqrt{\frac{\pi}{2m\pm1}},$$

wo $2m+1$ nur bei ungeradem $m$ genommen werden darf, $2m-1$ bei einem willkürlichen $m$.“

Für den anderen besonderen Fall:

$$a=-b,\quad f(x)=(b^2-x^2)^\lambda \qquad (\lambda>-1)$$

erhält der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung das folgende Theorem: „Wenn die Function $f(x)$ positiv zwischen den Grenzen $-b$ und $+b$ ist und die folgenden Integrale bekannt sind:

$$\int_{-b}^{b} x^{2k-1}f(x)dx=0 \qquad (k=1,2,\ldots,m),$$

$$\int_{-b}^{+b} x^{2k-2}f(x)dx=\frac{\Gamma(\lambda+1).\Gamma(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+k+\frac{1}{2})}b^{2k-2} \qquad (k=1,2,\ldots,m),$$

so weicht das Integral

$$\int_{-b}^{v} f(x)\,dx$$

von dem Integrale

$$\int_{-b}^{v}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^{\lambda}\frac{dx}{b}$$

um eine Grösse ab, die nicht den Zahlenwert

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m}{2}+\lambda+1\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{m}{2}+\lambda+\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{bei geradem } m$$

und

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right).\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right).\Gamma\left(\frac{m}{2}+\lambda+1\right)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{bei ungeradem } m$$

übersteigt.“ Wi.

---

N. J. Sonin. Sur l'intégrale $\int_a^b \frac{F(x)dx}{z-x}$. Mém. Acad. St. Pétersbourg. Tome XXXVIII, Nr. 14.

In der Abhandlung werden verschiedene Annäherungsformeln für das Integral

$$\int_a^b \frac{F(x)dx}{z-x}$$

abgeleitet und die Grenzen der entsprechenden Fehler ermittelt. Bei den willkürlichen Functionen $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)$ hat man:

$$\int_a^b F(x)\frac{dx}{z-x} = \frac{\psi_1(z)}{\varphi_1(z)} + \frac{\psi_2(z)}{\varphi_1(z).\varphi_2(z)} + \frac{\psi_3(z)}{\varphi_1(z).\varphi_2(z).\varphi_3(z)} + \cdots$$
$$+ \frac{\psi_m(z)}{\varphi_1(z).\varphi_2(z)\ldots\varphi_{m-1}(z).\varphi_m(z)}$$
$$+ \frac{1}{\varphi_1(z).\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)}\int_a^b F(x).\varphi_1(x).\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)\frac{dx}{z-x}.$$

Aus dieser allgemeinen Formel erhält man die speciellen durch die Annahme:

$$(1) \qquad \varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \cdots = \varphi_m(z) = z - c,$$

$$(2) \qquad \varphi_k(z) = z - c_k.$$

Die erste dieser Formeln kann auch aus der Taylor'schen Reihe abgeleitet werden, und deshalb kann man für die Grenzen der Fehler die Resultate einer Untersuchung über den Rest der Taylor'schen Formel anwenden, welche früher vom Verfasser publicirt wurde. Im allgemeinen benutzt der Verfasser, um die Grenzen der Fehler zu finden, die Ungleichheiten von Tschebyscheff.

Am Ende der Abhandlung werden die Fälle behandelt:

$$F(x) = (x-a)^\lambda (b-x)^\mu$$

und

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \log(1 - e^{-2\pi x}) \qquad (a = 0,\ b = \infty).$$

Wi.

---

A. Amsler. Ueber mechanische Integrationen. Katalog der math. Ausst. München. 99-124.

Auseinandersetzung der Principien der mechanischen Hülfsmittel bei einigen der interessantesten Instrumente, welche zur mechanischen Integration dienen. Als solche Hülfsmittel werden drei angegeben, nämlich: 1) eine Rolle, deren rundlicher oder flacher Rand mit sanftem Drucke gegen eine Fläche anliegt. Der Rollenrand muss glatt sein oder darf doch wenigstens keine schiefen Kerben haben. Findet eine relative Bewegung zwischen Fläche und Rolle statt, so wird die Rolle durch Reibung von der Fläche in Umdrehung versetzt. 2) Eine Combination von irgend zwei Flächen, welche sich auf einander wälzen: Kugel, Kreiscylinder, Ebene, Kreiskegel. Der Zweck ist die Vermeidung gleitender Reibung, wie sie bei dem zuerst beschriebenen Integrationsmittel vorkommt. 3) Der dritte Mechanismus besteht in einer Rolle mit scharfem Rand, welche auf einer Fläche rollt, ohne seitlich gleiten zu können; dagegen muss sie sich um ihren Berührungspunkt mit der Fläche drehen können. Statt einer scharfkantigen Rolle kann man auch eine sich nicht drehende Schneide auf der Fläche laufen

lassen. Als erstes Instrument vom Typus 1) wird das Planimeter von Gonnella beschrieben (vergl. Favaro, F. d. M. V. 1873. 52). In Betreff des zweiten Typus wird auf J. Amsler-Laffon's „Neuere Planimeter-Constructionen" verwiesen (Z. für Instr. Kunde, 1884) und das bezügliche Instrument beschrieben, wozu die Redaction in einer Anmerkung die Beschreibung eines hierher gehörigen „Platometers" von Clerk Maxwell aus dem Jahre 1855 fügt. Ein Instrument vom dritten Typus ist das Polarplanimeter von J. Amsler (Vierteljahrsschrift 1856). Nach diesem beschreibenden Teile des Aufsatzes folgt ein theoretischer, in welchem gezeigt wird, wie man jene Integrationsmechanismen angewandt hat und anwenden kann, um Integrale von praktischer Bedeutung auszuwerten. Der Aufsatz wird ergänzt durch eine Reihe von Abbildungen in dem zweiten Teile des Katalogs, namentlich durch die von Hrn. A. Amsler auf S. 202-205 zu dem Integrator 80 (Momentenplanimeter) gegebene Erläuterung, sowie durch manche Ausführungen des Herrn Dyck zu den im Katalog aufgeführten Nummern.

Lp.

---

O. Henrici. Ueber Instrumente zur harmonischen Analyse. Katalog der math. Ausst. München. 125-136.

„Die harmonische Analyse einer gegebenen periodischen Bewegung besteht in der Bestimmung der Amplituden und Phasen der componirenden einfach harmonischen Bewegungen, oder, analytisch ausgedrückt, in der Bestimmung der Coefficienten, welche in der Entwickelung einer Function in eine Fourier'sche Reihe auftreten". Es handelt sich also um die Ermittelung der beiden Integrale

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Instrumente zur harmonischen Analyse sind daher Integratoren, welche Integrale der obigen Form ermitteln. Zuerst wird der Analysator von W. Thomson (Lord Kelvin) beschrieben; dann geht der Verf. zu zwei Apparaten über, die er selbst erdacht hat, um eine graphisch gegebene Curve $y = f(t)$ zu analysiren. Zuletzt

wird eine Abänderung beschrieben, durch welche Hr. Sharp das letzte Instrument leichter für die Handhabung gemacht hat. Die Abbildung des Apparates steht unter No. 90 des Katalogs (S. 213), worauf S. 214-221 unter No. 91 sofort der harmonische Analysator von den Herren A. Sommerfeld und Wiechert folgt, beschrieben und erklärt von A. Sommerfeld (vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 306). Im Nachtragskatalog wird dann S. 34 unter No. 90a ein inzwischen von G. Coradi in Zürich nach den Angaben der Herren Henrici und A. Sharp construirtes Instrument abgebildet und beschrieben, das mit 10 Rollen versehen ist, von denen je fünf die Coefficienten $A_n$ und $B_n$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) durch viermaliges Umfahren der Curve bestimmen. Lp.

---

A. Sommerfeld. Ueber eine neue Integrirmaschine. Königsberg. Koch in Commission. 6 S. Mit Textfiguren u. 1 Taf. gr. 4°. (Sonderdr.)

Bericht in F. d. M. XXIII. 1891. 305.

# Capitel 5.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen.

É. Picard. Sur l'application aux équations différentielles ordinaires de certaines méthodes d'approximations successives. C. R. CXV. 543-549.

Das System habe die Gestalt:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w), \quad \dfrac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \ldots, w), \ \ldots, \\ \dfrac{dw}{dx} = f_n(x, u, v, \ldots, w). \end{cases}$$

So lange $x$ positiv bleibt, sollen die $f$ wohlbestimmte positive und mit $u, v, \ldots, w$ wachsende Werte haben, während ihre Ableitungen erster Ordnung nach $u, v, \ldots, w$ mit wachsenden $u, v, \ldots, w$

beständig abnehmen. Man kann dann zeigen, dass mit Hülfe successiver Approximationen für die Integrale mit verschwindenden Anfangswerten Reihenentwickelungen existiren, die für jeden positiven Wert von $x$ gültig sind. Setzt man

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ \ldots,\qquad \frac{dw_1}{dx} = f_n(x,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x,\ u_1,\ v_1,\ \ldots,\ w_1),\ \ldots,\qquad \frac{dw_2}{dx} = f_n(x,\ u_1,\ v_1,\ \ldots,\ w_1),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

worin $u_1, v_1, \ldots, w_1$; $u_2, v_2, \ldots, w_2$; u. s. w. so bestimmt werden, dass sie für $x = 0$ verschwinden, so geben die Reihe

$$(2)\qquad u_1 + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_m - u_{m-1}) + \cdots$$

und die analogen Reihen für jeden positiven Wert von $x$ die gesuchten Integrale. Die Voraussetzung betreffs der Derivirten von $f$ erweist sich als notwendig; im anderen Falle convergiren zwar die Reihen (2) für jeden positiven Wert von $x$, stellen aber, abgesehen von hinreichend kleinen Werten von $x$, nicht die gesuchten Integrale dar. Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale für zwei Werte der unabhängigen Variabeln gegebene Werte annehmen sollen. An einzelnen Beispielen wird die Existenz von Integralen zwischen bestimmten Grenzen und in verschiedenen Fällen die Existenz von periodischen Lösungen nachgewiesen.

Hr.

---

É. Picard. Sur certaines solutions asymptotiques des équations différentielles. C. R. XV. 1030-1031.

In dem System

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t)\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

seien die $X$ Potenzreihen der $x$, die kein von den $x$ unabhängiges Glied enthalten und für jedes $t$ zwischen 0 und $\infty$ convergiren, wenn die Moduln der $x$ unterhalb einer gewissen Grenze bleiben. Bildet man aus den Gliedern ersten Grades der $X$ das System der

linearen Gleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

und hat dieses zu Integralen

$$x_i = C_1 e^{-a_1 t} f_{i1}(t) + \cdots + C_n e^{-a_n t} f_{in}(t),$$

wo die $a$ positiv sind und der absolute Wert der $f$ unter einer bestimmten Grenze bleibt; ist endlich

$$\int_0^t (a_{11} + \cdots + a_{nn})dt = -(a_1 + \cdots + a_n)t + F(t),$$

wo $|F(t)|$ für jedes $t$ kleiner als eine bestimmte Grösse ist, so convergiren die Integrale des Systems (1), die für $t = 0$ hinlänglich kleine Werte annehmen, für $t = \infty$ gegen Null. Dieser Satz lässt sich, wie der Verf. bemerkt, auf die von Herrn Poincaré betrachteten asymptotischen Lösungen gewisser Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten anwenden. Hr.

---

G. Peano. Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. Nouv. Ann. (3) XI. 79-82.

Der Verf. zeigt, dass die Hypothese, welche Herr Picard (Nouv. Ann. X. 197, F. d. M. XXIII. 1891. 309) seinem Beweise für die Existenz der Integrale der $n$ Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w), \ \ldots, \quad \frac{dw}{dx} = f_n(x, u, v, \ldots, w)$$

(die $f$ reelle Functionen) zu Grunde legt, nämlich dass sich $n$ positive Grössen $A, B, \ldots, L$ derart bestimmen lassen, dass

$$|f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w)| < A|u' - u| + B|v' - v| + \cdots + L|w' - w|,$$

auch für den Beweis hinreicht, dass es nur ein den Gleichungen genügendes System von Functionen mit gegebenen Anfangswerten giebt. Hr.

---

A. A. Masing. Einige Ergänzungen zur Theorie der Integration der Differentialgleichungen mit Hülfe der Methode der grössten und kleinsten Exponenten. Mosk. Math. Samml. XVI. 356-369. (Russisch.)

Um eine Function in eine Potenzreihe zu entwickeln, kann man die Differentialgleichung bilden, welcher diese Function genügt, und dann diese Gleichung mit Hülfe der Methode der grössten und kleinsten Exponenten (F. d. M. XXII. 1890. 103, XXIII. 1891. 313) integriren. Wi.

---

S. E. Sawitsch. Ueber die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit regulären Integralen. St. Petersburg. 1892. (Russisch.)

Die Arbeit ist in vier Capitel geteilt. Das erste Capitel enthält die Darstellung der allgemeinen Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen nach den Arbeiten der Herren Fuchs, Hamburger, Thomé und anderer. Es wird in diesem Capitel auch die Form der Gleichung abgeleitet, die nur reguläre Integrale hat.

Im zweiten Capitel werden die Fälle behandelt, in denen die regulären Integrale keine Logarithmen enthalten, und bei denen das allgemeine Integral eine ganze Function, eine rationale oder eine Wurzel aus einer rationalen Function ist. Alle diese allgemeinen Untersuchungen werden an dem Beispiele der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe erläutert. Hier behandelt der Verfasser mit besonderer Ausführlichkeit die Bestimmung derjenigen Integrale dieser Gleichung, die Logarithmen enthalten.

Das dritte Capitel ist der Frage nach den algebraischen Integralen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung gewidmet. Bei der Bestimmung der endlichen Gruppen der linearen Substitutionen benutzt der Verfasser die Methode des Hrn. Jordan. Die Betrachtung der transformirten Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ vereinfacht die Untersuchung. Die Bestimmung der Grundformen für alle Typen der Gruppen der linearen Substitutionen wird gleichfalls sehr erleichtert durch die Einführung der Doppelpunkte der

linearen Grundsubstitutionen. Mit einer lobenswerten Bestimmtheit wird gezeigt, zu welchen Operationen die Untersuchung der Frage führt, ob eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung algebraische Integrale hat. Für die Gleichung der hypergeometrischen Reihe wird eine vollständige Zusammenstellung der algebraischen Integrale dieser Gleichung gegeben.

Das vierte Capitel vervollständigt die Theorie der algebraischen Integrale, indem es die Untersuchung der Fälle erledigt, in welchen die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe nur algebraische Integrale besitzt. Die Untersuchung ist nach der Schwarz'schen Methode mit Hülfe der Abbildungstheorie geführt.

In dem Buche des Herrn Sawitsch hat die russische mathematische Litteratur eine klar geschriebene Monographie über die Fragen erhalten, für welche sich bisher nur wenige russische Mathematiker interessirt haben. Wi.

---

J. Bendixson. Sur les équations différentielles linéaires homogènes. Stockh. Öfv. 91-105.

J. Bendixson. Sur les équations différentielles linéaires homogènes. Stockh. Akad. Bihang $XVIII_1$. No. 7. 29 S.

J. Bendixson. Sur les équations différentielles régulières. Stockh. Öfv. 279-285.

Eine homogene, lineare Differentialgleichung

$$(1)\qquad p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+p_n(x)y=0,$$

wo

$$p_\nu(x)=a_{\nu 0}+a_{\nu 1}x+a_{\nu 2}x^2+\cdots+a_{\nu q_\nu}x^{q_\nu},$$

wird vom Verf. als „irreductibel" bezeichnet, wenn es keine Differentialgleichung von derselben Form, aber von niedrigerer Ordnung giebt, welche mit der gegebenen eine Lösung gemeinschaftlich hat. Eine engere Definition hatte Hr. Frobenius gegeben, indem er die Abwesenheit einer gemeinsamen Lösung auch inbetreff solcher Gleichungen von niedrigerer Ordnung forderte, deren Coefficienten allgemeine, auch nicht-rationale, eindeutige, monogene Functionen sind. Im ersten Aufsatze wird gezeigt, dass man als not-

wendige und hinreichende Bedingung für die Irreductibilität das identische Verschwinden einer gewissen rationalen Function von $x$ und von den Coefficienten $a_{ik}$ bezeichnen kann. Die hierdurch gewonnene Methode wird durch die Behandlung einer speciellen Gleichung zweiter Ordnung erläutert.

Im zweiten Aufsatze betrachtet der Verf. irreductible Gleichungen von der Form (1), welche eine gemeinschaftliche Lösung besitzen mit einer solchen Gleichung von derselben Form, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ und von einer Grösse $v$ sind, die einer Gleichung

$$(2) \qquad \frac{d^m v}{dx^m} + q_1(x)\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \cdots + q_{m-1}(x)\frac{dv}{dx} + q_m(x)v = 0$$

genügt ($m < n$; $q_1, \ldots, q_m$ rationale Functionen). Solche Gleichungen werden kurz als „reductibel bei Adjunction eines Integrals der Gleichung (2)" bezeichnet. Es wird der Fall näher untersucht, in welchem eine Gleichung (2) von der ersten Ordnung existirt, also eine Gleichung

$$\frac{dv}{dx} = R(x) \,.\, v.$$

Es ergiebt sich, dass in diesem Falle die Gleichung (1) mit einer Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = s(x, v) \,.\, y \qquad [s(x, v) \text{ rationale Function}]$$

eine gemeinschaftliche Lösung haben muss, und dass $v^m = Q(x)$ [$m$ ganze Zahl, $Q$ rationale Function] sein muss. Da also $s(x, v)$ eine algebraische Function von $x$ wird, so ist die gestellte Frage ein Specialfall der folgenden: Unter welchen Bedingungen hat (1) ein Integral von der Form $e^{\int \eta dx}$, wo $\eta$ eine algebraische Function von $x$ ist? Diese allgemeinere Frage wird behandelt. Die algebraische $x\eta$-Gleichung sei in $\eta$ vom Grade $m$. Im allgemeinen muss $m = n$ sein, und es ist dann verhältnismässig leicht, die Frage zu entscheiden und die Gleichung $f(x, \eta) = 0$ zu finden. Aber in speciellen Fällen kann $m > n$ sein. Diese Fälle werden besonders untersucht, wobei es sich von entscheidender Bedeutung erweist, ob $n$ Primzahl ist oder nicht.

Für eine lineare, homogene, irreductible und „reguläre" Differentialgleichung [regulär = mit durchaus regulären Integralen] wird im dritten Aufsatze bewiesen: wenn $y_1 = P_1(x-a)$ die Entwickelung eines Integrals als Potenzreihe von $x-a$ ist, so kann man in der $x$-Ebene solche Konturen $C_1, C_2, \dots, C_n$ angeben, dass, wenn $x$ dieselben beschreibt, $y_1$ successiv in $y_2, y_3, \dots, y_n$ übergeht, wo $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein fundamentales Integralsystem bedeutet. Hieraus wird nachher hergeleitet: wenn der Quotient zweier Integrale der fraglichen Art eine algebraische Function von $x$ ist, so sind alle Integrale algebraisch, wenn die Ordnung ($n$) der Differentialgleichung eine Primzahl ist (für $n=2$ hatte Hr. Schwarz dies schon bewiesen).

Bdn.

---

E. Vessiot. Sur l'intégration des équations différentielles linéaires. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 197-280. (Thèse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 84 S. 4°.)

Die hier auseinandergesetzte Theorie der Integration der linearen homogenen Differentialgleichungen zeigt eine vollkommene Analogie mit der Galois'schen Theorie der Lösung algebraischer Gleichungen. Den Ausgangspunkt bildet das Studium der rationalen Functionen der Integrale eines Fundamentalsystems $x_1, \dots, x_n$ einer linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung $f(x)=0$, sowie ihrer Derivirten $\frac{d^k x_i}{dt^k}$ in Bezug auf die unabhängige Variable $t$, die wir im folgenden kurz mit $R(x)$ bezeichnen wollen, und ihres Verhaltens gegenüber der Gruppe der linearen Transformationen

$$(1)\qquad \bar{x}_i = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

Die bei allen diesen Transformationen invariant bleibenden Functionen spielen hier die Rolle der symmetrischen Functionen in den algebraischen Gleichungen und sind dadurch charakterisirt, dass jede solche sich rational in $t$, den Coefficienten der Differentialgleichung und ihren Derivirten ausdrücken lässt. Die Transformationen der Gruppe (1), welche eine Function $R$ zulässt, bilden eine Untergruppe, „Gruppe der Function $R$". Man erhält sie, indem man aus der angesetzten Identität $R(\bar{x}_i) = R(x_i)$ eine ge-

wisse Anzahl von Relationen zwischen den Constanten $a_{ik}$ herleitet, wodurch diese als algebraische Functionen einer gewissen Anzahl „wesentlicher Parameter" erscheinen. Die so definirte Gruppe $\Gamma$ ist also algebraisch. Ihr entspricht eine Gruppe infinitesimaler Transformationen nach der Theorie des Herrn Lie. Man stellt sie her, indem man identisch

$$\sum_{ik} e_{ik} \left( x_i \frac{\partial R}{\partial x_k} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial R}{\partial \frac{dx_k}{dt}} + \cdots \right) = 0$$

setzt, wodurch sich die $e$ als lineare homogene Functionen einer gewissen Anzahl unter ihnen darstellen. Trägt man diese in den Ausdruck $\sum_{ik} e_{ik} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}$ ein, so sind die Coefficienten der willkürlich gebliebenen $e$ die gesuchten infinitesimalen Transformationen, die eine Gruppe $G$ erzeugen. Hängt die Function $R$ von $s$ wesentlichen Parametern ab, so ist die Anzahl der infinitesimalen Transformationen, die sie zulässt, $n^2 - s$. $R$ selbst genügt einer algebraischen Differentialgleichung $s^{\text{ter}}$ Ordnung mit in $t$ rationalen Coefficienten; diese heisst „die Transformirte" der linearen Differentialgleichung $f(x) = 0$. Eine rationale Function $S$, die alle Transformationen der Gruppe der Function $R$ zulässt, drückt sich rational durch $t$, $R$, die Coefficienten der Gleichung $f(x) = 0$ und deren Derivirte aus. $V = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$, wo die $u$ beliebige rationale Functionen von $t$ sind, heisst „allgemeine Resolvente". Durch $V$ und ihre Derivirten lassen sich sämtliche Integrale $x_1, \ldots, x_n$ rational ausdrücken, und $V$ genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung $(n^2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Ferner gilt das folgende, dem bekannten Galois'schen Satze analoge Theorem: Jeder linearen Differentialgleichung entspricht eine Gruppe $\Gamma$ von folgenden Eigenschaften: 1) Jede Function $R$, welche einen rationalen Ausdruck hat, lässt alle Transformationen der Gruppe zu; 2) jede Function $R$, die gegenüber allen Transformationen der Gruppe invariant ist, hat einen rationalen Ausdruck (hier, wie oben, in dem Sinne, dass der Ausdruck in $t$, den Coefficienten von $f = 0$ und ihren Derivirten rational ist). Die Betrachtung der infinitesimalen Transformationen führt zu dem Satze: Jeder linearen Differential-

gleichung entspricht eine Gruppe $G$ von den Eigenschaften: 1) Jede Function $R$, die einen algebraischen Ausdruck hat, lässt alle Transformationen dieser Gruppe zu. 2) Jede Function $R$, die alle Transformationen der Gruppe zulässt, hat einen algebraischen Ausdruck. Durch Adjunction einer rationalen Function von Integralen kann die Gruppe $\Gamma$ reducirt werden. Die Lösung jeder linearen Differentialgleichung wird so auf die einer Reihe von Hülfsgleichungen zurückgeführt. Diese Methode ergiebt auch die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine lineare Differentialgleichung durch Quadraturen integrirbar ist. Zum Schluss wird die Theorie auf die linearen Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung angewandt. Hr.

---

L. Fuchs. Ueber lineare Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen. Berl. Ber. 1892. 157-176.

In den Berl. Ber. 1888. 1278ff. (F. d. M. XX. 1888. 314) hat der Verf. eine Klasse von linearen homogenen Differentialgleichungen eingeführt, die dadurch charakterisirt sind, dass ihre Substitutionsgruppe von einem in der Differentialgleichung auftretenden Parameter unabhängig ist. Der für sie geltende Satz wird hier zunächst in folgender verallgemeinerter Form ausgesprochen: Es sei

$$(1) \qquad \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + r_1 \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}} + \cdots + r_m z = 0$$

eine Differentialgleichung, in der $r_1, \dots, r_m$ eindeutige Functionen der von einander unabhängigen Variabeln $x, x_1, \dots, x_{\varrho-1}$ und der von diesen algebraisch abhängenden Grössen $y, y_1, \dots, y_{\sigma-1}$ sind. Wenn nun für solche Umläufe von $x$, für die zugleich $y, y_1, \dots, y_{\sigma-1}$ ihre Ausgangswerte wieder erhalten, die zugehörigen Substitutionen der Integrale der Gleichung (1) von $x_1, x_2, \dots, x_{\varrho-1}$ unabhängig sind, so existirt ein Fundamentalsystem von Integralen $z_1, \dots, z_m$, welches das System

$$\frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = A_{\lambda 0} z + A_{\lambda 1} \frac{\partial z}{\partial x} + \cdots + A_{\lambda, m-1} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, \varrho-1)$$

befriedigt, wo $A_{\lambda r}$ eine eindeutige Function von $x, x_1, \dots, x_{\varrho-1}$,

$y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ bedeutet. Hieraus folgt dann weiter, dass $z$ auch als Function von $x_\lambda$ einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung höchstens $m^{\text{ter}}$ Ordnung mit Coefficienten von derselben Beschaffenheit wie $r_1, \ldots, r_m$ genügt. Die Gruppe der Substitutionen des Systems $z_1, \ldots, z_m$ ist also von $x, x_1, \ldots, x_{\varrho-1}$ unabhängig, welche dieser Variabeln auch als allein veränderlich aufgefasst werden mag. Dies führt darauf, ein System linearer homogener partieller Differentialgleichungen für $z$ als Function von $x, x_1, \ldots, x_{\varrho-1}$ zu betrachten, deren Coefficienten dieselbe Beschaffenheit wie $r_1, \ldots, r_m$ haben, unter der Voraussetzung, dass die Zweige der Function $z$ sich sämtlich durch $m$ derselben linear, homogen und mit von $x, x_1, \ldots, x_{\varrho-1}$ unabhängigen Coefficienten darstellen lassen. In Bezug auf jede einzelne der Variabeln $x_\lambda$ genügt dann $z$ einer Differentialgleichung höchstens $m^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_\lambda^m} + r_1^{(\lambda)} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_\lambda^{m-1}} + \cdots + r_m^{(\lambda)} z = 0,$$

deren Coefficienten dieselbe Beschaffenheit wie $r_1, \ldots, r_m$ haben, wodurch die Untersuchung eines solchen Systems auf die von gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen zurückgeführt wird. Insbesondere gilt dies für die Entscheidung der Frage, ob die Lösungen des betrachteten Systems partieller Differentialgleichungen Unbestimmtheitsstellen zulassen. Als Beispiele werden diejenigen beiden Systeme partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt, auf welche nach Herrn Picard (Acta Math. V. 176ff.; Journ. de Math. (4) I. 112ff., F. d. M. XVI. 1884. 385 und XVII. 1885. 492) die Functionen zweier unabhängigen Variabeln führen, die eine Gruppe von Substitutionen

$$\left(x, y;\quad \frac{Ax+A_1y+A_2}{Cx+C_1y+C_2},\quad \frac{Bx+B_1y+B_2}{Cx+C_1y+C_2}\right),$$

bezw.

$$\left(x, y;\quad \frac{ax+b}{cx+d},\quad \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right)$$

zulassen. Das erstere System ist von Herrn Horn (Diss. Berlin, F. d. M. XXII. 1890. 352) für den Fall rationaler Coefficienten darauf hin untersucht worden, unter welchen Umständen ihre In-

tegrale keine Unbestimmtheitsstellen besitzen. Hier werden die erforderlichen Bedingungen unter Benutzung des erwähnten Zusammenhanges mit der besonderen Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen, aus der Untersuchung des Verhaltens der Integrale einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Punkte hergeleitet. Hr.

---

L. Fuchs. Ueber die Relationen, welche die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe derselben verbinden. Berl. Ber. 1892. 1113-1128.

Die vorliegende Notiz nimmt Bezug auf die Arbeit des Verfassers im J. für Math. LXXVI (F. d. M. V. 1873. 172). Die vorgelegte, zur Fuchs'schen Klasse gehörige Differentialgleichung sei

$$[y]_1^{(x)} \equiv A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_n y^{(n)} = 0,$$

worin $A_0, \ldots, A_n$ ganze Functionen von $x$ sind; ihre Adjungirte sei

$$[y]_2^{(x)} \equiv -A_0 y + \frac{d}{dx}(A_1 y) - \cdots \pm \frac{d^n(A_n y)}{dx^n} = 0,$$

so ist, wie Jacobi gezeigt hat:

$$\left[\frac{1}{x-a}\right]_1^{(x)} + \left[\frac{1}{x-a}\right]_2^{(a)} = U$$

eine ganze Function von $x$ und $a$. Es handelt sich nun um die Bestimmung der Ausdrücke:

$$(1) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha\, U \eta_k \mathfrak{z}_l,$$

worin $a_1, a_2, \ldots$ singuläre Punkte der Differentialgleichung $[y]_1^{(x)}$ bezeichnen; $\eta_1, \ldots, \eta_n$ das zum Punkte $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen dieser Gleichung, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ das entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der adjungirten Gleichung ist, und $\mathfrak{z}_l$ aus $\zeta_l$ durch Vertauschung von $x$ mit $\alpha$ hervorgeht. Die Wertbestimmung der Ausdrücke (1) wird in der citirten

Arbeit unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen gegeben, denen die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen genügen sollen. Diese Beschränkungen werden hier aufgehoben durch eine veränderte Schreibweise der genannten Werte, wodurch diese, falls sie nicht verschwinden, nur von den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe der Gleichung $[y]_1^{(x)} = 0$ abhängig erscheinen. Die fraglichen Relationen erhalten dadurch einen invarianten Charakter, indem sie für die ganze Klasse der Differentialgleichungen, zu der die vorgelegte gehört, die gleiche Form beibehalten. Nun kann man aber in der Substitution

$$u = P_0 y + P_1 y' + \cdots + P_{n-1} y^{(n-1)}$$

die rationalen Functionen $P_0, \ldots, P_{n-1}$ stets so wählen, dass die determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung, der $u$ genügt, den gedachten Voraussetzungen entsprechen. Aus den Relationen in der neuen Form ergiebt sich, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Integrale $\eta_1, \ldots, \eta_n$ mit den Grössen

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^{\mathfrak{a}} \eta_k \, dx \quad \text{und} \quad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^{\mathfrak{a}} \zeta_k \, dx$$

für $\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \ldots, n(\tau-1)-1$ ($\tau$ die Anzahl aller singulären Punkte) und den Parametern der Differentialgleichung algebraisch verbunden sind. Die bezüglichen Rechnungen werden für $n = 1$ und $n = 2$ ausgeführt. Hr.

---

## L. Heffter. Bemerkung über die Integrale linearer Differentialgleichungen. J. für Math. CIX. 222-224.

In einer früheren Arbeit (J. für Math. CVI., F. d. M. XXII. 1890. 306) hat der Verf. eine für jede einer Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse genügende, nach Potenzen von $x - a_i$ fortschreitende Reihe gültige Recursionsformel abgeleitet. Durch Zerlegung der dort vorkommenden Grössen $F$ als Functionen von $s$ in Linearfactoren kann man jedes von Logarithmen freie Integral durch denselben Algorithmus darstellen, bei dem nur gewisse eingeführte Parameter geändert werden. Hierdurch werden die Eigenschaften

der Gauss'schen Differentialgleichung auf sämtliche Gleichungen mit nur regulären Integralen ausgedehnt. Die eingeführten Parameter sind im wesentlichen dieselben Grössen, die in der „Normalform“ des Herrn Schafheitlin auftreten (Diss. Halle 1885, F. d. M. XVIII. 1886. 294). Hr.

ARTHUR HIRSCH. Zur Theorie der linearen Differentialgleichung mit rationalem Integral. Diss. Königsberg i. Pr. Hartung'sche Buchdruckerei. 42 S. 4°.

ARTHUR HIRSCH. Zur Theorie der linearen Differentialgleichung mit eindeutigem Integral. Königsberg. Physik.-ökon. Ges. XXXIII. 6 S.

In der ersten Arbeit beschränkt sich der Verfasser auf Differentialgleichungen, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ sind. Die Entscheidung, wann die Differentialgleichung ein allgemeines rationales Integral besitzt, lässt sich leicht auf die Frage nach den Bedingungen reduciren, unter denen die allgemeine Lösung eine ganze rationale Function ist. Der Verf. bringt die Gleichung auf die „Normalform“:

$$Ay^{(r)} - A'y^{(r-1)} + \sum_{k=2}^{k=r} D_k y^{(r-k)} = 0 \quad \left(A' = \frac{dA}{dx}\right),$$

wo $A$, $D_k$ ganze rationale Functionen resp. von den Graden $m$ und $m-k$ sind, und erhält die gesuchten notwendigen und hinreichenden Bedingungen in der Form der $r-1$ Congruenzen:

$$A'(D'_k + D_{k+1}) - (A'' - D_2)D_k \equiv 0 \pmod{A}, \quad (k = 2, 3, \ldots, r).$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass $A(x)$ keinen Doppelfactor besitzt. Wird über den Grad der Functionen $A$, $D_k$ nichts festgesetzt, so ist das Bestehen der obigen Congruenzen erforderlich und hinreichend, damit die allgemeine Lösung eine eindeutige Function ist. Macht man die keine Einschränkung involvirende Annahme, dass die Integrale $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sämtlich vom Grade $n$ sind, so lässt sich die Differentialgleichung nur auf eine Weise durch ein Aggregat von Ueberschiebungen darstellen:

$$(1) \qquad \{A, y\}_r + \sum_{k=2}^{k=r} \{P_k, y\}_{r-k} = 0.$$

Hier ist $A$ die „Jacobi'sche Combinante“ (Hauptdeterminante) der $f$ vom Grade $r(n-r+1)$, und die $P_k$ sind ebenfalls Combinanten der Integralfunctionen vom Grade $r(n-r+1)-2k$. $\{M, N\}_s$ bedeutet die $s^{te}$ Ueberschiebung der Functionen $M$ und $N$.

Die „invariante“ Darstellung (1) ist allgemein gültig, wofern nur den $f$ eine Gradzahl $n$ beigelegt werden kann, die im übrigen ganz willkürlich ist; die $f$ können rational oder transcendent sein. Nennt man die Coefficienten $A, P_2, P_3, \ldots, P_r$ Elementarcombinanten der Functionen $f$, so gilt der Satz: Jede ganze rationale Combinante einer Formenschar lässt sich nach Multiplication mit einer ganzen positiven Potenz der Jacobi'schen Combinante durch ein Aggregat von ganzen rationalen Simultaninvarianten der Elementarcombinanten darstellen, und zwar im allgemeinen nur auf eine Weise. Die explicite Darstellung der Elementarcombinanten durch die Grundformen wird in den Grundzügen gegeben, einige allgemeine Eigenschaften der invarianten Form (1) werden entwickelt; diese wird noch benutzt, um die Kriterien für die Eindeutigkeit des allgemeinen Integrals in invarianter Darstellung zu erhalten. Besonders einfach stellt sich die Beziehung zweier adjungirten Differentialgleichungen dar. Die zu

$$\sum_{k=0}^{k=r} \frac{n!}{(n-r+k)!}\{M_k, y\}_{r-k} = 0$$

adjungirte Differentialgleichung lautet:

$$\sum_{k=0}^{k=r}(-1)^k \frac{\nu!}{(\nu-r+k)!}\{M_k, \eta\}_{r-k} = 0,$$

wo

$$n+\nu = 2r-2-p.$$

Die Ergebnisse der allgemeinen Theorie werden auf die Differentialgleichungen der vier ersten Ordnungen angewandt. Den Beschluss bilden Bemerkungen über die Differentialgleichungen (1) von der Eigenschaft, dass die Coefficienten sich gegenüber den Transformationen einer endlichen Gruppe invariant verhalten.

Die zweite Notiz enthält eine vorläufige Uebersicht der Resultate einer Untersuchung des Verf. über die linearen Differentialgleichungen, deren allgemeine Lösung eine überall eindeutige Func-

tion ist. Sie besteht aus zwei Abschnitten. Der Inhalt des ersten ist in der vorstehend besprochenen Dissertation näher ausgeführt. Im zweiten Abschnitt werden Differentialgleichungen in Betracht gezogen, deren Coefficienten dem Bereich der elliptischen Functionen, der elliptischen Modulfunctionen und der Schwarz'schen Functionen angehören. Hr.

G. Pick. Ueber adjungirte lineare Differentialgleichungen. Wien. Ber. CI. 893-896.

Die in den vorstehend besprochenen Arbeiten des Herrn A. Hirsch enthaltene, merkwürdig einfache Darstellung der Beziehung zwischen zwei adjungirten Differentialgleichungen, die sich ergiebt, wenn man für die linearen Differentialgleichungen die dort bezeichnete „invariante Form“ einführt, wird auch in vorliegender Note abgeleitet. Zur Feststellung der Priorität bemerken wir, dass die Note des Herrn Hirsch am 3. März der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft in Königsberg, die des Herrn Pick am 17. Juni der Wiener Akademie vorgelegt ist. Hr.

P. A. Starkow. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Odessa Ges. XIV. 191-200. (Russisch.)

Die Abhandlung bildet eine Ergänzung zu den grösseren Arbeiten des Verfassers. Es handelt sich jetzt um die Form der Darstellung der particulären Integrale der linearen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$P_0\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_ny=0$$

durch die particulären Integrale der Gleichungen:

$$P_0\frac{d^{n-1}\theta_m}{dx^{n-1}}+P_1\frac{d^{n-2}\theta_m}{dx^{n-2}}+\cdots+P_{n-2}\frac{d\theta_m}{dx}+P_{n-1}\theta_m=P_n\int\theta_{m-1}dx,$$

wo der zweite Teil sich nach einem einfachen Gesetze ändert.

Wi.

H. von Koch. Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. Acta Math. XVI. 217-295.

In den Acta Math. XV. 53ff. (F. d. M. XXIII. 1891. 313) ist vom Verf. von den unendlichen Determinanten eine wichtige Anwendung auf die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen mit Coefficienten, die innerhalb eines gewissen Kreisringes eindeutig sind, gemacht worden. Insbesondere hat er die Darstellung eines Fundamentalsystems von Integralen, gültig innerhalb des gedachten Bereichs, in der von Herrn Fuchs vorgezeichneten analytischen Form explicite mit Hülfe der unendlichen Determinanten gegeben. Allein die Lösung war unter gewissen Einschränkungen erfolgt, die u. a. bewirkten, dass Ausdrücke der Integrale keine Logarithmen enthielten. In der vorliegenden Abhandlung wird das Problem in der ganzen Allgemeinheit gelöst. Hierzu wird im ersten Abschnitte eine Reihe von später zu benutzenden Eigenschaften der unendlichen Determinanten abgeleitet und ihre Anwendung zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen gezeigt, bei denen die Anzahl der Unbekannten wie die der Gleichungen unendlich gross ist. Im zweiten Abschnitt, welcher der Theorie der linearen Differentialgleichungen gewidmet ist, werden die Ausdrücke für die einzelnen Gruppen, in welche im allgemeinen ein Fundamentalsystem von Integralen zerfällt, explicite hergestellt und die Invarianten der Differentialgleichung, die in den bisherigen Darstellungen gewisse Parameter enthielten, von denen die Invarianten selbst unabhängig sind, in einer Form dargestellt, die von jedem willkürlichen Element frei ist. Als Beispiel für das allgemeine Verfahren wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{\alpha}{x^3}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x}\right)y=0$$

behandelt. Hr.

E. Borel. Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 63-90.

Die Beziehung zwischen einer linearen homogenen Differentialgleichung und ihrer adjungirten wird geometrisch gedeutet. Einer

Gleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung kann man eine Curve in einem Raume von $n-1$ Dimensionen entsprechen lassen, indem man $n$ verschiedene Integrale der Gleichung als homogene Coordinaten eines Punktes der Curve auffasst. Die entsprechende Curve der adjungirten Gleichung ist alsdann der der ersteren correlativ. Von diesem Gesichtspunkt aus untersucht der Verf. die Gleichungen, die mit ihrer adjungirten äquivalent sind, und gewisse mit ihnen verknüpfte Systeme von Differentialgleichungen. Hr.

---

S. Pincherle. Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti. Bologna Mem. (5) II. 523-546.

Auf die lineare reguläre Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten:

$$(1) \qquad P_0 \frac{d^p\varphi}{dt^p} + P_1 \frac{d^{p-1}\varphi}{dt^{p-1}} + \cdots + P_p\varphi = 0,$$

wo $P_0 = (t-a_1)(t-a_2)\dots(t-a_r)$ ist, wird die functionale Transformation

$$\eta(x) = \int_x^{a_p} \varphi(t)(t-x)^\varrho dt$$

angewandt, unter der Voraussetzung, dass der reelle Teil der Wurzeln der determinirenden Gleichung für jeden Punkt $a_h$ und ebenso der reelle Teil von $\varrho$ grösser als $-1$ ist. $\eta(x)$ genügt einer ebenfalls regulären linearen Differentialgleichung der $r^{\text{ten}}$ Ordnung mit in $x$ rationalen Coefficienten und denselben singulären Punkten wie (1). Der nämlichen transformirten Differentialgleichung genügt das über eine geschlossene Linie $\lambda$ in der $t$-Ebene erstreckte Integral $\int_\lambda \varphi(t)(t-x)^\varrho dt$, wenn die Linie $\lambda$ so beschaffen ist, dass das particuläre Integral $\varphi(t)$ beim Durchlaufen der Linie zu seinem anfänglichen Werte zurückkehrt. Trifft dies bei jedem particulären Integral von (1) zu, so bildet die Linie $\lambda$ einen „Cyklus bezüglich der Gleichung (1)". Die transformirte Gleichung wird explicite aufgestellt. Sie geht, wenn die Gleichung (1) von der ersten Ord-

nung ist, in die verallgemeinerte hypergeometrische Gleichung des Herrn Pochhammer über. Setzt man

$$y(x;\varrho)=\int_\lambda \varphi(t)(t-x)^\varrho dt,$$

so besteht zwischen den Functionen

$$y(x;\varrho),\quad y(x;\varrho-1),\quad \ldots,\quad y(x;\varrho-r)$$

eine lineare Gleichung mit in $x$ rationalen Coefficienten. Im letzten Abschnitt wird die allgemeinere functionale Transformation

$$J(x)=\int_\lambda \varphi(t)G^\varrho(t,x)dt$$

betrachtet, wo $G$ eine ganze rationale Function von $x$ und $t$ vom Grade $n$ in $t$ bedeutet und $\lambda$ wieder ein Cyklus bezüglich der Gleichung (1) ist. Die transformirte Gleichung ist ebenfalls regulär mit in $x$ rationalen Coefficienten und von der $(np+r)^{\text{ten}}$ Ordnung; ihre singulären Punkte sind die Wurzeln der Gleichungen:

$$G(\infty,z)=0,\quad G(a_i,x)=0\qquad (i=1,2,\ldots,r)$$ Hr.

S. Pincherle. Sopra una trasformazione nelle equazioni differenziali lineari. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 633-636.

Die angewandte Transformation ist

$$\eta(x)=\int_\lambda \varphi(t)(t-x)^\alpha dt,$$

welche das Integral $\varphi(t)$ einer linearen Differentialgleichung $p^{\text{ter}}$ Ordnung mit $r$ singulären Punkten in das Integral $\eta(x)$ einer Gleichung $r^{\text{ter}}$ Ordnung mit den nämlichen singulären Punkten überführt. Das Integral in der Transformationsformel ist über eine beliebige offene oder geschlossene Linie $\lambda$ ausgedehnt, längs deren $\varphi(t)$ und ihre Derivirten $p^{\text{ter}}$ Ordnung endlich und stetig sind, und an deren beiden Enden, wenn $\lambda$ offen ist, die Function und ihre Derivirten verschwinden, während bei geschlossenem $\lambda$ vorausgesetzt wird, dass die Function und ihre Derivirten bei dem Umlaufe von $t$ keine Wertänderung erfahren. $\alpha$ bedeutet jede beliebige Zahl, mit Ausschluss einer ganzen negativen Zahl. Für $p=1$ ergiebt sich die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe des Herrn Pochhammer

als die transformirte einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung. Hr.

---

J. Cels. Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. C. R. CXV. 1057-1059.

Mit Bezugnahme auf die vom Verf. eingeführte Bezeichnung der „Adjungirten der ersten Zeile“ einer linearen Differentialgleichung (F. d. M. XXII. 1890. 309 und XXIII. 1891. 321) wird folgender Satz bewiesen: Die Gleichungen, welche ihrer Adjungirten der ersten Zeile äquivalent sind, sind vom geraden Grade, und wenn $f(z) = 0$ eine solche Gleichung ist, dann ist $z'f(z)dx$ ein vollständiges Differential. Diese Eigenschaft, die für die fragliche Aequivalenz charakteristisch ist, gestattet, die Ordnung der Gleichungen zu erniedrigen. Hr.

---

A. Gutzmer. Bemerkungen über die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen. Prag. Ber. 1892. 54-59.

Der Verfasser untersucht die Iterationsresultate linearer homogener Differentialausdrücke; insbesondere giebt er die Integrale derjenigen linearen homogenen Differentialgleichungen $m^{\text{ter}}$ Ordnung an, welche durch Iteration aus einer ebensolchen Differentialgleichung erster Ordnung hervorgegangen sind. Dabei ergiebt sich das interessante Resultat, dass jede lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung als Iteration einer solchen erster Ordnung dargestellt werden kann; und zwar gilt diese Eigenschaft nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Schliesslich stellt der Verfasser zwischen den Integralen der durch Iteration einer Differentialgleichung und ihrer Adjungirten entstandenen Differentialgleichungen Relationen auf, welche den von den Herren Frobenius und Thomé gefundenen analog sind. Wbg.

L. Autonne. Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. III. J. de l'Éc. Pol. LXII. 47-180. Gleichbetitelte Abhandlung in: Ann. Univ. Lyon $III_1$.

Die beiden Abhandlungen sind Fortsetzungen derjenigen, über welche in F. d. M. XXIII. 1891. 328 referirt ist (man sehe dort die Bezeichnungen nach). In derselben war schon von den unendlich vielen Arten, auf welche eine Differentialgleichung als Hauptcoincidenz eines Connexes aufgefasst werden kann, eine als „réglementaire" ausgezeichnet worden. Die erste der neuen Abhandlungen stellt nun die beiden Probleme: wie kann man an der réglementaire erkennen, ob die zugehörige Fläche $\mathfrak{F}$ zu den früher behandelten gehört? wie kann man an der Differentialgleichung erkennen, ob die réglementaire diese Eigenschaften hat?

Sei $P \equiv P_i u_i \equiv \Sigma P_i (x dx)_i \equiv \Sigma A_i dx_i = 0$ die auf Connexform gebrachte Differentialgleichung, so heissen kritisch diejenigen Punkte, in welchen die $A_i$ gleichzeitig Null sind, also $P$ identisch 0 ist (S. 51), unabhängig von den Werten der $dx_i$. Ist auch noch $dP \equiv 0$, unabhängig von den $dx_i$ und $d^2x_i$, so heisst der betreffende Punkt dikritisch u. s. f.; hyperkritisch heisst er, wenn in ihm die $A_i$ gleichzeitig von höherer Ordnung 0 sind. (Diese Terminologie der ersten Abhandlung wird in der zweiten modificirt; es stellt sich heraus, dass jeder $n$-fach kritische Punkt $(n-2)$-facher Nullpunkt der $A_i$ ist, und die Bezeichnung $n$-fach „hyperkritisch" wird auf den Fall beschränkt, dass er $(n-1)$-facher Nullpunkt ist. Jeder monokritische Punkt ist in diesem Sinne monohyperkritisch (S. 17, 18). Es wird dann noch (S. 19) eine Zahl $l$ als Kategorie des kritischen Punktes definirt).

Nachdem über diese kritischen Punkte und ihre Beziehungen zur Abbildung der Ebene auf die Fläche $\mathfrak{F}$ eine Reihe von Sätzen abgeleitet ist, wird (S. 64) der Fall untersucht, dass $\mathfrak{F}$ eine Steiner'sche Fläche oder eine Ausartung derselben ist; es ergiebt sich die Reduction der vorgelegten Differentialgleichung auf eine Riccati'sche. Dann wird (S. 80) der Fall einer kubischen Fläche $\mathfrak{F}$ mit einer Curve von Nodalpunkten wieder aufgenommen, und zwar zunächst solche Unterfälle, in welchen die Dimension der Differentialgleichung in den $x$ sich erniedrigt; dann (S. 115) solche, in welchen das nicht eintritt. (S. 118, Z. 17 ist tricritique zu lesen.) Endlich werden S. 124ff., 152ff. zwei schon in der früheren Abhandlung besprochene specielle Flächen dritter Ordnung eingehend dis-

cutirt und die zugehörigen Differentialgleichungen explicite aufgestellt. Es ergiebt sich dabei, dass für die betreffenden Klassen von Differentialgleichungen Natur und Lage ihrer singulären Punkte charakteristisch sind.

Die zweite Abhandlung giebt nach den bereits besprochenen Definitionen zunächst einige Sätze über die aus der Existenz kritischer Punkte hoher Ordnung entspringenden Reductionsmöglichkeiten (S. 28) und über die Vielfachheit, mit welcher die polykritischen und hyperkritischen Punkte bei Anwendung der Sätze von Darboux (Darboux Bull. 1878) zu zählen sind (S. 39). Dann folgen Untersuchungen über das Verhalten der kritischen Punkte gegenüber Cremonatransformationen (S. 44) und als Anwendung derselben solche Gleichungen, die durch dergleichen Transformationen sich auf die Dimension 1 oder 2 reduciren lassen (S. 57). Endlich folgt (S. 60) eine ausführliche Untersuchung der Frage, ob jede Gleichung der Dimension 4 mit sechs dikritischen Punkten zu einer kubischen Fläche $\mathfrak{F}$ in der mehrerwähnten Weise in Beziehung gesetzt werden kann; es stellt sich heraus, dass das in der That im allgemeinen der Fall ist, und dass nur bei sehr specieller Lage der sechs Punkte (z. B. zu je dreien auf zwei Geraden) noch supplementare Bedingungen erfüllt sein müssen.

Bdt.

L. Autonne. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. C. R. CXIV. 407-409.

Die Bestimmung eines Maximums für den Grad $n$ eines algebraischen Integrals einer gegebenen algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung reducirt sich nach der geometrischen Bezeichnungsweise des Verfassers (Journ. de l'Ec. Pol. LXI. 35-122, F. d. M. XXIII. 1891. 328) auf die Frage, ein Maximum für den Grad $n$ einer unzerlegbaren algebraischen Curve $G$ zu finden, die auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ vom Grade $N$ gelegen ist. $\mathfrak{F}$ ist eine bestimmte Fläche, entsprechend dem durch die Differentialgleichung definirten Connexe; $G$ eine Curve, deren Tangenten einem bestimmten linearen Complexe angehören. Die Frage wird für den Fall, dass $G$ keine vielfachen Punkte hat, dahin gelöst, dass $n$ nicht

die grösste ganze Zahl überschreiten kann, die in

$$\frac{(N+1)(N+3)}{3} - \frac{2}{N+2}$$

enthalten ist. Die vom Verf. gegebenen Formeln gestatten für einen gegebenen Grad $n$ die Construction der Curve $G$. Es wird noch gezeigt, wie die Curven $G$ auf rein geometrischem Wege erhalten werden können. Hr.

L. AUTONNE. Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. C. R. CXV. 587-589.

Fortsetzung und Verallgemeinerung der Untersuchungen, die der Verf. betreffs der algebraischen Integration der Gleichung

$$H \equiv F(x, y, y') = 0$$

in früheren Arbeiten angestellt hat (F. d. M. XXIII. 1891. 328 und die oben vorangehenden Referate), wobei die Integrale durch Curven auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ dargestellt werden, die dem durch $H$ bestimmten Connexe entspricht. Hr.

P. PAINLEVÉ. Sur les intégrales des équations différentielles du premier ordre possédant un nombre limité de valeurs. C. R. CXIV. 107-109.

P. PAINLEVÉ. Sur les intégrales du premier ordre qui n'admettent qu'un nombre fini de valeurs. C. R. CXIV. 280-283.

Wenn eine beliebige, in $x, y, y'$ algebraische Gleichung gegeben ist, so kann man stets erkennen, ob ihr Integral eine transcendente Function ist, die eine endliche (nicht gegebene) Anzahl von Werten in der Umgebung beweglicher singulärer Punkte annimmt. Sie lässt sich dann stets auf Transcendenten zurückführen, die durch die Riccati'sche Gleichung oder durch Quadraturen definirt sind. Dies gilt auch noch für den Fall, wo die Coefficienten der gegebenen Gleichung in $y'$ algebraisch von ein und derselben transcendenten Function abhängen. Die angewandte Methode führt bei algebraischen

Integralen nicht zur allgemeinen Lösung des Problems, wohl aber zu wichtigen Aufschlüssen über die mögliche Form der Integrale. Hr.

---

P. Painlevé. Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. (Suite et fin.) Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 9-30, 101-144, 283-308.

Anwendung der in den vorhergehenden Abhandlungen des Verfassers (Ann. de l'Éc. Norm. (3) VIII, F. d. M. XXIII. 1891. 317) dargelegten Methoden auf die Gleichungen von der Form

$$y' = R[y(x)],$$

wo $R$ eine rationale Function von $y$ bezeichnet. Hr.

---

R. Liouville. Sur une équation différentielle du premier ordre. J. de l'Éc. Pol. LXII. 181-186.

Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + (m_1x^3 + 3m_2x^2 + 3m_3x + m_4)y^3 + 3(n_1x + n_2)y^2 = 0$$

ist, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, integrirbar, wenn die Relationen bestehen:

$$m_2n_1 - m_1n_2 = 0, \quad n_1^2(m_4n_1 - 3m_3n_2) + 2m_1n_2^3 = 0.$$

Wenn die Gleichung

$$m_1 - h(2h-3)n_1^2 = 0$$

rationale Werte für $h$ liefert, so wird die Integration durch hyperelliptische oder elliptische Functionen bewerkstelligt. Hr.

---

A. Guldberg. Om Singulariteter og deres Bestemmelse ved Differentialligninger af 1ste Orden. Nyt Tidss. III B. 86-91.

Ueber die Bestimmung der Singularitäten der Integrale von Differentialgleichungen erster Ordnung. V.

---

A. J. Stodółkiewicz. Ueber eine Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung. Prace mat.-fiz. III. 52-54. (Polnisch.)

Integration der Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=X(ay^2+by+c)+X_1,$$

$X$ und $X_1$ sind Functionen von $x$; $a$, $b$, $c$ Constanten. Dn.

---

W. Kapteyn. Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation différentielle $\left(\frac{du}{dz}\right)^2=G^2(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)$. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 35-62.

Die Integrationsmethode besteht darin, unmittelbar die Reihe

$$u=f(z)=\Sigma\frac{A_r}{z-a_r}$$

anzusetzen, so dass $u$ die Entwickelung zulässt:

$$u=\frac{A_r}{z-a_r}+R_r(z)=\frac{A_r}{z-a_r}+R_r(a_r)+R'_r(a_r)(z-a_r)+\cdots.$$

Die Substitution der Entwickelungen von $u$, $u^2$, $u^3$, $u^4$, $\left(\frac{du}{dz}\right)^2$ in die Differentialgleichung und die Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von $z-a_r$ ergiebt ein Gleichungssystem, aus dem die für jeden Pol $a_r$ und für eine beliebige ganze Zahl $n$ gültigen Beziehungen folgen:

$$A_r^2=\text{const.},\quad R_r^{(2n)}(a_r)=\text{const.}\quad \text{und}\quad A_rR_r^{(2n+1)}(a_r)=\text{const.}$$

Da vermöge der ersten Relation $A_r=+A$ und $A_r=-A$ sein kann, so sind hierdurch zwei Arten möglicher Pole gegeben, die durch $a_r$ und $b_r$ unterschieden werden, so dass

$$u=f(z)=\Sigma\left(\frac{A}{z-a_r}-\frac{A}{z-b_r}\right).$$

Die beiden andern der obigen Beziehungen führen leicht zu der Folgerung, dass $f(z_1)=f(z_2)$, wenn

$$z_1-a_r=z_2-a_{r+1},\quad \text{und ebenso wenn}\quad z_1-b_r=z_2-b_{r+1}$$

ist. Daraus schliesst man, dass

$$a_{r+1}-a_r=\omega\quad \text{und}\quad b_{r+1}-b_r=\omega'$$

zwei Perioden der Function $u = f(z)$ sind. Im Falle dass $a_{r+1} - a_r$ und $b_{r+1} - b_r$ ein reelles Verhältnis haben, wird $f(z)$ eine einfach periodische Function. Im andern Falle erhält man als Ausdruck für $u$ eine Doppelreihe von der Form:

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{A}{z - x - m\omega - n\omega'} - \frac{A}{z - y - m\omega - n\omega'} \right),$$

wo $a_r = x$, $b_r = y$ gesetzt ist; oder:

$$u = A \frac{\pi}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( \cot \frac{\pi}{\omega}(z - x - n\omega') - \cot \frac{\pi}{\omega}(z - y - n\omega') \right).$$

Durch Einführung der Function

$$Z_1(z) = \frac{\pi}{\omega} \sum_{-\infty}^{+\infty} \cot \frac{\pi}{\omega}(z - n\omega') = \frac{\pi}{\omega} \cot \frac{\pi z}{\omega}$$

$$+ \frac{4\pi}{\omega} \sin \frac{2\pi z}{\omega} \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - 2q^{2n} \cos \frac{2\pi z}{\omega} + q^{4n}}$$

$$(q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}})$$

erhält man

$$u = f(z) = A(Z_1(z - x) - Z_1(z - y)).$$

Zur Bestimmung der Unbekannten $x$, $y$, $A$, $\omega$, $\omega'$ durch die Coefficienten der Differentialgleichung werden zwei Wege eingeschlagen. Man erhält $A = 1/G$, und wenn man

$$\frac{1}{G} \int_0^\alpha \frac{du}{\sqrt{N(u)}} = A_1, \quad \frac{1}{G} \int_0^\beta \frac{du}{\sqrt{N(u)}} = A_2 \text{ u. s. f.}$$

$$[N(u) = (u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)(u - \delta)]$$

setzt, so wird $\omega = 2A_2 - 2A_1$, $\omega' = 2A_3 - 2A_1$; die Pole $x$ und $y$ bestimmen sich durch die Formeln:

$$x + y = 2A_1, \quad Z_1(x) = Z_1(2A_1 - x),$$

wobei die Anfangsbedingung $u = 0$ für $z = 0$ angenommen ist. In gleicher Weise wird die Differentialgleichung

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$$

behandelt. Hr.

L. Schlesinger. Ueber die bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretenden Primformen.
J. für Math. CX. 130-157.

Unter den Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten nehmen diejenigen, deren Gruppe discontinuirlich ist, eine ausgezeichnete Stellung ein. Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich, wie der Verf. nachweist, die Beziehung zwischen der unabhängigen Variable $\xi$ und dem Quotienten der Integrale $\mathfrak{y}_2:\mathfrak{y}_1=\eta$, falls die Gruppe discontinuirlich ist, stets durch eine oder mehrere eindeutige Gleichungen zwischen $\eta$ und $\xi$ allein darstellen, während diese Beziehung im Falle einer continuirlichen Gruppe nur durch zwei eindeutige Gleichungen, die noch eine dritte Variable $t$ enthalten, darstellbar ist. Die Analogie, die hierin die erstere Klasse der Differentialgleichungen mit den algebraisch integrirbaren aufweist, wird noch durch den Umstand verstärkt, dass die Theorie der Primformen, die Herr Fuchs seinen Untersuchungen über die Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit lauter algebraischen Integralen zu Grunde legt, sich fast vollständig auf die mit discontinuirlicher Gruppe übertragen lässt. Für die Einführung der Primformen beschränkt sich der Verfasser im Vorliegenden auf Differentialgleichungen, deren Gruppe vom Geschlecht Null und von der Beschaffenheit ist, dass die zur Gruppe gehörigen Fuchs'schen oder Klein'schen Functionen nicht in der ganzen Ebene, sondern immer nur in beschränkten Bereichen existiren. Dann lassen sich alle diese Functionen durch eine einzige $x=f(\eta)$ rational ausdrücken, und es ist $x$ eine eindeutige Function von $\xi$. Durch Multiplication einer $\Theta$-Reihe mit einer Potenz von $\mathfrak{y}_1$ kann man nun unendlich viele aus $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ gebildete (transcendente) homogene Functionen von endlichem Grade $m$ finden, die gleich eindeutigen Functionen von $\xi$ sind und, mit $\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-\frac{m}{2}}$ multiplicirt, in eine rationale Function von $x$ übergehen. Allgemein wird eine homogene Function $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$ vom Grade $r$ ($r$ eine rationale Zahl), die durch Multiplication mit $\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-\frac{r}{2}}$ in die Wurzel aus einer

rationalen Function von $x$ übergeht, eine „invariante eindeutige Form“ genannt, und insbesondere eine „ganze Form“, wenn $\mathfrak{y}_1^{-r}\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = H(\eta)$ für kein $\eta$ in dem Bereich, innerhalb dessen die Function $x = f(\eta)$ existirt, unendlich wird. Jede invariante eindeutige Form ist dann als Quotient zweier ganzen Formen darstellbar. Eine Uebersicht über die Mannigfaltigkeit dieser Formen gewinnt man am besten durch Einführung der Primformen. Eine solche wird definirt als eine ganze invariante Form von $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, für die das zugehörige $H(\eta)$ nur an einer Stelle $\eta$ und an den aus ihr durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehenden verschwindet, und zwar an jeder dieser Stellen von der ersten Ordnung. Durch Angabe der Nullstelle innerhalb des Fundamentalpolygons ist eine Primform, abgesehen von einem constanten Factor, vollkommen bestimmt. Der höchste Grad der Primform ist eine Zahl $\nu$, welche der Verf. den zur Differentialgleichung gehörigen Grad nennt und in folgender Weise bestimmt. Den Eckpunkten $\eta = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ des Fundamentalpolygons mögen die Werte $x = a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$ entsprechen, dann gelten unter der Voraussetzung, dass die Gruppe lauter elliptische Substitutionen enthalte, die Entwickelungen:

$$x - a_k = \varepsilon_1(\eta - \alpha_k)^{\beta_k} + \varepsilon_2(\eta - \alpha_k)^{\beta_k+1} + \cdots;$$

$$\frac{1}{x} = \varepsilon_1(\eta - \alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}} + \cdots,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ positive ganze Zahlen sind. Mittels dieser wird der Grad $\nu$ durch die Formel gegeben:

$$\sum_{k=1}^{k=n+1}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\beta_k) - 1 = -\frac{1}{\nu}.$$

Jede ganze invariante Form ist als Product von Primformen darstellbar. Der Grad irgend einer Primform ist stets ein aliquoter Teil von $\nu$. Zwischen je drei Primformen $\nu^{\text{ten}}$ (des höchsten) Grades, deren es unzählige giebt, besteht eine lineare homogene Beziehung mit constanten Coefficienten. Diese, sowie andere hier nicht anzuführende Eigenschaften lassen die genaue Analogie mit den Fuchs'schen Primformen für die algebraisch integrirbaren Differential-

gleichungen erkennen. Der Ausdruck der Primformen in $\xi$ lautet:

$$\Phi(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-\frac{\nu}{2}} (ax+b) \prod_{k=1}^{k=n} (x-a_k)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\beta_k}\right)}$$

und stellt im allgemeinen die für $x = -\frac{b}{a}$ verschwindende Primform $\nu^{\text{ten}}$ Grades, dagegen, wenn $-\frac{b}{a} = a_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, die $\beta_k^{\text{te}}$ Potenz der zu $x = a_k$ gehörigen, und für $a = 0$ die $\beta_{n+1}^{\text{te}}$ Potenz der zu $x = \infty$ gehörigen Primform dar. In dem Falle, dass die Gruppe noch parabolische Substitutionen enthält, treten Modificationen ein, die im letzten Abschnitt angegeben werden.

Hr.

---

L. Schlesinger. Sur les formes primaires des équations différentielles linéaires du second ordre. C. R. CXV. 32-34.

Auszug aus der vorstehend besprochenen Arbeit. Hr.

---

L. Schlesinger. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche die Umkehrungsfunction von endlicher Vieldeutigkeit ist. J. für Math. CX. 265-289.

In der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2\mathfrak{y}}{d\xi^2} = -\frac{\varphi(\xi)}{\prod_{k=1}^{k=r}(\xi-b_k)^2}\,\mathfrak{y} = Q(\xi)\mathfrak{y},$$

in welcher $\varphi(\xi)$ eine ganze rationale Function von höchstens $(r-2)^{\text{tem}}$ Grade bedeutet, soll, wenn der Integralcoefficient $\mathfrak{y}_2 : \mathfrak{y}_1$ mit $\eta$ bezeichnet wird, $\xi$ einer Gleichung der Form

$$(2) \qquad \xi^p + A_1(\eta)\xi^{p-1} + \cdots + A_p(\eta) = 0$$

genügen, wo $p$ eine positive ganze Zahl und $A_1(\eta), \dots, A_p(\eta)$ eindeutige Functionen von $\eta$ sind. Es ergiebt sich, dass die Gruppe $G$ der Gleichung (1) discontinuirlich und vom Geschlechte Null sein

muss. Setzt man, mit $\xi_1, \ldots, \xi_p$ die verschiedenen Wurzeln von (2) bezeichnend:

$$x = \prod_{k=1}^{k=p} (t - \xi_k) = \psi(\eta),$$

so ist jede zu $G$ gehörige Fuchs'sche oder Klein'sche Function rational durch $x$ darstellbar, und es ist $x$ eine rationale Function von $\xi$ gleich $g(\xi):h(\xi)$, wo $g$ und $h$ vom $p^{\text{ten}}$ Grade sind. Jede aus den Elementen $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ gebildete „invariante eindeutige Form" (s. vorstehendes Referat) ist die Wurzel aus einer rationalen Function von $\xi$, und daraus folgt, dass die Wurzeln der zu den singulären Punkten von (1) gehörigen determinirenden Gleichungen rationale Zahlen sind. Der weiteren Betrachtung liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Gruppe $G$ eine Fuchs'sche und der Existenzbereich $L$ der Functionen $\xi$ und $x$ von $\eta$ ein einfach zusammenhängender sei, in dessen Innerem sich keine wesentlich singuläre Stelle der Gruppe befindet. Es seien nun in der Differentialgleichung in $x$

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = P(x)y,$$

der $y_1 = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^{\frac{1}{2}}$, $y_2 = y_1\eta$ genügen, $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} = \infty$ die singulären Punkte und $\frac{1}{\beta_k}$ die Differenz der Wurzeln der zu $x = a_k$ gehörigen determinirenden Gleichung, während $\delta_k$ die Differenz der Wurzeln der zu $\xi = b_k$ in (1) gehörigen determinirenden Gleichung ist, so gilt folgender Satz: Bestimmt man $\nu$ und $N$ durch die Relationen

$$-\frac{2}{\nu} = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(1 - \frac{1}{\beta_k}\right) - 2, \qquad -\frac{2}{N} = \sum_{k=1}^{k=r+1} (1 - \delta_k) - 2,$$

so muss $N = \nu : p$ sein. Ferner gilt folgende Umkehrung des oben angeführten Satzes. Wenn eine aus den Elementen $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ eines Fundamentalsystems von (1) gebildete invariante eindeutige Form die Wurzel aus einer rationalen Function von $\xi$ ist, so ist $\xi$ als Function von $\eta$ von endlicher Vieldeutigkeit. Wenn die Differentialgleichung (3) bekannt ist, so lässt sich stets durch einen endlichen Process entscheiden, ob $\xi$ als Function von $\eta$ von endlicher

Vieldeutigkeit ist. Aber auch ohne Kenntnis der Differentialgleichung (3) lässt sich stets eine obere Grenze für die endlich bleibenden $\beta_k$ angeben. Man erhält auf diese Weise ein endliches Schema von wesentlich verschiedenen Gruppentypen, unter denen sich notwendig einer finden muss, der mit der Gruppe der gegebenen Differentialgleichung (1) holoedrisch-isomorph ist, wenn $\xi$ als Function von $\eta$ von endlicher Vieldeutigkeit sein soll. Ein jeder dieser Typen wird durch eine Gruppe $\Gamma$ gegeben, die noch von einer gewissen Anzahl willkürlicher Constanten abhängt. Es handelt sich dann für diese Gruppe um die Herstellung einer allgemeinen Primform $\nu^{\text{ten}}$ Grades (s. vorst. Referat) $\varphi(u_1, u_2)$, in der für $u_1, u_2$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer beliebigen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit in $\xi$ rationalen Coefficienten $\frac{d^2u}{d\xi^2} = R(\xi)u$ zu setzen und die Natur der Abhängigkeit des Ausdruckes $\varphi(u_1, u_2)$ von $\xi$ zu untersuchen ist. Es muss hier entschieden werden, ob sich die willkürlichen Constanten in $\varphi$ so wählen lassen, dass, wenn man $u_1 = \mathfrak{y}_1$, $u_2 = \mathfrak{y}_2$, $R(\xi) = Q(\xi)$ setzt,

$$\varphi(u_1, u_2) = f(\xi)\prod_{k=1}^{k=r}(\xi - b_k)^{Np(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta_k)}$$

wird, wo $p = \frac{N}{\nu}$ und $f(\xi)$ eine ganze rationale Function $p^{\text{ten}}$ Grades von $\xi$ wird. Mit der Herstellung der erwähnten allgemeinen Primform beschäftigen sich die letzten beiden Abschnitte der Arbeit. Bei dieser Gelegenheit giebt der Verfasser eine Verallgemeinerung der von ihm für den besonderen Fall Fuchs'scher Functionen mit symmetrischer Gruppe durchgeführten Erzeugungsweise dieser Functionen durch unendlich oft wiederholte Transformation (J. für Math. CV. 181-232, F. d. M. XXI. 1889. 438). Hr.

G. Pick. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Prag. Math. Ges. 1892. 69-77.

Im Anschluss an eine in den Wien. Ber. 1891 veröffentlichte Note des Verf. (F. d. M. XXIII. 1891. 892), die sich mit der Abbildung einer Halbebene auf ein ihr unendlich benachbartes Kreis-

polygon beschäftigte, wird hier das allgemeinere Problem behandelt, eine Vollebene mit beliebig gelegenen Verzweigungspunkten auf ein ihr unendlich benachbartes Kreispolygon abzubilden. Ist $\xi = x + \varepsilon\eta$, wo $\varepsilon$ eine unendlich kleine Constante bedeutet, die die Abbildung vermittelnde Function, so erhält man für $\eta$ die Gleichung

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varrho_k}{(x-a_k)^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\sigma_k}{x-a_k},$$

deren Integration

$$\eta = \alpha + \beta x + \gamma x^2 - \sum_{k=1}^{k=n} \varrho_k (x-a_k)\lg(x-a_k) - \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \sigma_k (x-a_k)^2 \lg(x-a_k)$$

ergiebt. ($\alpha, \beta, \gamma$ Integrationsconstanten). Die $x$-Ebene wird in der Weise durch Querschnitte zerschnitten, dass je ein solcher von dem Verzweigungspunkte $a_n$ zu jedem der übrigen $n-1$ Punkte $a_k$ verläuft. Den Wertveränderungen von $\eta$ beim Ueberschreiten der Linie $\overline{a_k a_n}$ entspricht eine unendlich kleine lineare Substitution von $\xi$. Die zerschnittene $x$-Ebene wird so auf ein $(2n-2)$-Eck abgebildet, das von $n-1$ Seitenpaaren begrenzt ist. Unter der Annahme, dass $\varepsilon$ reell ist, müssen für den Fall, dass die $n-1$ erzeugenden Substitutionen alle elliptisch sind, sämtliche $\varrho_k$ reell vorausgesetzt werden. Indem man nun alle Querschnitte so gezogen denkt, dass ihre Bilder Paare von Kreisbogen werden, handelt es sich um die Frage nach der Existenz eines Orthogonalkreises. Die Bedingungen dafür sind identisch mit denjenigen, die in der citirten Note für den Specialfall der Halbebene gewonnen worden sind. Zum Schluss werden einige Formeln hinzugefügt, unter Benutzung einer Schreibweise für die zugehörige Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die invariante Natur der vorkommenden Grössen hervortreten lässt. Hr.

---

F. Brioschi. Gli integrali algebrici dell'equazione di Lamé. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 327-331.

In einer in den Annali di Mat. (2) IX. (F. d. M. X. 1878. 233) erschienenen Arbeit „Sopra una classe etc." hat der Verf. bewiesen, dass die Gleichung

$$\varphi(s)\frac{d^2y}{ds^2} + \tfrac{1}{2}\varphi'(s)\frac{dy}{ds} = \left[\frac{\nu(\nu+2)}{4}s + t\right]y,$$

in der $\varphi(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3$, $\nu$ eine ungerade Zahl und $t$ eine Constante ist, algebraische Integrale besitzt, und ihre Werte angegeben. In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass dieselben in verschiedener Weise zweckmässig transformirt werden können. Hr.

---

F. Klein. Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung. Math. Ann. XL. 125-129.

Die betrachtete Differentialgleichung ist

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = (Ap+B)\xi,$$

wo

$$t = \int \frac{dp}{\sqrt{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}}.$$

Der Hermite'sche Fall ist dadurch charakterisirt, dass, wie beim Lamé'schen, $A = n(n+1)$ ist, $B$ aber beliebig bleibt. Herr Hermite hat gezeigt, dass dann immer zwei Particularlösungen $\xi_1$ und $\xi_2$ existiren, derart dass das Product

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = F(p, B)$$

ein Polynom $(2n)^{\text{ten}}$ Grades von $p$ ist. Bezeichnet man mit $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}$ in absteigender Folge die Werte von $B$, für welche $F(p, B)$ Quadrate Lamé'scher Ausdrücke

$$\xi = (x-e_1)^{\frac{\varepsilon_1}{2}} (x-e_2)^{\frac{\varepsilon_2}{2}} (x-e_3)^{\frac{\varepsilon_3}{2}} \varphi_k(p) \qquad (\varepsilon_i = 0 \text{ oder } 1)$$

werden, so erkennt man mittels schematischer Zeichnungen, die für die Curven $F(p, B) = 0$ ($p$ und $B$ als rechtwinklige Coordinaten gedacht) für ein gerades und ein ungerades $n$ entworfen werden, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung $F = 0$ für ein beliebig gegebenes $B$ besitzt. Wenn $B > B_1$ oder $< B_{2n+1}$ ist, so hat sie bei ungeradem $n$ nur eine reelle Wurzel, die $> e_3$, bezw. $< e_1$ ist, bei geradem $n$ keine reelle Wurzel. Für die Werte von $B$ zwischen $B_1$ und $B_{2n+1}$ werden keine specificirten Sätze aufgestellt; nur wird bemerkt, dass die Wurzeln sich abwechselnd auf die Hermite'schen $\xi_1, \xi_2$ verteilen. Endlich werden die Charakteristiken $X$, deren Begriff Herr Klein in seiner Abhandlung „über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe“ (Math. Ann. XXXVII. 573-590, F. d. M. XXII. 1890. 444)

eingeführt hat, im Falle der Hermite'schen Differentialgleichung für die 4 Intervalle

$$(-\infty, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_3, +\infty)$$

angegeben. Hr.

---

G. v. Escherich. Zur Bessel'schen Differentialgleichung. Monatsh. f. Math. III. 142.

Das Resultat der Integration von $\frac{e^{iz}}{\sqrt{a^2-z^2}}$ ($a$ reell und positiv) längs der Berandung des ersten Quadranten eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $r$ für $\lim r = \infty$ ergiebt, dass

$$\int_a^\infty \frac{\cos x dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int_1^\infty \frac{\cos ax dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

ein Integral der Differentialgleichung von $I^0(a)$ ist. Hr.

---

N. E. Joukowsky. Die Bedingungen der Endlichkeit der Integrale der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}+py=0$. Mosk. Math. Samml. XVI. 582-592. (Russisch.)

In der Abhandlung: „Ueber die Stabilität der Bewegung" hat der Verfasser einen Beweis des Satzes gegeben, nach welchem die Integrale der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2}+py=0$ bei endlichem und positivem $p$ endlich sind. Jetzt zeigt er, dass dieser Beweis seine Gültigkeit verliert, falls $p$ eine periodische Function ist, was schon früher von Hrn. A. Liapunow (Die allgemeine Frage von der Stabilität der Bewegung. Chark. 1892) gezeigt war. Wi.

---

L. Pochhammer. Ueber eine specielle lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten. Math. Ann. XLI. 174-178.

Die Gleichung $xy''+\varrho y'-y=0$ wird durch bestimmte Integrale und durch Grenzfälle hypergeometrischer Reihen integrirt.

Bdt.

---

A. Krug. Bemerkungen zu gewissen Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung. Prag. Math. Ges. 1892. 22-42.

Es handelt sich um die, eine Abbildung der positiven Halbebene der $x$ auf ein Kreisbogenviereck in der $u$-Ebene vermittelnde, Differentialgleichung dritter Ordnung

$$[u, x] \equiv \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2}\frac{u''^2}{u'^2} = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1-\lambda_i^2}{2} \frac{1}{(x-a_i)^2} + \sum_{i=4}^{i=4} \frac{\mu_i}{x-a_i}.$$

Dieser soll eine solche Form („Normalform") gegeben werden, dass sie den Substitutionen

$$(1) \qquad x = \frac{A\xi+B}{C\xi+D}, \quad a_i = \frac{A\alpha_i+B}{C\alpha_i+D}$$

gegenüber invariant bleibt. Sie lautet

$$[u, x] = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1-\lambda_i^2}{2} \frac{1}{(x-a_i)^2} - S_{i,k} \frac{n_{i,k}}{(x-a_i)(x-a_k)}$$
$$+ c \frac{\sqrt[6]{16(a_1-a_2)^2 \dots (a_3-a_4)^2}}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)},$$

worin die $n_{i,k}$, die gewissen Bedingungen zu genügen haben, aber durch sie noch nicht völlig bestimmt sind, abweichend von der bezüglichen Festsetzung in der Normalform des Herrn Pick (Math. Ann. XXXVIII, F. d. M. XXIII. 1891. 339), durch

$$n_{i,k} = \frac{1-\lambda_i^2+1-\lambda_k^2}{2} - \frac{4-\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_4^2}{6}$$

gegeben sind. Die zugehörige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralquotient $u$ ist, lautet:

$$y'' + \Sigma \frac{1-\lambda_i}{x-a_i} y' + \frac{1}{2}\left\{S_{i,k} \frac{(1-\lambda_i)(1-\lambda_k)-n_{i,k}}{(x-a_i)(x-a_k)}\right.$$
$$\left. + \frac{c\sqrt[6]{16(a_1-a_2)^2 \dots (a_3-a_4)^2}}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}\right\} y = 0.$$

Von dieser werden einige Eigenschaften entwickelt. Bezeichnet man sie kurz mit $\left(y \begin{matrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} c; x\right) = 0$ und eine ähnliche mit $\left(\eta \begin{matrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \end{matrix} c; \xi\right) = 0$, worin $\alpha_i$ und $\xi$ durch die Substitutionen (1)

bestimmt sind, so besteht zwischen den Integralen die Beziehung

$$y = \eta (C\xi + D) \frac{2-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4}{2}.$$

Ferner gilt zwischen den Integralen der Gleichungen

$$\left(y \begin{matrix} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \\ a_1 a_2 a_3 a_4 \end{matrix} c; x\right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\bar{y} \begin{matrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_2 \lambda_2 & \varepsilon_3 \lambda_3 & \varepsilon_4 \lambda_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} c; x\right) = 0,$$

wo $\varepsilon_i^2 = 1$, die Relation:

$$y = \prod_{k=1}^{k=4} (x-a_k)^{\frac{1-\varepsilon_k}{2}\lambda_k} \bar{y}.$$

Endlich wird unter Einführung von Ausdrücken $D^n f(x)$, sogenannten „Derivaten vom Index $n$", die im wesentlichen einer Ausdehnung der Differentiation auf beliebige Indices dienen, gezeigt, dass der Gleichung

$$\left(\bar{y} \begin{matrix} \lambda_1 - n & \lambda_2 - n & \lambda_3 - n & \lambda_4 - n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} c; x\right) = 0,$$

wo $n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i$, durch $\bar{y} = D^n y$ genügt wird. Hr.

---

A. Krug. Zur linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Prag. H. Dominicus. (Th. Gruss.) 81 S. 8°.

Die Arbeit, welche viele Berührungspunkte hat mit derjenigen des Herrn Lipmann Schlesinger „Ein Beitrag zur Theorie etc." Diss. Kiel (F. d. M. XX. 1888. 343), verwertet zur Behandlung der Differentialgleichung dritter Ordnung in $y$, die mit $(A)$ bezeichnet sei, Invarianten derselben, d. h. solche aus den Coefficienten und deren Ableitungen nach der Unabhängigen $x$ gebildeten Ausdrücke, die bei den Substitutionen $y = s\bar{y}$, $x = \varphi(\bar{x})$ ungeändert bleiben. Die in der genannten Arbeit mit $g$, $h$, $k$ bezeichneten Invarianten heissen hier beziehlich $G_3$, $G_2$, $G_1$. Eigentümlich dem Verf. ist die Verbindung, in welche sie mit gewissen sogenannten Differentialinvarianten der Ebene gebracht werden. Bilden nämlich $y_1$, $y_2$, $y_3$ irgend ein Fundamentalsystem von Integralen von $(A)$, so erhält man zwischen den Quotienten $u = y_1 : y_3$, $v = y_2 : y_3$ durch Eliminirung von $x$ eine Gleichung $f(u, v) = 0$,

die offenbar ebenfalls gegenüber den erwähnten Substitutionen invariant ist. Betrachtet man nun vermöge dieser Gleichung $v$ als Function von $u$, so lassen sich gewisse aus den Ableitungen von $v$ nach $u$ rational zusammengesetzte Ausdrücke $V_5$, $V_7$, $V_8$ bestimmen von der Eigenschaft, dass

$$(1) \qquad V_5\, du^3 = G_3\, dx^3, \quad V_7\, du^2 = G_2\, dx^2, \quad V_8\, du = G_1\, dx$$

ist, wobei $V_k$ einen Differentialausdruck $k^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnet. Die Ausdrücke auf den linken Seiten der Relationen (1) sind, wie aus den rechten Seiten ersichtlich, gegenüber beliebigen linearen gebrochenen Substitutionen der $u$, $v$ (Collineationen der Ebene, wenn man $u$ und $v$ als Coordinaten der Ebene interpretirt) invariant und heissen „Differentialinvarianten der Ebene“. Aus den Fundamental-Differentialinvarianten $V_5\, du^3$ und $V_7\, du^2$ lassen sich mittels blosser Differentiation Differentialinvarianten beliebig hoher Ordnung aufstellen. Aus den Relationen (1) ergeben sich die beiden folgenden „absoluten Differentialinvarianten“, die $du$ und $dx$ nicht mehr enthalten:

$$\mathfrak{U} = V_7^3 : V_5^2 = G_2^3 : G_3^2 = \mathfrak{G}$$

und

$$\mathfrak{B} = V_7 \,.\, V_8 : V_5 = G_1 \,.\, G_2 : G_3 = \mathfrak{H}.$$

Die Gleichung $F(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) \equiv F(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = 0$, die durch Elimination von $x$ entsteht, ist dieselbe, die man aus

$$(2) \qquad f\left(\frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3},\; \frac{\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}\right) = 0$$

erhält, wenn man achtmal nach $u$ differentiirt und die $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eliminirt. Somit sind alle zur Curve $f(u, v) = 0$ collinear liegenden Curven (2) durch die einzige Curve $F(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) = 0$ (Differentialcurve) charakterisirt. Es werden nun mehrere Covarianten $H$, $\Phi$, $\Psi$, $\Omega$ von $f$ eingeführt, unter denen $H$ die Hesse'sche ist, und ihre Beziehungen zu den Differentialinvarianten der Ebene aufgesucht. Es ergiebt sich

$$\mathfrak{U} = \Psi^3 : \Phi^8, \quad \mathfrak{B} = H\Omega : \Phi^4.$$

Wenn nun $f(u, v) = 0$ gegeben ist, so kann man die Integration von $(A)$ bewirken, indem man zunächst aus den Gleichungen

$$\Psi^3 - \mathfrak{G}\Phi^8 = 0, \quad H\Omega = \Phi^4 = \mathfrak{H}$$

$u$ und $v$ als Functionen von $x$ bestimmt. Aus diesen lassen sich dann $y_1$, $y_2$, $y_3$ mit Hülfe einer einzigen Quadratur bestimmen. Daran schliessen sich unmittelbar die anderweitig bekannten Kriterien für die algebraische Integrirbarkeit von $(A)$ mit rationalen Coefficienten. Den Schluss bildet die Anwendung auf die auch von Herrn Schlesinger untersuchte Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Integrale durch eine Relation dritten Grades verknüpft sind. Hr.

---

A. A. Markow. Ueber eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Mosk. Math. Samml. XVI. 352-356. (Russisch.)

Die betrachtete Gleichung ist

$$x^2(1-x)^2z'''+x(1-x)(ax+b)z''+(cx^2+dx+e)z'+(fx+g)z=0.$$

Sie hat ein particuläres Integral, das sich leicht durch die verallgemeinerte hypergeometrische Reihe

$$F(\lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, x)$$

darstellen lässt. Wi.

---

L. Pochhammer. Ueber die Differentialgleichungen der Reihen $F(\varrho, \sigma; x)$ und $F(\varrho, \sigma, \tau; x)$. Math. Ann. XLI. 197-218.

Die angeführten Reihen sind Specialisirungen der allgemeinen $F$-Reihe:

$$F(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x) = 1 + \frac{x}{1\cdot\varrho_1\cdot\varrho_2\cdots\varrho_{n-1}} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} + \cdots,$$

deren Differentialgleichung der Verfasser in den Math. Ann. XXXVIII. 586-597 (F. d. M. XXIII. 1891. 338) betrachtet hat. Dem Fall $n=3$ entspricht die Reihe $F(\varrho, \sigma; x)$, die der Differentialgleichung

$$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\varrho+\sigma+1)x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\sigma\frac{dy}{dx}-y=0$$

genügt. Die dem Falle $n=4$ entsprechende Reihe $F(\varrho, \sigma, \tau; x)$

ist ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$x^3\frac{d^4y}{dx^4}+(\varrho+\sigma+\tau+3)x^2\frac{d^3y}{dx^3}$$
$$+(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1)x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\sigma\tau\frac{dy}{dx}-y=0.$$

Ausserdem werden die Differentialgleichungen noch durch mehrdeutige, zu den Exponenten $1-\varrho$, $1-\sigma$ resp. $1-\varrho$, $1-\sigma$, $1-\tau$ gehörige Particularlösungen befriedigt. Es gilt hierbei die Voraussetzung, dass keine der Constanten $\varrho$, $\sigma$, $\tau$, $\varrho-\sigma$, $\varrho-\tau$, $\sigma-\tau$ gleich einer ganzen Zahl oder Null sei. Die Lösungen der Differentialgleichungen werden nun in Gestalt von Doppelintegralen, resp. dreifachen Integralen gegeben, unter Bezugnahme auf frühere Abhandlungen des Verf., und es ergiebt sich, dass die genannten Reihen auf verschiedene Arten durch bestimmte Integrale darstellbar sind. Hr.

---

L. Pochhammer. Ueber die Reduction der Differentialgleichung der Reihe $\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$. J. für Math. CX. 188-197.

Die Differentialgleichung

$$(1)\qquad x^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n}+L_1x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+L_{n-2}x\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+L_{n-1}\frac{dy}{dx}-y=0,$$

wo $L_1, \ldots, L_{n-1}$ Constanten bedeuten, wird durch Reihen von der Form

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)=1+\frac{x}{1.\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}}$$
$$+\frac{x^2}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}+\cdots$$

integrirt. Sie lässt sich durch eine Transformation von der Form

$$y=\int_g^h e^{\frac{x}{t}}\,T\,dt,$$

wo $g$ und $h$ constant sind und $T$ von $t$ allein abhängt, auf eine Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von derselben Gestalt wie

(1) reduciren. Die Wiederholung dieses Verfahrens liefert $(n-1)$-fach bestimmte Integrale für $y$. Hr.

---

P. Mansion. Rapport sur: Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par Ch.-J. de la Vallée Poussin. Belg. Bull. (3) XXIV. 227-236.

Vermöge einer eigenen Methode beweist der Verf., dass man den Begriff des Integrals einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf den Fall ausdehnen kann, in welchem $f(x, y)$ eine unstetige Function ist. Derselbe Satz bleibt auch in dem Falle eines Systems simultaner Differentialgleichungen bestehen. Die vollständige Abhandlung wird später eingehend besprochen werden.

Mn. (Lp.)

---

J. Horn. Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. II. Math. Ann. XL. 527-550.

In diesem zweiten Teile der Arbeit, deren erster in den Math. Ann. XXXIX. 391-408 (F. d. M. XXIII. 1891. 325) erschienen ist, wird eine Methode entwickelt, welche jedes an der singulären Stelle $x = 0$ sich regulär verhaltende System linearer Differentialgleichungen für $y_1, y_2, \dots, y_m$ als Functionen von $x$ durch eine Reihe von Substitutionen von der Form $y_a = xz_a$ in die im ersten Teil untersuchte „kanonische" Form

$$x\frac{dy_a}{dx} = \sum_\beta (a_{a\beta} + a'_{a\beta}x + \cdots)y_\beta \qquad (a, \beta = 1, \dots, m)$$

überzuführen gestattet. Die Methode gründet sich auf die Weierstrass'sche Theorie der bilinearen Formen und nimmt folgenden Gang: Das betrachtete System lässt sich auf die Form bringen:

$$(1) \qquad x^{h+1}\frac{dy_k}{dx} = a_{k1}y_1 + \cdots + a_{km}y_m + \mathfrak{P}_{k1}(x)y_1 + \cdots + \mathfrak{P}_{km}(x)y_m \qquad (k = 1, \dots, m),$$

wo $\mathfrak{P}_{k1}(x), \dots, \mathfrak{P}_{km}(x)$ durch $x$ teilbare Potenzreihen sind;

$h$ sei $> 0$. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm}-s \end{vmatrix}$$

heisst die Determinante des Differentialgleichungssystems (1). Die Anzahl ihrer Elementarteiler sei $< m$. Die Hauptaufgabe besteht darin, durch geeignete Transformationen das System (1) in ein anderes überzuführen, für welches die Anzahl der Elementarteiler der zugehörigen Determinante grösser geworden ist. Hierzu wird, wie im ersten Teile, die Weierstrass'sche Normalform eingeführt und über die dabei noch unbestimmt bleibenden $Y$ so verfügt, dass das System durch Substitutionen obiger Gestalt in die verlangte Form übergeht. Durch wiederholte Anwendung dieses Transformationsverfahrens gelangt man zu einem System von der Form (1), dessen Determinante $m$ Elementarteiler besitzt; dann sind aber sämtliche $a_{\alpha\beta}$ gleich Null, so dass die Zahl $h$ um 1 erniedrigt werden kann. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis $h = 0$ wird, womit man dann zu einem kanonischen System gelangt ist. Hr.

---

G. v. Escherich. Ueber die Multiplicatoren eines Systems linearer homogener Differentialgleichungen. I. Wien. Ber. CI. 1222-1247.

Behufs Anwendung auf die Transformation der zweiten Variation des allgemeinen isoperimetrischen Problems wird in dieser ersten Mitteilung eine ausführliche Untersuchung der Multiplicatoren eines Systems linearer homogener Differentialgleichungen vorangeschickt. Hierbei wird der Zusammenhang zwischen zwei adjungirten Formensystemen und die Reduction eines gegebenen Systems von Differentialgleichungen aus der Kenntnis einerseits von Multiplicatorensystemen, andererseits von Systemen particulärer Integrale dargelegt. Hr.

---

W. Heymann. Zur Theorie der Differenzengleichungen. J. für Math. CIX. 112-117.

Ein System von Differenzengleichungen

$$y_i^{x+1} = \sum_k f_{ik} y_k^x \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

in welchem die $f$ ganze Functionen von $x$ und die $y^x$ von $x$ abhängige Veränderliche sind, kann durch lineare Substitutionen

$$y_i^x = \sum_k a_{ik} z^k,$$

wo die $a$ zu bestimmende Constanten sind, im allgemeinen in das System

$$z_i^{x+1} + (x - \varepsilon_i) \sum_k \varphi_{ik} z_k^x = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

übergeführt werden, wo die $\varphi$ ebenfalls ganze Functionen sind; die $\varepsilon$ sind Wurzeln der Gleichung $|f_{ik}| = 0$. Die analoge Transformation für ein System von linearen Differentialgleichungen enthält die in F. d. M. XVII. 1885. 331 besprochene Arbeit des Verfassers. Bildet man ferner aus den Integralen $y_i^x$ $(i = 1, \ldots, n)$ der linearen Differenzengleichung

$$y^{x+n} + p_{n-1} y^{x+n-1} + \cdots + p_1 y^{x+1} + p_0 y^x = 0$$

die Determinante

$$|y_i^{x+k-1}| = D^x,$$

so gilt die Relation

$$D^{x+1} = (-1)^n p_0 D^x,$$

mit deren Hülfe das Gauss'sche Theorem über die $\Gamma$-Function unmittelbar bewiesen wird. Hr.

---

M. Lerch. Auflösung einiger Differenzengleichungen.
Casopis XXI. 69-75. (Böhmisch.)

Von der Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n,$$

convergent für die Werte

$$\varrho < |x| < \varrho',$$

gelangt der Autor zunächst zu der Relation

$$(1-x)^m f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta^m a_n x^n,$$

wenn hierbei, wie üblich, symbolisirt wird

$$\Delta a_n = a_n - a_{n-1}, \quad \Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_n - \Delta^{k-1} a_{n-1},$$

und liefert hierauf die Lösung der Gleichung

$$\Delta^2 a_n = \frac{c}{n} a_n, \quad a_0 = 0,$$

wenn $a_n$ zu bestimmen ist, sowie der allgemeineren Gleichung

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c a_n x^n}{n}$$

oder

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=2}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n = c \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-1}.$$

Std.

---

A. J. STODÓLKIEWICZ. Sammlung von Beispielen für die Integration der Differentialgleichungen (Quadraturen) mit Auflösungen. Warschau 1892. 71 S. 8⁰. (Polnisch.)

Enthält 268 Aufgaben meistens für die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und ausführliche Anweisungen zur Auflösung derselben. Im Anhange findet sich eine Note „Ueber die Verallgemeinerung eines Satzes von Boole“ und zwei Noten „Ueber einige specielle Fälle des Pfaff'schen Problems“. Dn.

---

### Weitere Litteratur.

A. R. FORSYTH. Theorie der Differentialgleichungen. Teil I: Exacte Gleichungen und das Pfaff'sche Problem. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Leipzig. B. G. Teubner. XII + 378 S.

Vergl. die Anzeige des Originals in F. d. M. XXII. 1890. 347.

E. WAELSCH. Zur Geometrie der linearen algebraischen Differentialgleichungen und binären Formen. Prag. Math. Ges. 1892. 78-99.

Siehe Abschn. IX.

M. PHILIPPOFF. Sur les invariants des équations différentielles linéaires. Diss. Heidelberg.

G. Haeuser. Ueber die Fundamentaldeterminanten der allgemeinen, homogenen, linearen Differentialgleichungssysteme. Diss. Heidelberg.

Riquier. De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque. C. R. CXIV. 731-733.

---

## Capitel 6.
## Partielle Differentialgleichungen.

L. Königsberger. Ueber die Integrale partieller Differentialgleichungssysteme beliebiger Ordnung. J. für Math. CIX. 261-340.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Existenzbeweis für die Integrale partieller Differentialgleichungssysteme, mit der Natur der Integrale und dem Zusammenhang derselben; die Resultate sollen zu Untersuchungen über Irreductibilität solcher Systeme später verwertet werden. Im ersten Teil wird ein beliebiges algebraisches partielles Differentialgleichungssystem auf ein solches erster Ordnung zurückgeführt dadurch, dass an Stelle von gewissen partiellen Differentialquotienten neue abhängige Variabeln eingeführt werden. Ein solches System erster Ordnung kann stets ersetzt werden durch eine bestimmte Anzahl $N$ von Systemen von Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial G}{\partial t_a} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z_1} = G_1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{\partial G}{\partial t_a} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial z_1} = G_m,$$

worin $G_1, \ldots, G_m$ ganze Functionen ihrer Argumente, nämlich $z_1, \ldots, z_\mu, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}$, $t_a$ bedeuten und $t_a$ der Reihe nach die $N$ Lösungen der Gleichung $N^{\text{ten}}$ Grades $G = 0$ darstellt. Diese Form wird die Weierstrass'sche Normalform des partiellen Differentialgleichungssystems $m^{\text{ter}}$ Klasse genannt.

Der zweite Teil giebt den Existenzbeweis der Integrale, und zwar in folgender Form: Sind für $z_1 = a_1$ die Werte von $u_1, \dots, u_m$ beliebig gegeben als Functionen von $z_2, \dots, z_\mu$, und bedeutet $a_2, \dots, a_\mu$ irgend ein Wertesystem von $z_2, \dots, z_\mu$, welches gewissen, bestimmt angegebenen Bedingungen genügt, so besitzt das System ein Integralsystem, welches in der Umgebung von $a_1, \dots, a_\mu$ den Charakter ganzer Functionen hat und für $z_1 = a_1$ die willkürlich festgesetzten Functionalwerte aller übrigen Variabeln annimmt, und dieses System ist unter den gemachten Bedingungen das einzige. Diesem Satz werden noch zwei andere Fassungen gegeben.

Der dritte Teil beschäftigt sich mit der Aufstellung eines singulären Integralsystems; eines solchen nämlich, für welches die Gleichungen $G(t_1) = 0$ und $\frac{\partial G(t_1)}{\partial t_1} = 0$ gleichzeitig erfüllt sind, während der vierte Teil die durch Variation der Constanten herleitbaren Integrale behandelt. Hierbei werden zunächst die partiellen Differentialgleichungssysteme erster Klasse behandelt, d. h. die partielle Differentialgleichung

$$f\left(z_1, \dots, z_\mu, u, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) = 0,$$

und es werden die Bedingungen dafür aufgestellt, dass in den beiden Fällen, wo $u$ selbst in $f$ vorkommt und nicht, die Function $F(z_1, \dots, z_\mu, a_1, \dots, a_\mu)$ ein vollständiges Integral der Differentialgleichung ist. Aus diesem vollständigen Integrale lässt sich durch Variation der Constanten eine Reihe anderer Integrale in bestimmter Weise ableiten; andere als auf diese Art abgeleitete Integrale besitzt die Differentialgleichung nicht. Die entsprechenden, sich aber wesentlich anders gestaltenden Untersuchungen für Differentialgleichungssysteme $m^{\text{ter}}$ Klasse zunächst mit 2, dann mit mehr Variabeln werden zum Schluss durchgeführt. Sh.

---

G. Mie. Zum Fundamentalsatz über die Existenz von Integralen partieller Differentialgleichungen. Schlömilch Z. XXXVII. 151-171, 193-212; Diss. Heidelberg.

In der obigen Abhandlung wird untersucht, unter welchen

Bedingungen eine partielle Differentialgleichung Potenzreihen als Integrale besitzt. Es wird zunächst das unendliche Differentialgleichungssystem:

$$\frac{dz_\nu}{dx} = f_\nu(x, z_1, z_2, \ldots) \qquad (\nu = 1, \ldots, \infty),$$

worin die $f$ Potenzreihen bedeuten, darauf hin untersucht, wann für die $z_\nu$ sich Potenzreihen in $x$ als Integrale finden lassen. Als Ausgangspunkt wird das System

$$\frac{dz_\nu}{dx} = \sum_0^\infty a_\mu^{(\nu)} z_\mu$$

gewählt, worin $a_\mu^{(\nu)}$ lauter positive Coefficienten bedeuten und 1 für $z_0$ zu setzen ist, und es wird gezeigt, dass Integrale der Form

$$z_\nu = \sum_1^\infty C_\mu^{(\nu)} x^\mu$$

existiren, wenn die formal stets herstellbaren Potenzreihen für $z_\nu$ eine gewisse, den Convergenzkreis betreffende Bedingung erfüllen. Hierauf stützt sich der Beweis des Satzes: Damit das allgemeine System

$$\frac{dz_\nu}{dx} = \sum_{\lambda=0}^\infty \sum_{\mu=0}^\infty a_{\lambda\mu}^{(\nu)} x^\mu z_\lambda$$

sich vermittelst Potenzreihen integriren lasse, ist notwendig und hinreichend, dass alle $a$ kleiner sind als die entsprechenden Coefficienten eines Systems

$$\frac{dz_\nu}{dx} = \sum_0^\infty b_\lambda^{(\nu)} z_\lambda \,.\, \sum_0^\infty R^\mu x^\mu,$$

worin $R$ in allen Gleichungen dieselbe positive Zahl und die $b$ derartige positive Constanten sind, dass das System

$$\frac{dz_\nu}{dx} = \sum_0^\infty b_\lambda^{(\nu)} z_\nu$$

in Potenzreihen entwickelbare Integrale hat. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, wie man die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ersetzen kann durch das unendliche System totaler Differential-

gleichungen

$$\frac{dz_0}{dx} = f\left(x,\ y_0,\ z_0,\ \frac{z_1 - z_0}{\Delta y}\right),$$
$$\frac{dz_1}{dx} = f\left(x,\ y_0 + \Delta y,\ z_1,\ \frac{z_2 - z_1}{\Delta y}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

wenn man annimmt, dass $\Delta y$ unendlich klein wird. Auch für den Fall, dass höhere Differentialquotienten von $z$ vorkommen, lässt sich ein ähnliches System finden, und diese Systeme werden in der oben angedeuteten Weise untersucht.

Als Anwendungen der Methode betrachtet der Verf. erst die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y) + f_0(x, y).z + f_1(x, y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

welche stets als Integral eine Potenzreihe von $x$ und $y$ zulässt, sobald $f$, $f_0$, $f_1$ Potenzreihen sind, und dann die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Sh.

---

H. A. W. Speckmann. De Darboux'sche methode ter integratie der niet-lineaire partieele differentiaalvergelijkingen van de tweede orde. Amst. Versl. en Meded. (3) IX. 441-497.

Im ersten Teile dieser Abhandlung giebt der Verfasser eine übersichtliche Darstellung der von Hrn. Darboux in den Ann. de l'Éc. Norm. VII (F. d. M. II. 1870. 315) veröffentlichten Integrationsmethode für partielle Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Die beiden ersten Paragraphen behandeln die beiden von Hrn. Darboux angegebenen Wege zur Auffindung partieller Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung, denen das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung genügt. Es wird gezeigt, dass diese beiden Methoden gleichwertig sind, d. h. dass die nach der einen erhaltenen Gleichungen in die nach der anderen Methode hergeleiteten übergeführt werden können. Im nächsten Paragraphen erhält man einen Ueberblick über die Inte-

grationsmethoden von Falk, Picard, Hamburger, Winckler, König, Sersawy, welche sämtlich zu den Darboux'schen Gleichungen führen.

Der zweite Teil enthält eine Integrationsmethode für die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

deren charakteristische Gleichung

$$(1) \qquad m^2 \frac{\partial f}{\partial r} - m \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

zwei gleiche Wurzeln $m_1 = m_2$ hat. In diesem Falle hat das Darboux'sche Gleichungssystem, welches im ersten Teile gewonnen ist:

$$(2) \qquad \begin{cases} m_1^2 \dfrac{\partial u}{\partial r} - m_1 \dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{oder} \quad \varDelta_1 u = 0, \\[2ex] \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + m_2 \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial r}} \dfrac{\partial u}{\partial r} + m_2 \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial t}} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\[2ex] \qquad\qquad \text{oder} \quad \varDelta_2 u = 0, \end{cases}$$

fünf gemeinsame Integrale. Hierin bedeutet $u = C$ eine neue partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche mit der gegebenen eine Lösung gemein hat und zum wenigsten eine willkürliche Function enthält, während

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + r \frac{\partial f}{\partial p} + s \frac{\partial f}{\partial q},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + s \frac{\partial f}{\partial p} + t \frac{\partial f}{\partial q}$$

gesetzt ist. Damit das Gleichungssystem fünf gemeinsame Integrale hat, muss die Beziehung stattfinden:

$$(\varDelta_1 \varDelta_2 - \varDelta_2 \varDelta_1) u \equiv 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$(3) \qquad \begin{cases} m_1 = m_2, \quad \varDelta_1 m_2 = 0, \quad m_1 \varDelta_2 m_1 = -\varDelta_1 \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial r}}, \\[3ex] \dfrac{1}{m_1} \varDelta_2 m_1 = \varDelta_1 \left\{ m_2 \dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\dfrac{\partial f}{\partial r}} \right\}. \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Beziehungen in Verbindung mit (1) erhält man die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 - 4\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial t} = 0;$$

durch deren Integration stellt sich heraus, dass die Function $f$ das Resultat der Elimination der Grösse $m$ aus

$$(4)\qquad \begin{cases} f = r + ms + m^2 t - 2F(x, y, z, p, q, m), \\ s + mt = \dfrac{\partial F}{\partial m} \end{cases}$$

sein muss, wo $F$ ein beliebiges Functionszeichen ist. Hieraus schliesst man sodann

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial s} = 2m, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = m^2,$$

und die Bedingungsgleichungen (3) lassen sich zu der einzigen

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F'}{\partial x} + m\dfrac{\partial F'}{\partial y} + (p+mq)\dfrac{\partial F'}{\partial z} + 2F\dfrac{\partial F'}{\partial p} \\ \quad + F'\left(\dfrac{\partial F'}{\partial q} - m\dfrac{\partial F'}{\partial p}\right) - 2\left\{\dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z} + F'\dfrac{\partial F}{\partial p}\right. \\ \qquad\qquad \left. + F''\left(\dfrac{\partial F}{\partial q} - m\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)\right\} = 0 \end{cases}$$

zusammenziehen, wo $F' = \dfrac{\partial F}{\partial m}$ und $F'' = \dfrac{\partial^2 F}{\partial m^2}$ gesetzt ist.

Das System (2) erhält weiter die Form

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$m^2\frac{\partial u}{\partial r} - m\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Schliesslich wird die Integration desselben auf diejenige der einzigen linearen Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + (p+mq)\frac{\partial u}{\partial z} + (2F - mF')\frac{\partial u}{\partial p} + F'\frac{\partial u}{\partial q}$$
$$+ 2\left(m\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial u}{\partial m} = 0$$

mit der Bedingung (5) für die Function $F$ zurückgeführt. Die fünf Integrale der letzten Gleichung liefern nun unmittelbar das all-

gemeine Integral, indem man in jenen fünf Integralen vier der Constanten als beliebige Functionen der fünften $c$ betrachtet und sodann $p$, $q$, $m$ und $c$ eliminirt. Das erhaltene Integral enthält sodann vier beliebige Functionen, von denen zwei noch bestimmt werden können mittels einer bei der Analyse erhaltenen Bedingungsgleichung. Führt man nämlich statt $x$ und $y$ als unabhängige Variabeln die Grössen $x$ und $c$ ein, so lautet diese Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial c} - q\frac{\partial y}{\partial c} = 0,$$

welche, wie gezeigt wird, die Form hat: $A\lambda(x) + B\mu(x) = 0$. Hierin sind $A$ und $B$ Functionen von $c$, $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ von $x$ allein, sodass sich ergiebt: $A = 0$, $B = 0$.

Durch die erhaltenen Werte wird das System

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy, \quad dy = mdx$$

vollständig integrabel, und man erhält dadurch das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung.

Anwendung der allgemeinen Theorie auf die Beispiele:

$$f(r, s, t) = 0, \quad f(x, r, s, t) = 0.$$

Gleichungen von der Form $f(z, r, s, t) = 0$ sind nicht im System (4) enthalten. Schliesslich werden einige besondere Fälle der bekannten Gleichung

$$rt - s^2 + Rr + 2Ss + Tt + RT - S^2 = 0,$$

worin $R$, $S$, $T$ Functionen von $x, y, z, p, q$ sind, in Angriff genommen, speciell die Gleichung:

$$r + 2Ns + N^2t + v = 0,$$

unter Vergleichung der Methode mit der Boole'schen. Mo.

---

E. Phragmén. Note sur le procédé alterné de M. Schwarz.
Stockh. Öfv. XLIX. 265-270.

Das in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen von Hrn. Schwarz eingeführte „alternirende Verfahren“ beruht auf einem Hülfssatze, für den Hr. Schwarz selbst einen sehr kurzen

Beweis gegeben hat. Der Verf. zeigt, dass dieser Beweis in einer gewissen Hinsicht nicht ganz einwurfsfrei sei, und ersetzt denselben durch eine strengere Beweisführung. Bdn.

---

J. Bendixson. Sur l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales. Stockh. Öfv. XLIX. 271-277.

Bei der Behandlung von Systemen der fraglichen Art mit $q$ unabhängigen und $r$ abhängigen Variabeln hat man sich im allgemeinen auf die Fälle beschränkt, bei denen die $r$ Functionen $r$ willkürliche Constanten enthalten können. Es ist jedoch möglich, dass dies nicht stattfindet. Der Verf. benutzt eine Behandlungsweise, welche auch solche Fälle einschliesst. Bdn.

---

J. Bendixson. Sur un théorème de M. Lie. Stockh. Öfv. XLIX. 301-306.

Auf ziemlich elementare Weise wird folgender Satz bewiesen: Ein Gleichungssystem

$$p_\alpha = F_\alpha(x_1, \ldots, x_n, \ p_{m+1}, \ldots, p_n) \qquad \left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \ \alpha = 1, \ldots, m\right)$$

hat, wenn die Bedingungen

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha} = \sum_{\nu=m+1}^{n} \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\nu}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_\nu} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\nu}\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\nu}\right) \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, \ldots, m \\ \beta = 1, \ldots, m\end{pmatrix}$$

identisch erfüllt sind, eine und nur eine Lösung $z = \varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$ mit der Eigenschaft, dass sie sich für $x_1 = k_1, \ldots, x_m = k_m$ auf eine gegebene Function von $x_{m+1}, \ldots, x_n$ reducirt. Bdn.

---

A. Cayley. Note on the partial differential equation $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) - V = 0$. Quart. J. XXVI. 1-5.

Besitzt die obige Gleichung ein Integral erster Ordnung von der Form $u = f(v)$, wo $u$, $v$ Functionen von $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ sind, so beweist der Verf., dass, wenn das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 dx - R\,dy + U\,dq &= 0,\\ -T\,dx + m_2 dy + U\,dp &= 0,\\ -V\,dx + m_2 dq + R\,dp &= 0,\\ -V\,dy + T\,dq + m_1 dp &= 0,\\ -p\,dx - q\,dy + \quad dz &= 0, \end{aligned}$$

worin $m_1$ und $m_2$ die Wurzeln von $m^2 - Sm + RT - UV = 0$ sind, zwei Integrale $u =$ const. und $v =$ const. zulässt, die Lösung der gegebenen Differentialgleichung $u = f(v)$ ist.

An einem Beispiel wird gezeigt, dass, wenn jedes der beiden Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die durch Vertauschung von $m_1$ und $m_2$ entstehen, nur ein Integral besitzt, diese beiden Lösungen nicht zur Lösung der partiellen Differentialgleichung führen.

Zum Schluss werden fünf Bedingungsgleichungen, die gleichbedeutend mit drei von einander unabhängigen Bedingungen sind, dafür aufgestellt, dass das Differential $Adx + Bdy + Cdz + Ddw$ gleich $Mdu$ zu setzen ist. Sh.

---

K. Zorawski. Integration der Systeme von linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer abhängigen Variable. Prace mat.-fiz. III. 1-32. (Polnisch.)

Der Verfasser behandelt vollständige Systeme

$$X_k(f) = \sum_1 {}_i\, \xi_{k,i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

für welche die Poisson'schen Symbole die Form haben:

$$(X_k X_l) = \omega_{lk1} X_1(f) + \omega_{lk2} X_2(f) + \cdots + \omega_{lkl-1} X_{l-1}(f)$$
$$(l = 2, 3, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, l-1);$$

$\omega_{lki}$ sind Functionen von $x$. Diese Systeme haben die Eigenschaft, dass man sie nach der Jacobi'schen Methode integriren kann, ohne sie auf Jacobi'sche Systeme zurückzuführen; aber die Integration wird dann nicht nach einer beliebigen, sondern nach einer ganz bestimmten Ordnung ausführbar. Diese Ordnung ist nämlich die der Systeme $X_1(f) = 0, \ldots, X_q(f) = 0$. Der Verfasser nennt

die Systeme „integrirbar in der Richtung 1, 2, ..., $q$“. [Es wird vorausgesetzt, dass nicht alle $\omega_{kli}$ identisch Null sind; sind einige von ihnen identisch Null, so existiren mehrere verschiedene Integrationsrichtungen.]

Es werden zunächst die bekannten Sätze über vollständige $q$-gliedrige Systeme (§ 1) und über Jacobi'sche Systeme (§ 2) vorausgeschickt; es wird der Begriff des in einer bestimmten Ordnung integrirbaren Systems erklärt, und seine Eigenschaften werden entwickelt (§ 3). Es folgt dann (§ 4) die Methode der Zurückführung vollständiger Systeme auf die Form des in einer bestimmten Richtung integrirbaren, und endlich wird die allgemeine Theorie durch zwei Beispiele erläutert (§ 5). Das zweite Beispiel ist besonders interessant, weil es eine schöne Anwendung in der vom Verfasser ausgearbeiteten Theorie der Biegungsinvarianten gefunden hat (vgl. F. d. M. XXIII. 805-810). Dn.

---

L. Königsberger. Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungssysteme. Math. Ann. XLI. 260-285.

Das Differentialgleichungssystem:

$$A_{11}\frac{\partial z_1}{\partial x}+A_{12}\frac{\partial z_2}{\partial x}+B_{11}\frac{\partial z_1}{\partial y}+B_{12}\frac{\partial z_2}{\partial y}+C_1=0,$$
$$A_{21}\frac{\partial z_1}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial z_2}{\partial x}+B_{21}\frac{\partial z_1}{\partial y}+B_{22}\frac{\partial z_2}{\partial y}+C_2=0$$

lässt sich stets, wenn die Gleichungen algebraisch unabhängig sind, auf die Form bringen:

$$p_1+\alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\beta_1=0,$$
$$p_2+\alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\beta_2=0,$$

wo $p$ und $q$ die bekannten Bedeutungen haben. Es wird bewiesen, dass die Integration dieses Systems auf die Integration des totalen Differentialgleichungssystems:

$$\frac{dy}{dx}=M_\nu,\quad \frac{dz_1}{dx}=N_\nu,\quad \frac{dz_2}{dx}=P_\nu \qquad (\nu=1,2)$$

sich zurückführen lässt, wo $M_1$ und $M_2$ die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$(\alpha_{11}-M)(\alpha_{22}-M)-\alpha_{12}\alpha_{21}=0$$

sind und zwischen $N$ und $P$ die Gleichung besteht:

$$\alpha_{21}(\beta_1+N_\nu)+(M_\nu-\alpha_{11})(\beta_2+P_\nu)=0 \qquad (\nu=1,2)$$

unter der Bedingung, dass die beiden $(\nu=1,2)$ totalen Differentialgleichungssysteme zwei gleichzeitige Integrale besitzen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür werden aufgestellt und schliesslich der eine besondere Behandlung erfordernde Fall untersucht, dass die beiden Werte von $M$ einander gleich sind.

Sh.

M. Hamburger. Erweiterung eines Pfaff'schen Satzes auf simultane totale Differentialgleichungen erster Ordnung und Integration einer Klasse von simultanen partiellen Differentialgleichungen. J. für Math. CX. 158-176.

Das System von $p$ simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$U^\varrho=a_1^\varrho dx_1+\cdots+a_n^\varrho dx_n \qquad (\varrho=1,2,\ldots,p;\ p<n),$$

wo $a_s^\varrho$ Functionen von $x$ bedeuten, soll vermittelst eines Grössensystems $\lambda_k^i$, dessen Determinante $\varDelta$ von Null verschieden sei, auf ein System von $n-1$ Variabeln reducirt werden, sodass die $p$ Identitäten stattfinden:

$$\lambda_\varrho^1 U^1+\lambda_\varrho^2 U^2+\cdots+\lambda_\varrho^p U^p=\alpha_1^\varrho dy_1+\cdots+\alpha_{n-1}^\varrho dy_{n-1}$$
$$(\varrho=1,\ldots,p),$$

wo die Grössen $\lambda_k^i$, $\alpha_k^i$ und $y_i$ Functionen von $x_1,\ldots,x_n$ bedeuten und die Coefficienten $\alpha_k^i$ Functionen von $y_1,\ldots,y_{n-1}$ sein sollen. Diese Reduction ist nur unter gewissen Bedingungen zwischen den Coefficienten möglich, bei deren Ableitung die Fälle $p+n$ ungerade und gerade sich wesentlich verschieden zeigen. Bezeichnet man:

$$\frac{\partial a_i^\varrho}{\partial x_s}-\frac{\partial a_s^\varrho}{\partial x_i}=a_{is}^\varrho,$$

so erhält man im ersten Fall für $\varrho=1,\ldots,p$ die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a_{\sigma 1}^\varrho & \ldots & a_{\sigma n}^\varrho & -a_\sigma^1 & \ldots & -a_\sigma^p \\ a_1^s & \ldots & a_n^s & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial y}{\partial x_n} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{pmatrix}\sigma=1,2,\ldots,n\\ s=1,2,\ldots,p\end{pmatrix},$$

worin eine Zeile, z. B. $a_1^\varrho \dots a_n^\varrho\ 0 \dots 0$, auszulassen ist. Diese Determinanten ergeben $p$ partielle Differentialgleichungen:

$$A_{(y)}^\varrho = A_1^\varrho \frac{\partial y}{\partial x_1} + \cdots + A_n^\varrho \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0 \qquad (\varrho = 1, \dots, p).$$

Damit obige Reduction möglich sei, müssen diese Gleichungen dieselben Lösungen $y_1, \dots, y_{n-1}$ besitzen, und hieraus ergeben sich die Bedingungen:

$$\frac{A_1^\varrho}{A_1^1} = \frac{A_2^\varrho}{A_2^1} = \cdots = \frac{A_n^\varrho}{A_n^1} \qquad (\varrho = 2, \dots, p).$$

Die Anzahl dieser Bedingungen kann auf $(p-1)(n-p-1)$ von einander unabhängige reducirt werden. Im zweiten Fall ist die Reduction in der obigen Weise nicht möglich; dagegen erhält man:

$$\lambda_k^1 U^1 + \cdots + \lambda_k^p U^p = V_k dx_1 + \alpha_2^k dy_2 + \cdots + \alpha_{n-1}^k dy_{n-1},$$

wo

$$V_k = \lambda_k^1 a_1^1 + \cdots + \lambda_k^p a_1^p - \left(\alpha_2^k \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_{n-1}^k \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_1}\right)$$

zu setzen ist. Hierauf wird der Fall behandelt, dass unter den $x_1, \dots, x_n$ mehrere Bedingungsgleichungen bestehen, und alsdann diese Reduction zur Integration des partiellen Differentialgleichungssystems erster Ordnung benutzt:

$$\varphi_k(u^1, \dots, u^p, x_1, \dots, x_m, u_1^1, \dots, u_m^1, \dots, u_1^p, \dots, u_m^p) = a_k$$
$$(k = 1, \dots, p),$$

wo $u_s^r = \frac{\partial u_r}{\partial x_s}$ ist, und als Beispiel wird der Fall behandelt, dass $\varphi_k$ die Variabeln $u^1, \dots, x_m$ beliebig, aber nur die Derivirten von $u^k$ enthält. Zum Schluss werden die Factoren $\lambda_k^i$ und deren Determinante $\Delta$ ermittelt. Sh.

A. J. Stodólkiewicz. Sur le problème de Pfaff. C. R. CXV. 592-595.

Wenn die totale Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n = 0$$

zwei Integrale hat, so existiren gewisse Integrabilitätsbedingungen, welche in der vorliegenden Note abgeleitet werden. Zu dem Ende wird angenommen, dass die Integrale der obigen Gleichung gleich-

zeitig Integrale des Systems:

$$A_{s1}dx_1 + A_{s2}dx_2 + \cdots + A_{sn}dx_n = 0 \qquad (s = 1, 2)$$

sind. Als Integrabilitätsbedingung ergiebt sich, dass fünf bestimmte Determinanten verschwinden müssen. Der Weg zur Integration der vorgelegten Gleichung wird schliesslich angegeben. Sh.

---

F. Schur. Ueber die Zurückführung eines vollständigen Systems auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Leipz. Ber. XLIV. 177-183.

Im V. Bande der Math. Annalen (siehe auch Leipz. Ber. 1891; F. d. M. XXIII. 345) hat Hr. A. Mayer die Integration eines vollständigen Systems von $q$ homogenen, linearen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in $n$ Veränderlichen zurückgeführt auf die Integration eines Systems von $n-q$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung; hierzu war die Reduction des vollständigen Systems auf die Mayer'sche Normalform nötig, welche allerdings nur algebraische Operationen erfordert. Der Verfasser zeigt nun, dass auch ein zur Integration des vollständigen Systems dienendes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen gefunden werden kann ohne vorherige Reduction des vollständigen Systems auf die Mayer'sche Normalform. Wbg.

---

É. Picard. Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. R. CXIV. 805-807.

É. Picard. Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Journ. de Math. (4) VIII. 217-232.

Die Abhandlung giebt eine Verallgemeinerung der Theorie der Differentialgleichungssysteme der Functionen einer complexen Variable. Sind $P$, $Q$ und $P_1$, $Q_1$ Lösungen der Gleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

so genügen $P_1$ und $Q_1$, als Functionen von $P$ und $Q$ betrachtet,

den Gleichungen von derselben Form:

$$\frac{\partial P_1}{\partial P} = \frac{\partial Q_1}{\partial Q}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial Q} = -\frac{\partial Q_1}{\partial P}.$$

Hierdurch wird Verf. auf das Problem geführt, ein System von $m$ Gleichungen, welche lediglich die partiellen Ableitungen erster Ordnung der $n$ Functionen ($n \leqq m$) $P_1, \dots, P_n$ enthalten, nämlich

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_n}, \quad \dots, \quad \frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

derart zu finden, dass, wenn man ein zweites Lösungssystem $Q_1, \dots, Q_n$ wählt, die Functionen $P_1, \dots, P_n$, als Functionen von $Q_1, \dots, Q_n$ betrachtet, den nämlichen Gleichungen:

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial Q_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial P_n}{\partial Q_n}\right) = 0$$

genügen. Die völlige Lösung dieses Problems mit Hülfe der Lie'schen Gruppentheorie hat der Verf. in der zweiten Abhandlung durchgeführt, das Resultat aber schon C. R. CXII. 1399-1403 angegeben, worüber F. d. M. XXIII. 1891. 411 referirt worden ist. Dieses Verfahren lässt sich leicht erweitern für den Fall, dass nicht nur Ableitungen erster, sondern auch höherer Ordnung in den Gleichungen vorkommen. Für Ableitungen zweiter Ordnung wird der Weg zur Aufstellung der Gleichungssysteme vollständig angegeben. Alsdann wendet sich Verfasser zur speciellen Betrachtung der Gleichungen erster Ordnung mit zwei und drei Variabeln. Im ersten Fall wird man (ausser dem System der Functionen einer complexen Variable) allein zu dem System:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \lambda \frac{\partial P}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y}\right)^k,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} + \lambda \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda \frac{\partial P}{\partial y}\right)^k$$

geführt, wo $\lambda$ und $k$ zwei Constanten bedeuten.

Im zweiten Falle existiren zahlreiche Systeme, die im allgemeinen wenig Interesse darbieten; beschränkt man sich aber auf den Fall, dass die Anzahl der Gleichungen 3 sei, so wird man allein auf zwei Systeme geführt, welche der Verf. ableitet.

Sh.

J. McCowan. On the solution of non-linear partial differential equations of the second order. Edinb. M. S. Proc. X. 63-70.

Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln und mit einer abhängigen werden betrachtet. Die Methode besteht in der Vertauschung der abhängigen Veränderlichen, indem man setzt $z' = \varphi(x, y, z, p, q)$, und ihre Wirksamkeit wird in manchen Fällen nachgewiesen. Ihre Beziehung zu der Methode der Reciprocation (Legendre's Transformation) wird auch angemerkt.

Gbs. (Lp.)

---

Elliot. Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 329-374.

Ein Auszug aus der vorliegenden Abhandlung erschien in den C. R. CXIII. 495-498; über denselben ist F. d. M. XXIII. 1891. 393 referirt worden. Sh.

---

S. Lie. Ueber einige neuere gruppentheoretische Untersuchungen. Leipz. Ber. XLIV. 297-305.

Diese Note beschäftigt sich mit Schur's gruppentheoretischen Arbeiten und setzt auseinander, inwiefern die Gruppentheorie durch diese Arbeiten gefördert worden ist. Schur hat nämlich erstens für einzelne unter den Fundamentalsätzen der Gruppentheorie neue, einfache Beweise geliefert, und zweitens hat er die Erledigung der Aufgabe, alle $r$-gliedrigen transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung zu bestimmen, wesentlich gefördert. El.

---

F. Umlauf. Ueber die Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen insbesondere der Gruppen vom Range Null. Diss. Leipzig. (1891.) 79 S.

Der erste Abschnitt dieser Arbeit (bis S. 32) enthält eine zusammenhängende Darstellung gewisser Sätze über die charakteristische Gleichung und über die Zusammensetzung einer $r$-gliedrigen

Gruppe, Sätze, die grösstenteils von den Herren Lie und Killing herrühren (F. d. M. XX. 1888. 368). Da die Beweise der Killing'schen Sätze bei Killing zum Teil noch nicht ganz befriedigend waren, so werden sie nun hier vollkommen streng bewiesen. Der zweite Abschnitt handelt über die Gruppen vom Range Null (nach Killing's Bezeichnung). Auch hier werden einige Killing'sche Sätze neu bewiesen oder berichtigt. Sodann werden im Lie'schen Sinne alle Typen von Zusammensetzungen bestimmt, die eine $r$-gliedrige Gruppe vom Range Null haben kann, wenn $r \leqq 6$ ist, und in den Fällen $r = 7, 8, 9$ werden wenigstens gewisse Klassen von Gruppen dieser Art erledigt. (Der Titel dieser Abhandlung ist auf S. 406 von Bd. XXIII unrichtig angegeben.) El.

---

S. Lie. Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions. C. R. CXIV. 334-337.

Der Verfasser geht von seinem alten Satze aus, dass jede transitive Gruppe von vertauschbaren Transformationen in $n$ Veränderlichen auf die Form:

$$\Phi_k(y_1, \ldots, y_n) = \Phi_k(x_1, \ldots, x_n) + t_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

gebracht werden kann, und bemerkt, dass es unter diesen Gruppen unendlich viele giebt, deren endliche Transformationen algebraisch sind, obwohl die $\Phi_k$ transcendent sind. Er bemerkt u. a., dass man nach dem Abel'schen Theoreme derartige Gruppen erhält, wenn man

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_k(x_1) + \cdots + \varphi_k(x_n)$$

setzt, unter $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ geeignete Abel'sche Integrale verstanden, und dass Hr. Picard eine ganz neue Klasse derartiger Gruppen angegeben hat. Hieran anknüpfend, werden Sätze aufgestellt, die zu entscheiden gestatten, ob man aus einem Gleichungssysteme von besonderer Form durch Elimination gewisser Veränderlicher eine algebraische Relation zwischen den übrigen erhält.

El.

---

F. ENGEL. Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projectiven Gruppe durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe. I. Leipz. Ber. XLIV. 279-291.

Die Arbeit ist veranlasst durch die Bemerkung, dass nicht jede endliche Transformation

$$x' = a_1 x + a_2 y, \quad y' = a_3 x + a_4 y \qquad (a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1)$$

der sogenannten speciellen linearen homogenen Gruppe der Ebene von einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt ist. Nun hat Hr. Lie bewiesen, dass in jeder endlichen continuirlichen Gruppe mit paarweise inversen Transformationen jede endliche Transformation der Gruppe, die in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation liegt, von einer infinitesimalen Transformation der Gruppe erzeugt ist. Demnach lag es nahe, zu fragen, wie weit sich die betreffende Umgebung der identischen Transformation bei den wichtigsten projectiven Gruppen erstreckt. Es stellt sich dabei heraus, dass jedenfalls bei der allgemeinen projectiven und bei der allgemeinen linearen homogenen Gruppe jene Umgebung alle Transformationen der Gruppe ohne Ausnahme umfasst, ein Satz, der übrigens früher schon von Hrn. Study gefunden, aber noch nicht veröffentlicht war. Einer zweiten (mittlerweile erschienenen) Arbeit blieb die Durchführung der besprochenen Untersuchung für die projective Gruppe einer Mannigfaltigkeit zweiten Grades und für die eines linearen Complexes vorbehalten.

El.

F. ENGEL. Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. VI, VII. Leipz. Ber. XLIV. 43-53, 292-296.

Nr. VI hat den Titel: „Nochmals die kanonische Parametergruppe" und beschäftigt sich, ebenso wie die in F. d. M. XXIII. 1891. 379 besprochene Note, mit der Darstellung, die Hr. Schur für die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe gegeben hat. Nach Schur sind nämlich die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe, die zu einer $r$-gliedrigen Gruppe gehört, Quotienten beständig convergenter Potenzreihen. Es wird nun gezeigt, dass der gemeinsame Nenner dieser Quotienten

als ein beständig convergentes Product von unendlich vielen ganzen Functionen (gewissen Determinanten) dargestellt werden kann, und dass also alle Nullstellen dieses Nenners angebbar sind. Die betreffende Productzerlegung beruht auf der bekannten Productzerlegung von $(e^x - 1)/x$. Am Schlusse werden noch gewisse Differentialgleichungen für die infinitesimalen Transformationen der kanonischen Parametergruppe aufgestellt.

Nr. VII: „Ueber reelle irreducible Gruppen von Berührungstransformationen". Hier wird der von Hrn. Lie herrührende Begriff „irreducible Gruppe von Berührungstransformationen" auf den Fall angewendet, dass man nur reelle Gruppen betrachtet. Es ergiebt sich unter anderem, dass die allgemeine projective Gruppe der Ebene durch eine imaginäre Berührungstransformation der Ebene in eine reelle irreducible Gruppe von Berührungstransformationen übergeführt werden kann, bei der die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung: $y'' = +i$ und $y'' = -i$ invariant bleiben. Man erhält auf diese Weise zugleich eine zweite reelle Form für die Zusammensetzung der allgemeinen projectiven Gruppe. Aehnliches gilt im Raume von $n$ Dimensionen. El.

---

A. Paraf. Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre. Paris. 80 S. 4°.

Bericht in Abschnitt VII Cap. 1.

# Capitel 7.
## Variationsrechnung.

W. P. Ermakow. Variationsrechnung in neuer Darstellungsweise. Mosk. Math. Samml. XVI. 369-414. (Russisch.)

Eine Umarbeitung der in F. d. M. XXIII. 1891. 407 besprochenen Arbeit. Der Verf. lässt seine frühere Voraussetzung

(dass bei den Grenzen $\delta p_i = 0$) fallen, und es zeigt sich, dass dieser Umstand keine weiteren Verwickelungen nach sich zieht, da alle Glieder ausserhalb des Integralzeichens an den Grenzen jetzt auch (nur in Folge von $\delta x_i = 0$, $\delta y_i = 0$) verschwinden. Es wird gezeigt, dass wir die „charakteristische Function" $\varphi$ erhalten, wenn wir im Integrale

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1, y_2, \ldots, y'_1, y'_2, \ldots) + \Sigma(e_i \psi_i)] dx \equiv \int_{x_0}^{x} F . dx$$

statt $y_i$ ihre Werte (2) $y_i = \theta_i(x, c_1, \ldots, c_{2n})$ einführen, welche Integrale der Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sind, und nach der Integration die willkürlichen Constanten durch ihre Werte aus (2) und aus $a_i = \theta_i(x_0, c_1, \ldots, c_{2n})$ ersetzen. Si.

---

E. P. Culverwell. Researches in the calculus of variations. Lond. M. S. Proc. XXIII. 241-265.

Abweichend von dem sonst befolgten analytischen Verfahren, schlägt der Verf. einen einfachen, möglichst geometrischen Weg ein zur Ableitung der Bedingungen des Maximums oder Minimums eines bestimmten Integrals mit festen Grenzen. Die Abhandlung zerfällt in vier Teile; stets wird nur eine unabhängige Variable vorausgesetzt, doch können mehrere abhängige vorhanden sein. Im ersten Teil werden die bekannten Resultate für ein einfaches Integral aufgestellt; der zweite Teil behandelt die isoperimetrischen Probleme, der dritte solche Fälle, in denen Relationen zwischen den Variabeln bestehen, und der letzte solche Probleme, in denen Functionen von zwei oder mehreren Integralen vorkommen. Wie angedeutet wird, können die in den drei letzten Teilen gesondert vorkommenden Complicationen in einem Problem combinirt sein. Der Fall variabler Grenzen wird späterer Bearbeitung vorbehalten. Sh.

---

G. Kobb. Sur les maxima et les minima des intégrales doubles. Acta Math. XVI. 65-140.

Das Problem, mit welchem sich die vorliegende Abhandlung beschäftigt, lautet: Es soll eine Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

derart bestimmt werden, dass diese Variabeln auf einer bestimmten Curve gegebene Werte besitzen und das Integral:

$$J = \iint F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')du\,dv,$$

wo

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x'' = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \ldots$$

bedeutet, über diese Fläche erstreckt, grösser resp. kleiner ist als dasselbe Integral über eine andere Fläche, welche durch dieselbe Curve hindurchgeht und eine unendlich kleine Variation der ersteren ist. Man bemerkt, dass der Wert des Integrals nur von der Gestalt der Fläche, nicht aber von der Art abhängig ist, wie die Coordinaten $x$, $y$, $z$ ausgedrückt sind. Aus dieser Eigenschaft ergeben sich folgende vier Hauptgleichungen:

$$F = x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'} = x''\frac{\partial F}{\partial x''} + y''\frac{\partial F}{\partial y''} + z''\frac{\partial F}{\partial z''},$$

$$0 = x''\frac{\partial F}{\partial x'} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} + z''\frac{\partial F}{\partial z'} = x'\frac{\partial F}{\partial x''} + y'\frac{\partial F}{\partial y''} + z'\frac{\partial F}{\partial z''}.$$

Für die erste Variation des Integrals, wenn dasselbe über die Fläche:

$$\bar{x} = x + \xi, \quad \bar{y} = y + \eta, \quad \bar{z} = z + \zeta$$

erstreckt wird, ergiebt sich:

$$\delta J = \iint \left\{ \left[ \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) \right] \xi \right.$$
$$+ \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \right] \eta$$
$$\left. + \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) \right] \zeta \right\} du\,dv,$$

welches vermöge der obigen Gleichungen umgeformt werden kann in

$$\delta J = \iint G w\,du\,dv,$$

wo

$$w = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta$$

und $G$ ein bestimmter Differentialausdruck zweiter Ordnung ist. Damit $\delta J$ verschwinde, muss der von den Variationen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ unabhängige Factor $G$ verschwinden, und es bestimmt demnach die Differentialgleichung $G = 0$ die Flächen, für welche $J$ ein Maximum oder Minimum werden kann. Der zweite Teil ist der Untersuchung dieser Gleichung gewidmet im Anschluss an die Picard'schen Untersuchungen (Journ. de Math. (4) VI. 145-210, F. d. M. XXII. 1890. 357), und es ergiebt sich, dass zu der obigen notwendigen Bedingung noch zwei Ungleichheitsbedingungen für die Coordinaten $x$, $y$, $z$ hinzutreten müssen. Zur Unterscheidung eines Maximums von einem Minimum wird noch eine Function $E$ eingeführt, welche für alle Punkte der Fläche im Falle des Maximums negativ, im Falle des Minimums positiv ist. Sh.

---

# Siebenter Abschnitt.

## Functionentheorie.

### Capitel 1.

### Allgemeines.

U. Dini. Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. Deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig. B. G. Teubner XVIII + 554 S. 8°.

Das italienische Originalwerk ist in diesem Jahrbuche (X. 1878. 274) ausführlich besprochen worden. Wir dürfen uns daher darauf beschränken, diejenigen Punkte hervorzuheben, in welchen die deutsche Bearbeitung von dem Original abweicht.

Eine durchgreifende Aenderung hat das erste Capitel erfahren, welches dem Begriffe der Zahl gewidmet ist. Während Dini die Irrationalzahl in der Dedekind'schen Weise definirte, haben die Verfasser der deutschen Bearbeitung die Cantor'sche Definition vorgezogen, „weil sie jetzt wohl, wenigstens in Deutschland, sich des grössten Anhangs erfreut". Im übrigen haben die Herren Lüroth und Schepp eine getreue Uebersetzung des Originals geliefert und nur in einigen Zusatzparagraphen neuere Untersuchungen (über Punktmengen, Condensation der Singularitäten etc.) eingeschaltet. Sie haben ferner die beiden letzten sehr umfangreichen Capitel des Originals zur Erleichterung der Uebersicht in zehn Capitel gegliedert. Die Brauchbarkeit des Buches als eines Nachschlagewerkes ist dadurch wesentlich erhöht, dass der deutschen Bearbeitung eine Liste

der im Buche citirten Arbeiten und ein sorgfältig ausgearbeitetes Inhaltsverzeichnis hinzugefügt worden ist. — Eine eingehende Recension des Werkes ist neuerdings in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik aus der Feder des Herrn Alfred Pringsheim erschienen. Hz.

---

P. M. Pokrowsky. Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. Vorlesungen. Kiew. 1892. (Russisch.)

Capitel I. Die Functionen einer complexen Veränderlichen: Complexe Grössen; die Grundoperationen. Der Begriff der Function einer complexen Veränderlichen. Die monotropen und polytropen Functionen. Die holomorphen und meromorphen Functionen. Die Neumann'sche Kugel. Die Functionen einer complexen Veränderlichen, durch Reihen bestimmt.

Capitel II. Die Integration nach einer complexen Veränderlichen: Allgemeine Eigenschaften der Integrale mit einer complexen Veränderlichen. Die längs einer Kontur genommenen Integrale der Functionen einer complexen Veränderlichen. Das Theorem von Cauchy. Die Residuen und ihre Anwendung auf die bestimmten Integrale.

Capitel III. Die Entwickelungen der Functionen einer complexen Veränderlichen in Reihen und Producte: Darstellung der Function durch ein Integral längs einer Kontur. Die Reihen von Cauchy, Laurent und Fourier. Die Entwickelung der Functionen in unendliche Producte.

Capitel IV. Allgemeine Eigenschaften der Functionen einer complexen Veränderlichen: Die Grundsätze in Bezug auf die monotropen Functionen. Die Bestimmung der Functionen mit Hülfe der Differentialgleichungen. Die Untersuchungen von Weierstrass und Mittag-Leffler. Wi.

---

P. Bachmann. Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig. B. G. Teubner. X + 151 S. 8°.

Der Verfasser bietet dem mathematischen Publicum wiederum eine sehr dankenswerte Monographie dar, die namentlich auch den

Studirenden empfohlen sein möge. In der That giebt es wohl kaum ein mathematisches Gebiet, in dem die neuere Zeit so erhebliche Fortschritte gezeitigt hätte, als das der Irrationalzahlen und insbesondere die Untersuchungen über die Transcendenz von $e$ und $\pi$. In letzterer Hinsicht möchte der Referent nur den Wunsch aussprechen, dass das vorliegende Werk eine baldige zweite Auflage erlebe; denn es würde äusserst lehrreich für den Leser sein, zu verfolgen, wie die tiefsinnigen, aber auch schwierigen Betrachtungen von Hermite, Lindemann und Weierstrass über die Transcendenz von $e$ und $\pi$ durch andere, weit einfachere und geradezu elementare Methoden ersetzt werden können, die erst kürzlich von Hilbert, Hurwitz und Gordan entwickelt sind.

Das Bachmann'sche Buch zerfällt in zwei, wesentlich verschiedene Teile; einmal verbreitet es sich über die Natur der Irrationalzahlen und untersucht insbesondere die quadratischen und kubischen Irrationellen auf ihren arithmetischen Charakter hin, während der grössere Teil sich gerade mit den nicht algebraischen, d. h. transcendenten Zahlen beschäftigt und hier den Inhalt der einschlägigen Abhandlungen von Liouville, Lambert, Legendre, Hermite, Lindemann und Weierstrass im wesentlichen vorführt.

Als Definition einer Irrationalzahl wird die von Hrn. G. Cantor eingeführte und jetzt immer mehr zur Geltung kommende benutzt, wonach eine solche Zahl zunächst nur als Zeichen für eine gewisse unendliche Reihe rationaler Werte erscheint und erst die Anwendung der vier Species die Natur der neuen Zahlen näher aufschliesst.

Wenn es der Verf. vorzieht, die irrationale Zahl lieber durch zwei gegen einander convergirende Wertreihen zu definiren, so ist Referent doch der Ansicht, dass der anfangs hierdurch gewonnene Vorteil einer grösseren Anschaulichkeit bei dem weiteren Operiren mit den vier Species, insonderheit der Division, wieder verloren geht.

Der Satz, dass eine quadratische Irrationelle durch einen periodischen Kettenbruch charakterisirbar ist, wird, abgesehen von einigen Vereinfachungen, nach Lagrange abgeleitet; von Interesse ist u. a. eine Anwendung des Fehlergesetzes der Kettenbrüche auf

die Auflösung der Pell'schen Gleichung (bei positiver Discriminante).

Der Verf. wendet sich nunmehr zu den transcendenten Zahlen und beweist zunächst deren Existenz nach Liouville. Dieser ungemein instructive Nachweis stützt sich auf ein arithmetisches Kennzeichen der algebraischen Irrationellen überhaupt. Denkt man sich nämlich eine positive Wurzel einer ganzzahligen irreducibeln Gleichung in einen Kettenbruch entwickelt, dessen Teilnenner mit $p_0, p_1, p_2, \ldots$, dessen Näherungsbrüche mit $\frac{c_0}{c_0^1}, \frac{c_1}{c_1^1}, \frac{c_2}{c_2^1}, \cdots$ bezeichnet seien, so ist $p_i < k(c_i^1)^{n-2}$, wo $k$ eine gewisse endliche Constante bedeutet. Da man aber Kettenbrüche bilden kann, bei denen, wie gross auch $k$ und $n$ gewählt werden mögen, die angegebene Ungleichung nicht erfüllbar ist, so giebt es transcendente Zahlen.

Sodann führt der Verf. die Betrachtungen über $e$ und $\pi$ vor, welche Lambert und, an ihn anknüpfend, Legendre angestellt haben, Betrachtungen, die, wenn auch durch die neuere Zeit gänzlich überholt, doch historisch von besonderem Interesse sind. Dieselben beruhen auf allgemeineren Kettenbruchentwickelungen von $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ und $\operatorname{tang} x$: hieraus gehen Sätze hervor, wie, dass jede Potenz von $e$ mit rationalem Exponenten, sowie die Zahlen $\pi$ und $\pi^2$ irrational sind.

Den Wendepunkt in der Geschichte der Zahl $e$ bezeichnet die klassische Untersuchung von Hermite, wodurch die Transcendenz von $e$ zuerst erhärtet wurde.

Hermite geht von zwei unendlichen Reihen von Functionen aus, die durch Integration resp. Differentiation von $A = \sin x$ entstehen, nämlich einmal:

$$A_1 = \int_0^x xA\,dx, \quad A_2 = \int_0^x xA_1\,dx \quad \text{etc.},$$

andererseits, für $\mathfrak{A} = \frac{\sin x}{x}$,

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}}{dx}, \quad \mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{A}_1}{dx} \quad \text{etc.}$$

Durch Vergleichung findet man eine Recursionsformel für die $A$, welche sofort zu dem Lambert'schen Kettenbruche für $\operatorname{tg} x$ führt; andererseits ergiebt die partielle Integration direct $A_n$ in der Gestalt

$$A_n = \psi(x)\sin x + \chi(x)\cos x,$$

wo $\psi$, $\chi$ gewisse ganze ganzzahlige Functionen sind.

Diese Darstellung lässt erkennen, warum weder $\pi$ noch $\pi^2$ rational sein kann. Denn man kommt zu dem Widerspruche, dass eine ganze Zahl als bestimmtes Integral von einem Werte zwischen 0 und 1 erschiene.

Auf dem angedeuteten Wege kann man aber fortfahren, indem man sich weitere Functionen

$$A_n' = \int_0^x A_n dx, \quad A_n'' = \int_0^x A_n' dx \quad \text{etc.}$$

construirt, die ähnliche Darstellungen wie $A_n$ gestatten.

Hierauf stützt sich der Satz, dass die Exponentialfunction $e^x$ in ganz bestimmter Weise durch rationale Functionen angenähert werden kann, weiterhin aber auch eine ganze Reihe von Exponentialfunctionen von der Form $e^{z_i x}$, wobei die Näherungsbrüche alle denselben Nenner haben.

In diese Näherungsdarstellung geht noch eine ganze Zahl $m$ als Parameter ein; für successive Werte von $m$ besteht dann zwischen den Zählern und Nennern der aufeinander folgenden Systeme ein ähnlicher Zusammenhang wie bei den gewöhnlichen Kettenbrüchen.

Dies ist die wesentliche Grundlage des Hermite'schen Beweises für die Transcendenz von $e$. Denn wäre $e$ algebraisch, d. h. bestände zwischen Potenzen von $e$ eine ganzzahlige Gleichung mit Coefficienten $N$, so kann man gewisse lineare Combinationen der $N$ bilden, die ganze Zahlen sind, aber doch verschwinden müssen, da sie in der Form bestimmter Integrale geschrieben werden können, die einen beliebig kleinen Wert haben. Aus dem Bestehen jener linearen Gleichungen kann aber gefolgert werden, dass die $N$ einzeln verschwinden müssen.

Der Lindemann'sche Beweis für die Transcendenz von $\pi$ be-

ruht auf einem ähnlichen Grundgedanken. Da $e^{\pi i} = -1$ ist, so ist klar, dass $\pi i$ und damit auch $\pi$ transcendent sein muss, sobald sich zeigen lässt, dass $\zeta$ nicht rational sein kann, so oft $\zeta$ eine algebraische Zahl ist. Es genügt sogar hierbei, $\zeta$ als eine ganze algebraische Zahl anzunehmen.

Seien $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ die Wurzeln der Gleichung, welcher $\zeta$ genügt, $M_1, M_2, \ldots, M_r$ die Coefficienten der Gleichung mit den Wurzeln $e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2}, \ldots, e^{\zeta_r}$, so kommt der Nachweis darauf hinaus, dass keine ganzzahlige Gleichung der Form:

$$N_0 + M_1 N_1 + M_2 N_2 + \cdots + M_r N_r = 0$$

bestehen kann.

Die Durchführung stützt sich auf Identitäten zwischen bestimmten Integralen, die eine gewisse Analogie mit den von Hermite benutzten besitzen. Die besondere Schwierigkeit liegt jetzt aber darin, dass die auftretenden Integrale nicht mehr reell sind, und somit eine eingehende Untersuchung des Integrationsweges erforderlich wird.

Es stellen sich dabei zwei Hauptfälle heraus: der leichtere ist der, wo die algebraisch verschiedenen Werte der Ausdrücke $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$, etc. sämtlich auch numerisch ungleich sind, der weit schwierigere Fall dagegen, wenn das Letztere nicht zutrifft.

Herr Bachmann substituirt daher in diesem zweiten Falle einen einfacheren Beweis von Weierstrass, der sich wesentlich darauf stützt, dass eine gewisse, aus ganzzahligen ganzen Functionen gebildete Determinante nicht Null sein kann.

Der Referent ist sich wohl bewusst, wie unvollkommen seine Skizzirung der obigen Beweise ist: dieselbe verfolgte auch nur den Zweck, den Leser anzuregen, das Nähere der übersichtlichen und klaren Exposition in dem Werke selbst zu entnehmen.

Das Schlusscapitel reproducirt eine Abhandlung des Verfassers über die kubischen Irrationellen. Wenn auch der Nachweis nicht gelingt, dass der von Jacobi herrührende Kettenbruch-Algorithmus periodisch ist, so zeigt sich doch, dass die in Rede stehende Frage in einem merkwürdigen Zusammenhange mit gewissen Hermite'schen Definitionen der „reducirten Formen“ höherer Art steht.

Damit eröffnet sich eine weite Perspective für künftige Forschungen auf diesem ebenso wichtigen, wie schwierigen Gebiete.

My.

---

J. Kraus. Neue Grundlagen einer allgemeinen Zahlenlehre I. Schlömilch Z. XXXVII. 321-339.

Wie eine beliebige reelle (positive) Zahl $z$ stets und nur auf eine einzige Weise als ein im allgemeinen unendlicher Decimalbruch darstellbar ist, so gilt bekanntlich dasselbe auch noch, wenn man statt der „Grundzahl“ 10 eine beliebige ganze positive Zahl $a$ als Grundzahl wählt. Die Coefficienten ($<a$) der entsprechenden Potenzreihe heissen die Ziffern von $z$ im Systeme ($a$).

Der Verf. fragt nun zuerst nach den Transformationsgesetzen, welchen die Ziffern einer Zahl $z$ unterliegen, wenn man die Grundzahl ändert. Daran schliesst sich von selbst die Aufgabe, wie man eine „invariante“ Eigenschaft einer Zahl $z$, d. h. eine solche, welche von der Auswahl der Grundzahl unabhängig ist, in einer entsprechenden „invarianten“ Gesetzmässigkeit in der Aufeinanderfolge der Ziffern zum Ausdruck bringen kann.

Dass derartige Fragen eine gewisse Berechtigung haben, ist wohl sofort zuzugeben: wenn indessen der Verf. seinen Ansatz zu einer Grundlage für eine neue Auffassung und Behandlung der Zahlenlehre machen will, so erhebt sich vor der Hand das Bedenken, ob die gemeinten „invarianten“ Gesetze für die Ziffern einer Zahl so einfach sein werden, um eine neue Ableitung der Gesetze der elementaren Zahlentheorie zu rechtfertigen.

Den Ausgangspunkt bildet die Untersuchung des Zusammenhanges eines vorgelegten echten Bruches $z$ in zwei beliebigen Zahlensystemen. Vermöge eines, dem euklidischen nachgebildeten Algorithmus gelingt es, $z$ in eine eigentümliche, nach Potenzen zweier Grundzahlen $a, a'$ fortschreitende Doppelreihe zu entwickeln. Durch Vertauschung von $a$ mit $a'$ ergiebt sich dann die Lösung der gestellten Frage; dieselbe gestaltet sich besonders einfach, wenn $a, a'$ der Congruenz $aa' \equiv 1$ (mod. $k$) genügen. Dann besitzen nämlich die Perioden der Darstellungen des echten Bruches $z_k$ in den Zah-

lensystemen ($\alpha$) und ($\alpha'$) gleich viele Stellen, und die beiderseitigen Ziffern lassen sich durch eine, auch in den $\alpha$, $\alpha'$ lineare Recursionsformel ermitteln.

Die angedeutete Entwickelung eines Bruches in eine Doppelreihe lässt sich auf eine beliebige Zahl ausdehnen. My.

## Th. Molien. Ueber Systeme höherer complexer Zahlen.

Math. Ann. XLI. 83-156.

Es handelt sich um die schon mehrfach (erst neuerdings wieder von Peirce, Scheffers, Study u. a.) behandelte Aufgabe, die Zahlensysteme in sachgemässer Weise zu klassificiren und aufzuzählen, für welche die Addition das associative und commutative Gesetz befolgt, die Multiplication das associative und beiderseitig distributive (nicht aber notwendig das commutative).

Es liegt nahe, zu dem Zwecke ein Zahlensystem auf eine Normalform zu bringen, mit deren Hülfe eine Vergleichung irgendwie vorgelegter Zahlensysteme unmittelbar ermöglicht wird. Um eine derartige, theoretisch wie praktisch möglichst geeignete Normalform zu gewinnen, wird ein eigenartiger Weg eingeschlagen.

Zunächst werden die wichtigen Begriffe von begleitenden und von ursprünglichen Zahlensystemen entwickelt.

Seien $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Grundzahlen eines Zahlensystems, so besitzt irgend eine Zahl $x$ des Systems die Form $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, wo die „Parameter“ $x_i$ gewöhnliche complexe Zahlen bedeuten. Die Addition zweier Zahlen des Systems deckt sich mit der Addition der entsprechenden Parameter.

Da für die Multiplication das distributive Gesetz gelten soll, so muss das Product $x$ zweier Zahlen $x, u$ des Systems eine Zahl sein, deren Parameter aus den Parametern der beiden Factoren bilinear (mit constanten Coefficienten $a$) gebildet sind.

Diese Gleichungen heissen die „Productgleichungen“ des Systems; damit die Multiplication associativ und noch die Division eine im allgemeinen eindeutige sei, haben die Constanten $a$ gewissen Gleichungen und Ungleichungen zu genügen, die ein für allemal als erfüllt angesehen werden sollen.

An Stelle der Grundzahlen $e$ können ebensoviel linear unabhängige Zahlen $e$ des Systems gewählt werden.

Es kann nun der Fall eintreten, dass bei geeigneter Wahl der Grundzahlen eines vorgelegten Systems die $v$ ersten Parameter des Productes zweier Zahlen bloss mit Hülfe der $v$ ersten Parameter der Factoren bilinear gebildet sind; dann ergiebt sich leicht, dass dies die Productgleichungen eines neuen Zahlensystems sind, welches als ein das gegebene „begleitendes" bezeichnet wird. Ein Zahlensystem, das, ausser sich selbst, kein begleitendes besitzt, heisst ein „ursprüngliches" Zahlensystem. Solche sind z. B. die Hamilton'schen Quaternionen und die Sylvester'schen Nonionen.

Die Kenntnis der begleitenden ursprünglichen Systeme vermittelt nicht nur diejenige aller begleitenden Systeme, sondern ist auch für die Untersuchung der Structur des Zahlensystems von entscheidender Bedeutung.

Die ursprünglichen Systeme stehen nämlich zu einigen andern bekannten Fundamentalbegriffen in der innigsten Beziehung. Dahin gehören vor allem die „charakteristischen Gleichungen" und die „Ranggleichung".

Damit die Gleichung $\omega x = xu$, resp. $\omega x = ux$ besteht, wo $\omega$ eine gewöhnliche Grösse bedeutet, muss $\omega$ je einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades genügen; dies sind die beiden charakteristischen Gleichungen des Zahlensystems. Ersetzt man hier die Potenzen von $\omega$ durch die gleich hohen Potenzen von $u$, so erhält man jedesmal eine Identität. Die beiden so entstehenden Relationen sind jedoch nicht unabhängig von einander; unter den positiven Potenzen von $u$ muss es eine kleinste, $m^{\text{te}}$, geben, die sich linear durch die niedrigeren Potenzen von $u$ ausdrücken lässt. Die bezügliche Gleichung, ein Teiler der beiden obigen, heisst die Ranggleichung.

Wir heben hier nur das eine, für die Herstellung der Normalform wichtige Ergebnis hervor, dass die Anzahl der Grundzahlen eines ursprünglichen Zahlensystems gleich dem Quadrat des Grades der Ranggleichung ist.

Die Normalform eines ursprünglichen Zahlensystems selbst ist dadurch charakterisirt, dass die „Productgleichungen" die Gestalt

annehmen: $x'_{ik} = \sum_l x_{il} u_{lk}$ $(i, k, l = 1, 2, \ldots, n)$, also etwa im Fall $m = 2$:

$$x'_{11} = x_{11}u_{11} + x_{12}u_{21}, \quad x'_{12} = x_{11}u_{12} + x_{12}u_{22}, \quad x'_{21} = x_{21}u_{11} + x_{22}u_{21},$$
$$x'_{22} = x_{21}u_{12} + x_{22}u_{22}.$$

Ein beliebiges Zahlensystem wird aus ursprünglichen zusammengesetzt. Obwohl eine Reihe von Hauptsätzen, auch der Gebrauch der Normalform, nicht neu ist, so verdient doch hervorgehoben zu werden, dass sich der Verf. zu ihrer Ableitung der Lie'schen Gruppentheorie nicht bedient. Die letztere dient, wie die Cayley'sche Theorie der Matrizen, hinterher zur Illustration und durchsichtigeren Präcisirung der erhaltenen Resultate.

Beispiele sind, wohl um den Umfang der Arbeit nicht zu stark werden zu lassen, unterdrückt worden. My.

---

H. Kühne. Beiträge zur Lehre von der *n*-fachen Mannigfaltigkeit. Diss. (Berlin.) Greifswald. W. Kunicke 57 S. 8⁰.

H. Kühne. Beiträge zur Lehre von der *n*-fachen Mannigfaltigkeit. Hoppe Arch. (2) XI. 353-407.

Der Verf. erweitert einige fundamentale Sätze aus der elementaren Geometrie der Ebene und des Raumes auf die (ebene) $n$-fache Mannigfaltigkeit.

Dahin gehört die lineale Construction des vierten harmonischen Punktes, sowie die Definition der harmonischen Lage durch Grössenverhältnisse.

Von besonderem Interesse ist die Untersuchung der conformen Abbildung einer ebenen $n$-fachen Mannigfaltigkeit auf eine andere. Es entsteht so als Verallgemeinerung eines bekannten Liouville'schen Satzes das Resultat, dass eine solche Abbildung nur auf zweierlei Art möglich ist; entweder sind beide Mannigfaltigkeiten ähnlich, oder aber es lässt sich die eine aus der andern mit Hülfe der Transformation durch reciproke Radien (und eine Coordinatentransformation) herleiten.

Indessen kommt dem Falle $n = 2$ dabei eine ganz specifische Eigenschaft zu.

Als Hülfsmittel benutzt der Verf. eine Reihe von Kronecker'schen Determinantensätzen und Begriffsbildungen, die der höheren Mannigfaltigkeitslehre angehören. My.

---

J. Bruno de Cabêdo. Definição analytica dos numeros complexos. Teixeira J. XI. 117-118.

Erste Definitionen aus der Theorie der complexen Zahlen. Tx. (Lp).

---

L. C. Almeida. Primeiras noções sobre o calculo das quantidades geometricas. Instituto de Coimbra XL.

Auseinandersetzung der Grundbegriffe der Theorie der complexen Zahlen und ihrer geometrischen Darstellung. Tx. (Lp.)

---

R. Bettazzi. Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale. Palermo Rend. VI. 173-195.

Die Werte einer reellen Veränderlichen $x$, für die eine Function $y$ definirt ist, bilden eine Punktgruppe, welche der Verfasser die Basisgruppe der Function nennt. Besteht die Basisgruppe aus allen Punkten des Intervalles $a \dots b$, so ist die Function $y$ in diesem Intervalle definirt. Ist $a$ ein Grenzpunkt der Basisgruppe, an welchen sich von rechts her unendlich viele Punkte der Gruppe anhäufen, so kommt für das Verhalten der Function in der Nachbarschaft von $x=a$ vor allem der Begriff der rechtsseitigen Grenzwerte von $y$ für $x=a$ in Betracht. Es ist $\alpha$ ein solcher Grenzwert, wenn nach beliebiger Annahme der positiven Grösse $\sigma$ die positive Grösse $\varepsilon$ so bestimmt werden kann, dass zwischen $a$ und $a+\delta$, wo $\delta$ irgend eine positive Zahl $<\varepsilon$ bezeichnet, Werte von $y$ vorkommen, die zwischen $\alpha-\sigma$ und $\alpha+\sigma$ liegen. Die Grenzwerte $\alpha$ bilden eine Menge, welche „abgeschlossen“ ist, d. h. die Grenzstellen der Menge gehören selber zu der Menge. Die obere und untere Grenze der Werte $\alpha$ sind nichts anderes als die rechtsseitigen Unbestimmtheitsgrenzen der Function $y$ für $x=a$.

Der Verfasser nennt ferner die Function $y$ für $x=a$ nach rechts uniconfin, multiconfin oder $\infty$-confin, je nachdem nur ein Grenzwert $\alpha$ oder eine endliche Anzahl oder eine unendliche Anzahl solcher Grenzwerte vorhanden sind. Im letzteren Fall heisst die Function omniconfin, wenn die Grenzwerte eine aus einem continuirlichen Stücke bestehende Punktgruppe bilden. Wenn $x=a$ zur Basisgruppe gehört, so heisst die Function für $x=a$ nach rechts geschlossen (chiusa), wenn sie nach rechts uniconfin ist und ihr Wert für $x=a$ mit dem einen existirenden Grenzwert $\alpha$ übereinstimmt. Dieser Begriff umfasst offenbar den der Stetigkeit als besonderen Fall. An diese Begriffe knüpft nun der Verfasser eine Reihe von Sätzen an, von denen die folgenden als Beispiele erwähnt seien: „Eine in dem Intervalle $a \dots b$ definirte und im Innern des Intervalles stetige Function ist für $x=a$ nach rechts entweder uniconfin oder omniconfin". „Wenn $y$ in einer abgeschlossenen Gruppe $g$, die zwischen $a$ und $b$ eingeschlossen ist, definirt und an allen Stellen von $g$ im Innern des Intervalles $a \dots b$ nach rechts uniconfin ist, so bilden die Punkte, in welchen die Function nicht geschlossen ist, eine abzählbare Menge." Speciell bilden die Unstetigkeitspunkte einer im Intervalle $a \dots b$ definirten und überall uniconfinen Function eine abzählbare Menge.

Hz.

---

**L. Maurer.** Ueber Functionen einer reellen Variabeln, welche Derivirte jeder Ordnung besitzen. Math. Ann. XLI. 377-402.

Der Verfasser behandelt die Frage nach den Bedingungen, unter welchen eine Function $f(x)$ der reellen Veränderlichen $x$ in jedem Punkte des Intervalles $x=a$ bis $x=b$ bestimmte endliche Ableitungen jeder vorgeschriebenen Ordnung besitzt. Um diese Frage in Angriff nehmen zu können, wird die beschränkende Voraussetzung eingeführt, dass die Function selbst und eine jede Ableitung derselben nur in einer endlichen Anzahl von Punkten des Intervalles $(a, b)$ verschwindet. Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend mit den folgenden Bedingungen:

1. $f(x)$ ist in dem Intervall $(a, b)$ stetig. Teilen wir ferner

dieses Intervall in $n$ gleiche Teile und bilden die dieser Teilung entsprechenden Functionaldifferenzen einer jeden beliebigen Ordnung, so findet von einer genügend grossen Zahl $n$ an für dieselben Folgendes statt:

2. In der Reihe der Functionaldifferenzen haben keine zwei auf einander folgenden den Wert 0. Hat eine Differenz den Wert 0, so haben die vorangehende und die nachfolgende Differenz entgegengesetzte Vorzeichen.

3. Ein Intervall, das einem Zeichenwechsel der in Rede stehenden Differenzenreihe zugeordnet ist, hat mit einem Intervall, das einem Zeichenwechsel der Differenzenreihe nächst höherer Ordnung zugeordnet ist, keinen Punkt gemein.

4. Die Anzahl der Zeichenwechsel, die in einer Differenzenreihe von gegebener Ordnung vorkommen, bleibt unterhalb einer endlichen Grenze, wie gross auch die Anzahl $n$ der Teilintervalle gewählt werden mag.

Diese sich so ergebenden Bedingungen sind umgekehrt hinreichend, um nachzuweisen, dass die Function $f(x)$ in jedem Punkte innerhalb des Intervalles $(a, b)$ bestimmte endliche Ableitungen jeder Ordnung besitzt. Ht.

---

M. Lerch. Sur la différentiation des séries. Teixeira J. XI. 107-114.

In diesem Aufsatze beweist Hr. Lerch den folgenden Satz: Man nehme an, dass die Glieder der Reihe:

$$f_0(x)+f_1(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

eindeutige und synektische Functionen innerhalb eines beliebigen endlichen Bereiches $A$ sind, dass ferner die Reihe in gleichem Grade convergirt, wenn die Variable $x$ die ganze Grenzlinie $S$ von $A$ durchläuft. Dann ist die Reihe auch convergent für alle inneren Punkte von $A$ und stellt eine analytische Function dar, deren Ableitungen durch Differentiation der Glieder der betrachteten Reihe erhalten werden. Tx. (Lp.)

Ch. de la Vallée Poussin. Note sur les séries dont les termes sont fonctions d'une variable complexe. Teixeira J. XI. 77-81.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn alle Glieder der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

synektische Functionen von $z$ innerhalb einer Fläche $A$ sind, und wenn diese Reihe innerhalb derselben Fläche gleichmässig convergirt, so ist die Summe der Reihe innerhalb $A$ eine synektische Function $f(z)$, und die Reihe der $\varrho^{\text{ten}}$ Ableitungen

$$\frac{d^\varrho u_0}{dz^\varrho} + \frac{d^\varrho u_1}{dz^\varrho} + \frac{d^\varrho u_2}{dz^\varrho} + \cdots + \frac{d^\varrho u_n}{dz^\varrho} + \cdots$$

convergirt gleichmässig in jeder innerhalb $A$ gelegenen Fläche $A'$ und besitzt zur Summe $\frac{d^\varrho f(z)}{dz^\varrho}$. Tx. (Lp.)

---

Ch. de la Vallée Poussin. Sur la série de Weierstrass représentant une fonction continue sans dérivée. Brux. S. sc. XVI A. 57-62.

Es handelt sich um die Function

$$F(x) = \sum_1^\infty b^n \cos(a^n \pi x),$$

worin $0 < b < 1$ ist, $a$ eine ungerade ganze Zahl grösser als 1, derart dass $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Der Verf. stellt Forschungen über diese Function nach einem Verfahren an, das sogar auf den Fall eines geraden $a$ anwendbar bleibt und die Grenze von $ab$ herabdrückt, wenn $a$ ungerade und grösser als 3 ist. Mn. (Lp.)

---

G. Peano. Esempi di funzioni sempre crescenti e discontinue in ogni intervallo. Rivista di Mat. II. 41-42.

Jede zwischen 0 und 1 liegende Zahl $x$ lässt sich, und zwar nur auf eine Weise, in einen Decimalbruch

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots = \sum_1^\infty {}_n \frac{\alpha_n}{10^n}$$

entwickeln, wenn diejenigen Decimalbrüche ausgeschlossen werden,

bei welchen die Ziffern $a$ von einer bestimmten ab sämtlich gleich 9 sind. Setzt man nun

$$f(x) = \sum_1^\infty {}_n \frac{a_n^2}{10^{2n}}, \quad \varphi(x) = \sum_1^\infty {}_n \frac{a_n}{10^{2n}},$$

so sind $f(x)$ und $\varphi(x)$ Functionen, die mit wachsendem Argumente zunehmen und für jedes rationale $x = p/q$, wo $q$ keine anderen Primfactoren als 2 und 5 enthält, unstetig werden. Diese Functionen sind integrabel, und zwar ist

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{32}{111}, \quad \int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{5}{111}.$$

Hz.

---

V. P. Ermakow. Zerlegung einer Function mit zwei singulären Punkten in eine Reihe, welche für alle Werte der Veränderlichen convergirt, ausgenommen die Punkte eines Kreisbogens oder einer geraden Linie. Mosk. Math. Samml. XVI. 518-543. (Russisch.)

Wenn man eine gegebene Function $F(x)$ in eine Function $\Phi(z)$ der neuen, mit $x$ durch eine Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(x, z) = 0$$

verbundenen Veränderlichen $z$ transformirt und $\Phi(z)$ in eine Potenzreihe

$$K + M_1 z + M_2 z^2 + M_3 z^3 + \cdots$$

zerlegt, so ist

$$(2) \qquad F(x) = K + M_1 \theta x + M_2 (\theta x)^2 + M_3 (\theta x)^3 + \cdots.$$

Man kann jetzt die Forderung stellen, die Parameter der Transformationsgleichung so zu bestimmen, dass die Reihe (2) möglichst schnell convergire.

Durch passende Wahl der Transformationsgleichung (1) kann bewirkt werden, dass das Convergenzgebiet der Reihe (2) mit der ganzen Ebene zusammenfällt, singuläre und einige andere Punkte ausgenommen. Wenn z. B. die Function $F(x)$ zwei singuläre Stellen $a$ und $b$ hat, so ist die Reihe

$$F(x) = K + M_1 \frac{x-a}{x-q} + M_2 \left(\frac{x-a}{x-q}\right)^2 + \cdots$$

bei passend gewähltem $q$ in der ganzen Ebene convergent, mit Ausnahme der Punkte des Kreisbogens, welcher die beiden singulären Stellen verbindet. Wi.

---

N. Markow. Ueber die Functionen, welche in einem gegebenen Intervalle am wenigsten von Null abweichen. St. Petersburg 1892. (Russisch.)

Die Arbeit schliesst sich an die Untersuchungen von Tschebyschew in der Abhandlung „Sur les questions des minima" und an die späteren Untersuchungen von Hrn. A. A. Markow an. Tschebyschew hat in der erwähnten Abhandlung die Aufgabe gestellt: wenn $p_0$ gegeben und gleich $a$ ist, eine solche Function $n^{\text{ten}}$ Grades

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots$$

zu finden, dass sie in dem Intervalle $(-1, +1)$ am wenigsten von Null abweicht; seine Untersuchungen ergaben als eine Lösung der Frage die Function $\frac{a}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)$. Der Verfasser verallgemeinert jetzt diese Aufgabe, indem er die hinreichenden und notwendigen Bedingungen giebt, damit die Function

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots,$$

wenn zwischen den Coefficienten $p_i$ eine lineare Gleichung mit gegebenen Coefficienten

$$a_0p_0+a_1p_1+\cdots+a_np_n=a$$

besteht, am wenigsten von Null abweicht.

Es wird auch die Frage verallgemeinert, welche von A. A. Markow in der Abhandlung „Ueber eine Mendelejew'sche Frage" (F. d. M. XXII. 1890. 283) gelöst wurde. Es wird nämlich das folgende Theorem bewiesen: Wenn die Nullabweichung einer ganzen Function $h(x)$, deren Grad nicht höher als $n$ ist, im Intervalle $(a, b)$ eine gegebene ganze Zahl $M$ nicht übertrifft, so übersteigt die Abweichung der $k^{\text{ten}}$ Derivirten $h^k(x)$ in demselben Intervalle nicht

$$\frac{2^kn^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\dots\{(n^2-(k-1)^2\}M}{1.3.5\dots(2k-1)(b-a)^k}.$$ Wi.

---

E. Phragmén. Sur un théorème de Dirichlet. Stockh. Öfv. XLIX. 199-206.

Es wird folgender Satz bewiesen: Es sei

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n,\ \ldots$$

eine Reihe positiver Grössen, $l_{n+1} > l_n$, $\lim_{n=\infty} l_n = \infty$, und

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots$$

eine andere unendliche Reihe reeller Grössen; es sei ferner

$$f(t) = \Sigma c_n,$$

wo die Summation sich auf alle Werte von $n$ bezieht, für welche $l_n \leqq t$ ist; man nehme an, dass

$$f(t) = ct + t^{\gamma}\psi(t) \qquad [0 < \gamma < 1]$$

ist, wo $\psi(t)$ für alle $t$ numerisch unterhalb einer endlichen positiven Grösse bleibt; dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\varrho}} = \frac{c}{\varrho} + \text{Potenzreihe in } \varrho \qquad (\varrho > 0),$$

wenigstens für $\varrho < \frac{1}{2}(1-\gamma)$.

Dieser Satz ist eine Erweiterung eines von Dirichlet gegebenen Satzes (J. für Math. XIX, XXI; Dirichlet's Werke I. 411). Auch in der Beweisführung schliesst sich der Verf. eng an Dirichlet an.

Bdn.

---

A. Pringsheim. Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich. Münch. Ber. XXII. 211-245.

Eine analytische Function $f(x)$ kann mit allen ihren Ableitungen in einem Gebiete mit Einschluss der Begrenzung des Gebietes endlich und stetig sein, ohne dass sie sich über das Gebiet hinaus analytisch fortsetzen lässt. Ein Beispiel einer derartigen Function rührt von Herrn Fredholm her und ist von Herrn Mittag-Leffler in Acta Math. XV (F. d. M. XXIII. 1891. 421) mitgeteilt worden. Dieses Beispiel lässt indessen nicht deutlich erkennen, wie solches Verhalten einer analytischen Function zu Stande kommen kann. In dieser Hinsicht vollkommenere Beispiele gewinnt der Verfasser, indem er die schon an sich principiell

wichtige Frage behandelt, ob eine Function $f(x)$ an einer Stelle $a$ auf dem Rande eines Gebietes, in welchem sie sich regulär verhält, mit allen ihren Ableitungen endlich und stetig sein kann, ohne an dieser Stelle die Taylor'sche Entwickelung zuzulassen. Ein solches Verhalten kann auf zwei Weisen zu Stande kommen: erstens dadurch, dass die Taylor'sche Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu$ divergirt, und zweitens dadurch, dass diese Reihe zwar convergirt, aber nicht $f(x)$ zur Summe hat. Der erste Fall tritt für die Function

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{a^{-\nu}+x},$$

der zweite Fall für die Function

$$f_1(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{a^{-\nu}+x}$$

ein. Das in Betracht kommende Gebiet ist irgend ein endliches Stück der Ebene, welches die gerade Strecke $(0, -1)$ ausschliesst und die Stelle $a = 0$ auf seiner Berandung trägt. Die Grösse $a$ ist eine positive Zahl, grösser als 1. Der zweite Fall wird übrigens auch durch das bekannte Cauchy'sche Beispiel $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ verwirklicht, welches indessen an einigen Mängeln leidet. Eine eingehendere Untersuchung der Reihen von der Form $\sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$ führt nun weiter zu folgendem Resultat. Bilden die $(a_\nu)$ eine durchweg ausserhalb des Einheitskreises um den Nullpunkt liegende Punktmenge, die auf dem Einheitskreise unendlich viele Grenzpunkte $a$ besitzt, so lassen sich die Grössen $c_\nu$ stets so bestimmen, dass

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{a_\nu - x} = \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda x^\lambda$$

im Einheitskreise regulär ist und mit allen Ableitungen auf der Peripherie dieses Kreises endlich und stetig ist. Ist der Grenzpunkt $a$ dann so beschaffen, dass in seiner Umgebung die $a_\nu$ nicht in Flächenteilen überall dicht sind, so ist $f(x)$ nicht nach Potenzen von $x - a$ entwickelbar. Insbesondere lässt sich $f(x)$ über den

Einheitskreis nicht analytisch fortsetzen, wenn solche Grenzpunkte $\alpha$ auf der Peripherie überall dicht verteilt sind. Nach diesem allgemeinen Satze lassen sich specielle Functionen $f(x)$ dieser Beschaffenheit in mannigfaltiger Weise bilden. Ein lehrreiches Beispiel anderer Art bildet die Function

$$\psi(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu!} e^{a^{\nu} ti},$$

wo $a$ eine ganze Zahl $\geqq 2$ und $t$ eine complexe Variable bezeichnet. Diese Function ist nämlich in der oberen Halbebene, die Axe der reellen Zahlen eingeschlossen, mit allen Ableitungen endlich und stetig und trotzdem nicht auf die untere Halbebene fortsetzbar. Eine einfache Rechnung ergiebt nämlich, dass die Taylor'sche Entwickelung von $\psi(t)$ an allen Stellen

$$t = \frac{\mu\pi}{a^p} \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; p = 0, 1, 2, \ldots)$$

divergirt. Wenn $a \equiv 3 \pmod{4}$ ist, so zeigt sich, dass die Taylor'sche Entwickelung an den Stellen

$$t = \frac{(\mu + \frac{1}{2})\pi}{a^p} \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; p = 0, 1, 2, \ldots)$$

convergirt, aber nicht den Wert von $\psi(t)$ darstellt. Hieran knüpft der Verfasser den Nachweis, dass die Frage, ob die Taylor'sche Reihe für alle Stellen eines Intervalles convergiren kann, ohne die Function darzustellen, zu verneinen ist. Aus dem Verhalten der Function $\psi(t)$ lassen sich unmittelbar die folgenden weiteren Schlüsse ziehen. Die Functionen

$$\psi_1(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\cos a^{\nu} t}{a^{\nu}}, \quad \psi_2(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\sin a^{\nu} t}{a^{\nu}}$$

sind für alle reellen Werte von $t$ mit allen Ableitungen endlich und stetig, lassen sich aber nicht auf complexe Werte von $t$ fortsetzen. Ferner: Die Function

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{x^{a^{\nu}}}{\nu!}$$

ist mit allen ihren Ableitungen im Innern und auf der Peripherie des Einheitskreises um den Nullpunkt endlich und stetig, ohne über diesen Kreis analytisch fortsetzbar zu sein. Hz.

---

J. Hadamard. Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journ. de Math. (4) VIII. 101-186. (Thèse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 86 S. 4°.)

Seit den Arbeiten von Abel und Cauchy weiss man, dass jeder regulären Function innerhalb eines gewissen Kreises eine Taylor'sche Entwickelung entspricht und umgekehrt, und Herr Weierstrass definirt die Function durch diese Entwickelung. Giebt man nun einen beliebigen Punkt $u$, so kann man im allgemeinen eine Reihe bilden, die nach Potenzen von $x$ fortschreitet und die Function in der Nähe des Punktes $u$ repräsentirt; eine Ausnahme hiervon bilden die sogenannten singulären oder kritischen Punkte, und es ist von grösster Wichtigkeit, wenn man die Function ausserhalb des Convergenzkreises fortsetzen will, diejenigen kritischen Punkte zu bestimmen, welche auf dem Kreise selbst liegen. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich daher die vorliegende Arbeit in erster Linie, indem sie hierin eine von Herrn Lecornu in den C. R. 1887 über diesen Gegenstand erschienene Note ergänzt und teilweise berichtigt. Die Methode, deren sich der Verfasser bedient, ist einer Abhandlung des Herrn Darboux „Sur l'approximation des fonctions de grands nombres" (Journ. de Math. (3) IV, F. d. M. X. 1878. 279) entnommen, in welcher der letztere als leitenden Gesichtspunkt den Satz aufstellt, dass die Aufsuchung des Hauptteiles der Coefficienten der Reihenentwickelung von der Art und Weise abhängt, in welcher die Function auf dem Convergenzkreis unendlich wird. Da ein näheres Eingehen auf den Stoff der Abhandlung ohne Wiedergabe der Formeln nicht möglich ist, so beschränken wir uns darauf, die Inhaltsübersicht mitzuteilen, welche der Verfasser in der Einleitung angiebt.

Die Abhandlung zerfällt in drei Teile: Im ersten Abschnitte wird nach Entwickelung einiger notwendigen Vorkenntnisse der Convergenzbezirk in allgemeiner Weise definirt, und die erhaltenen Resultate führen unmittelbar zu einem Kriterium, welches in gewissen Fällen das Vorhandensein eines oder mehrerer singulären Punkte erkennen lässt.

Der zweite Abschnitt ist einem Studium der polaren Unstetigkeiten gewidmet. Wenn die Function nur solche Unstetigkeiten

auf dem Convergenzkreise besitzt, so kann man sie analytisch fortsetzen und in jedem Kreise darstellen, wo sie meromorph ist.

Im dritten Abschnitte wird auseinandergesetzt, was man unter der Ordnung einer Function auf ihrem Convergenzkreise und in einem Punkte dieses Kreises zu verstehen hat; es werden die singulären Punkte einer Untersuchung unterzogen und nach ihrer Ordnung klassificirt. Ist diese Ordnung eine endliche Zahl, so ist es in ausgedehnten Fällen möglich, die singulären Punkte zu bestimmen, und in allen Fällen, die Function in jedem gewöhnlichen Punkte des Convergenzkreises zu berechnen. Mehrere der hier mitgeteilten Resultate hat der Verfasser bereits 1888 und 1889 der Akademie der Wissenschaften in Paris überreicht. Bm.

---

G. J. D. Mounier. Bewijs eener stelling uit de hoogere algebra. Nieuw Archief. XIX. 100-104.

Beweis des Satzes, dass eine Function nur auf eine Weise in eine nach Potenzen der Veränderlichen fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Mo.

---

H. Padé. Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. Suppl. 3-93. (Thèse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 93 S. 4°.

Die vorliegende Abhandlung giebt einen wesentlichen Beitrag zu der neuerdings mehrfach behandelten Frage der Darstellung analytischer Functionen durch Kettenbrüche. Der Verfasser geht von der Betrachtung derjenigen irreducibeln rationalen Functionen $U(x)/V(x)$ aus, welche eine gewöhnliche Potenzreihe $y$, die für $x=0$ nicht verschwindet, mit möglichster Annäherung darstellen. Er beweist zunächst den grundlegenden Satz: dass es unter allen Functionen $U/V$, deren Zähler höchstens vom Grade $p$, deren Nenner höchstens vom Grade $q$ ist, eine einzige giebt, für welche die Entwickelung von $y-U/V$ nach Potenzen von $x$ mit einer möglichst hohen Potenz von $x$ beginnt. Der Potenzreihe $y$ entspricht eine bestimmte Tafel von irreducibeln rationalen Functionen,

die dadurch hergestellt wird, dass man in dasjenige Feld der Tafel, in welchem sich die $p^{\text{te}}$ Vertical- und die $q^{\text{te}}$ Horizontalreihe kreuzen, die dem Zahlenpaare $(p, q)$ entsprechende Function $U/V$ einträgt. Nach einer näheren Untersuchung dieser Tafel von „Näherungsbrüchen" der Potenzreihe $y$ wendet sich der Verfasser zur Betrachtung der Kettenbrüche, wobei er die folgenden beiden Formen:

$$\text{(I)} \quad a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cfrac{\alpha_3}{a_3 + \cdots}} \qquad \text{und} \qquad \text{(II)} \quad \cfrac{\alpha_1}{a_1 + \cfrac{\alpha_2}{a_2 + \cdots}}$$

unterscheidet. Jeder dieser Brüche ist unendlich vieldeutig bestimmt, wenn man die Forderung stellt, dass die Elemente $a$, $\alpha$ Polynome und die Reihe der Näherungsbrüche vorgeschriebene irreducible (rationale) Functionen von $x$ sein sollen. Diese unendliche Vieldeutigkeit fällt aber fort, wenn man sich auf die Betrachtung „einfacher" Kettenbrüche beschränkt. Der Verfasser nennt einen Kettenbruch einfach, wenn die $\alpha$ (mit Ausnahme von $\alpha_1$, welches eine nicht verschwindende Constante sein muss) von der Gestalt $c.x^r$ sind, unter $c$ eine nicht verschwindende Constante, unter $r$ eine positive ganze Zahl verstanden, und wenn die $a$ Polynome von $x$ sind, die für $x = 0$ nicht verschwinden. Ein einfacher Kettenbruch (I) oder (II) ist durch die Reihe seiner Näherungsbrüche eindeutig bestimmt.

Unter den einfachen Kettenbrüchen sind weiter die „regulären" von besonderem Interesse. Diese sind dadurch charakterisirt, dass mit eventueller Ausnahme von (I) $a_1$, $\alpha_2$ oder (II) $\alpha_1$, $a_1$, $\alpha_2$ alle Partialnenner unter sich und alle Partialzähler unter sich den gleichen Grad besitzen. An diese Definitionen knüpft der Verfasser einige Sätze über die Convergenz einfacher Kettenbrüche und eine ausführliche Behandlung der Frage, wie man aus der einer Potenzreihe $y$ entsprechenden Tafel von Näherungsbrüchen die Brüche $U_1/V_1$, $U_2/V_2$, ... auszuwählen hat, damit diese die Näherungsbrüche eines einfachen oder, noch specieller, eines regulären Kettenbruches werden. Zum Schluss erläutert der Verfasser die erhaltenen Resultate an dem Beispiel der Exponentialreihe. Hz.

M. Hamy. Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. C. R. CXIV. 993-996.

Der Verfasser begründet die Darboux'sche Methode zur asymptotischen Darstellung der Functionen von grossen Zahlen mit Hülfe des Cauchy'schen Integralsatzes und der folgenden Lemmata: 1) Der Coefficient von $z^n$ in der Entwickelung von $(z-a)^h$ ist für grosse Werte von $n$ von der Ordnung $\frac{1}{|a|^n}\cdot\frac{1}{n^{1+h}}\cdot$ 2) Ist der Convergenzradius der Potenzreihe $\sum_0^\infty {}_n c_n A^n$ grösser als $R$, so ist $\lim_{n=\infty} c_n . n^p . R^n = 0$ für jede Wahl der ganzen Zahl $p$. Hz.

---

W. Kapteyn. Sur une formule générale de Cauchy. Darboux Bull. (2) XVI. 270-284.

Bezeichnen $y$, $z$, ... implicite Functionen von $x$, so lässt sich nach einer Formel von Cauchy (C. R. 1841) die Summe von gewissen Integralen der Form $\int_\xi^x f(x, y, z, \ldots)dx$ darstellen durch eine Summe von Residuen. Aus dieser Formel leitet der Verfasser das Abel'sche Theorem und dessen von Clebsch, Forsyth und Poincaré gegebene Erweiterungen her. Hz.

---

V. Pareto. Sur les fonctions génératrices d'Abel. J. für Math. CX. 290-323.

Der Verfasser giebt in der vorliegenden Abhandlung eine strengere Begründung für die Abel'sche Theorie der „fonctions génératrices". Diese Theorie knüpft an eine besondere Darstellungsform der Functionen an. Wenn nämlich die Function $\varphi(x)$ dargestellt ist in der Form

$$(1) \qquad \varphi(x) = \int e^{vx} f(v)\, dv,$$

so nennt Abel $\varphi(x)$ die „erzeugende Function" von $f(v)$ und umgekehrt $f(v)$ die „Determinante" von $\varphi(x)$. Die Beziehung zwischen $\varphi(x)$ und $f(v)$ kann man abkürzend durch die Gleichung

$f(v) = \text{Det}.\varphi(x)$ andeuten. Es erhebt sich zunächst die Frage, ob die Determinante einer beliebig gegebenen Function $\varphi(x)$ existirt. Um dies zu entscheiden, betrachtet der Verfasser den speciellen Fall, wo $\varphi(x) = A_\alpha x^\alpha + A_\beta x^\beta + \cdots + A_\mu x^\mu$ ist, unter $A_\alpha, \ldots, A_\mu, \alpha, \ldots, \mu$ Constanten verstanden. In diesem Falle ergiebt sich die Existenz von $\text{Det}.\varphi(x)$ aus der Theorie der $\Gamma$-Function. Indem man die Anzahl der Glieder, aus denen sich $\varphi(x)$ zusammensetzt, ins Unendliche wachsen lässt, geht $\varphi(x)$ in eine beliebige Function und, unter gewissen Convergenzbedingungen, $\text{Det}.\varphi(x)$ in die Determinante dieser beliebigen Function über.

Die Anwendungen, welche Abel von der Theorie der erzeugenden Functionen macht, bedürfen zu ihrer strengen Begründung ebenfalls gewisser Convergenzuntersuchungen, die der Verfasser allgemein durchführt und auf eine grosse Zahl von besonderen Fällen anwendet, bei welchen die verschiedenartigsten Reihenentwickelungen gewonnen werden. Als Beispiele derartiger Entwickelungen seien erwähnt eine von Kronecker herrührende Summenformel (F. d. M. XVII. 1885. 251) und die für irgend eine Function $F(x)$ unter gewissen Convergenzbedingungen gültige Gleichung

$$F(x+a) = F(x) + aF'(x+b) + \cdots + \frac{a(a-nb)^{n-1}}{n!} F^{(n)}(x+b) + \cdots,$$

die nach anderer Methode von Halphen untersucht worden ist (F. d. M. XIV. 1882. 367). Hz.

---

M. Lerch. Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der erzeugenden Functionen. Rozpravy. I. No. 33. (Böhmisch.)

Giebt es für eine determinirende Function $\varphi(a)$ eine erzeugende $f(x)$ derart, dass die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax} f(x)dx = \varphi(a)$$

für sämtliche positive, hinreichend grosse $a$ statthat, so giebt es keine zweite Function, welche dieselbe Beschaffenheit wie $f(x)$ hätte.

Für $f(x)$ ist ausser der Endlichkeit und Stetigkeit noch vorausgesetzt worden, dass für ein gewisses $c$

$$\lim_{x=\infty} e^{-cx} f(x) = 0$$

ist. Der Beweis stützt sich auf die Resultate der Herren Weierstrass und Runge betreffs der Darstellung willkürlicher Functionen.

Lh.

---

S. Pincherle. Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. Acta Math. XVI. 341-363.

Den Hauptinhalt der Arbeit bildet die Entwickelung einer gegebenen Function in eine Reihe, welche nach Functionen eines recurrenten Systems fortschreitet, dessen Recursionsformel bekannt ist. — Zu diesem Zwecke betrachtet der Verf. eine recurrente lineare Gleichung zwischen $p+1$ Grössen, welche von einem Index $n$ abhängen; die Coefficienten derselben sind ganze Polynome in $n$ vom Grade $m$. Eine Lösung dieser Gleichung hat zur erzeugenden Function (im Laplace'schen Sinne) ein Integral einer linearen Differentialgleichung $m^{\text{ter}}$ Ordnung, deren rechte Seite im allgemeinen ein ganzes Polynom ist, welches $m$ willkürliche Constanten enthält. Jeder Bestimmung dieser Constanten entspricht eine particuläre Lösung der recurrenten Gleichung. Insbesondere existirt eine Bestimmung der Constanten, für die das recurrente System eine erzeugende Reihe besitzt, welche in einem möglichst grossen Kreise convergirt: dieses System nennt der Verf. das ausgezeichnete Integral, „intégrale distinguée“, der recurrenten Gleichung, und er bestimmt dasselbe durch eine Methode, welche sich auf eine von ihm die „Heine'sche“ genannte Transformation gründet. Neben der gegebenen recurrenten Gleichung betrachtet der Verf. eine zweite, welche er die inverse der ersten nennt, und deren Integrale mit denen der gegebenen Gleichung bemerkenswerte Relationen besitzen. — Verf. nimmt nun an, dass in die Coefficienten der recurrenten Gleichung ein Parameter $x$ im ersten Grade eintritt; die Integrale dieser Gleichung, ebenso wie die ihrer inversen, sind dann Functionen dieses Parameters, und es gelingt dem Verf., eine gegebene analytische Function in eine Reihe zu entwickeln, welche nach den Functionen dieses Systems fortschreitet: mit Hülfe des ausgezeichneten Integrals der inversen Gleichung bildet er die Coefficienten dieser Reihenentwickelung und giebt auch ihre

Convergenzbedingungen an. — Diese Entwickelung stellt sich dar als die Verallgemeinerung der Entwickelung einer gegebenen Function in eine Reihe, welche nach den Nennern der reducirten Näherungsbrüche eines gegebenen algebraischen Kettenbruches fortschreitet; eine solche hat bereits Heine aufgestellt (Handbuch der Kugelfunctionen. 2. Aufl. Bd. I. 293), jedoch ohne Angabe der Convergenzbedingungen. — Als Ausgangspunkt diente dem Verf. die Arbeit von Poincaré „Sur les équations linéaires aux différentielles etc.“ (American J. VII. 203, F. d. M. XVII. 1885. 290).

Wbg.

---

A. Grévy. Sur les équations fonctionnelles. Darboux Bull. (2) XVI. 311-313.

Ist $x$ eine Nullstelle der Function $z-\varphi(z)$, welche der Ungleichung mod $\varphi'(x) < 1$ genügt, so ist nach den Untersuchungen von Hrn. Koenigs (Darboux Bull. (2) VII, Ann. de l'Éc. Norm. (3) I u. II; vgl. F. d. M. XV. 1883. 114, XVI. 1884. 376. u. XVII. 1885. 370) der Punkt, dessen Affix $x$ ist, das Centrum eines Kreises $C_x$, in dessen Innerem $\varphi(x)$ holomorph ist, und der Modul $\frac{\varphi(z)-x}{z-x}$ stets kleiner bleibt, als eine unter 1 liegende Grösse.

Ist $z$ das Affix eines Punktes dieses Kreises, so sind

$$z_1 = \varphi(z), \ \ldots, \ z_{i+1} = \varphi(z_i)$$

die Affixe von Punkten, welche regulär gegen den Punkt mit dem Affix $x$ convergiren. Nach Koenigs existirt dann im Innern des Kreises eine holomorphe Function, welche der Gleichung genügt:

$$F(z_1) = \frac{1}{g(z)} F(z),$$

wo $g(z)$ holomorph und $g(x)=1$ ist.

Dieses Resultat wird in der vorliegenden Note durch den Autor auf die Functionalgleichung:

$$f(z) = p_1(z)f(z_1) + p_2(z)f(z_2) + \cdots + p_n(z)f(z_n)$$

ausgedehnt, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_n$ holomorphe Functionen von $z$ im Bereiche des Punktes $x$ sind und $p_n(x)$ von Null verschieden ist.

Bm.

---

G. Vivanti. Sulla determinazione di quattro funzioni mediante un'equazione unica. Palermo Rend. VI. 100-108.

Aus Anlass eines mechanischen Problems war Hr. Bertrand 1857 auf die Aufgabe geführt worden, die allgemeine Form von vier Functionen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(y)$, $\Phi(y)$ zu bestimmen, welche der identischen Relation

$$(f-\varphi)^2+(F-yf')(\Phi-x\varphi')=0$$

genügen.

Der Verf. verallgemeinert die Aufgabe, indem er $2(n+1)$ Functionen $P_i(x)$, $Q_i(y)$ $(i=0,1,\dots,n)$ betrachtet, welche an die Identität

$$P_0Q_0+P_1Q_1+P_2Q_2+\cdots+P_nQ_n=0$$

gebunden sind.

Auf Grund des Ergebnisses, dass dann zwischen den $P$ resp. $Q$ gewisse lineare Abhängigkeiten bestehen müssen, gelingt es, die Bertrand'sche Identität auf elegante Weise zu integriren.

My.

---

G. v. Escherich. Ueber zwei simultane Functional-Gleichungen. Monatsh. f. Math. III. 178.

Untersuchung einer Function $f(x)$, welche zugleich den beiden Functionalgleichungen

$$f(x+k)=e^{g(x)}.f(x)$$

und

$$f(x+k')=e^{h(x)}.f(x)$$

genügt, worin $g(x)$ und $h(x)$ rationale Functionen von $x$ bedeuten.

Wbg.

---

A. Paraf. Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre. Toulouse Ann. VI. H. 1-75. (Thèse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 75 S. 4°.)

Die Abhandlung ist in drei Capitel geteilt. Das erste Capitel behandelt das von Hrn. H. A. Schwarz zuerst gelöste Problem, eine solche Function $u$ von 2 Veränderlichen $x$, $y$ zu finden, welche

im Inneren eines gegebenen Gebietes $S$ der $xy$-Ebene zugleich mit ihren ersten beiden partiellen Ableitungen stetig und eindeutig ist, die Differentialgleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ erfüllt und am Rande $s$ des Gebietes $S$ vorgeschriebene Werte $U(s)$ annimmt. Eine Function, welche den beiden ersten genannten Bedingungen genügt, wird zur Abkürzung eine im Gebiete $S$ harmonische Function genannt. Die Lösung dieses Problems geschieht mittels der von Hrn. Poincaré für den Fall dreier Veränderlicher angegebenen Methode. Zunächst setzt der Verfasser in klarer Weise die Haupteigenschaften des logarithmischen Potentials auseinander und beweist dann den folgenden Satz, auf welchem die Poincaré'sche Methode wesentlich beruht: Wenn in einem Punkte $P$ des Inneren eines Kreises sich die Masse 1 befindet, und man verteilt diese Masse auf der Peripherie des Kreises derart, dass die Dichtigkeit im Punkte $M$ der Peripherie umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung $MP$ wird, so hat die so erhaltene Massenbelegung in jedem ausserhalb des Kreises gelegenen Punkte das nämliche logarithmische Potential wie die ursprüngliche Masse, in jedem innerhalb des Kreises gelegenen Punkte dagegen ein kleineres Potential. Es geht aus diesem Satze unmittelbar hervor, dass auch jede andere beliebige im Inneren des Kreises gelegene Masse stets so auf der Peripherie verteilt werden kann, dass das Potential für die äusseren Punkte ungeändert bleibt, für die inneren dagegen kleiner wird. Diese Verteilung wird vom Verfasser nach Poincaré's Vorgange als die Ausfegung des Kreises bezeichnet. Es folgen nun die Beweise zweier von A. Harnack herrührenden Convergenzsätze; dieselben lauten: 1. Wenn die unendliche Reihe $u = u_1 + u_2 + \cdots$, deren Glieder harmonische positive Functionen in einem Gebiete $S$ sind, in einem Punkte dieses Gebietes convergirt, so convergirt sie gleichmässig im Gebiete $S$ und stellt dort eine harmonische Function dar. 2. Wenn unter Beibehaltung der nämlichen Bezeichnungen allgemein $u_n(A)$ in $U_n(s)$ übergeht, sobald der im Inneren gelegene Punkt $A$ in einen Punkt $s$ des Randes rückt, und wenn ferner die Reihe $U = U_1 + U_2 + \cdots$ auf dem ganzen Rande $s$ gleichmässig convergirt, so convergirt die

unendliche Reihe $u$ gleichmässig in $S$, stellt dort eine harmonische Function dar und nimmt auf dem Rande $s$ die Werte $U(s)$ an. Der Verfasser bestimmt endlich ein System von Kreisen $C_1, C_2, \ldots$, welche eine abzählbare Menge bilden, welche ferner sämtlich vollständig im gegebenen Gebiete $S$ liegen und von der Beschaffenheit sind, dass jeder Punkt des Inneren von $S$ wenigstens von einem jener Kreise umschlossen wird. Es wird dann noch ein Kreis $K$ construirt, dessen Mittelpunkt in $S$ liegt, und dessen Radius die grösste Längsausdehnung von $S$ um das Doppelte übertrifft.

Nunmehr macht der Verfasser die Annahme, dass eine im Inneren des Kreises $K$ holomorphe Function $V_0(x, y)$ bekannt ist, welche auf dem Rande $s$ des Gebietes $S$ sich auf $U(s)$ reducirt, und für welche überdies $\Delta V_0$ in $K$ beständig negativ bleibt. Das Potential der im Inneren von $K$ verteilt gedachten Masse von der Dichtigkeit $\varrho = \Delta V_0/2\pi$ werde mit $W_0$ bezeichnet, und ferner sei allgemein $W_n$ dasjenige Potential, welches entsteht, wenn man der Reihe nach mit den Kreisen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die Operation der Ausfegung vorgenommen hat. Mit Hülfe der genannten Harnack'schen Convergenzsätze lässt sich der Beweis führen, dass durch $\lim_{n=\infty} W_n = W$ eine in $s$ harmonische Function definirt wird, welche stetig in die Werte $W_0(s)$ übergeht, wenn man den Punkt $x, y$ auf den Rand $s$ wandern lässt. Da $V_0 - W_0$ ebenfalls eine in $K$ harmonische Function wird, so ist $W + V_0 - W_0$ die gesuchte Lösung des Problems. Zum Schluss des Capitels wird noch die Beschränkung aufgehoben, welche in der Annahme der Existenz einer Function $V_0$ liegt; auch ist noch eine Modification in der Beweisführung notwendig, wenn die Randcurve $s$ eine an einzelnen Stellen ihre Richtung plötzlich ändernde Tangente besitzt.

Das zweite Capitel behandelt die Aufgabe, eine Function $u(x, y)$ zu construiren, welche im Inneren eines gegebenen Gebietes $S$ der $xy$-Ebene zugleich mit ihren ersten beiden partiellen Ableitungen stetig ist, die Differentialgleichung $\Delta u = f(x, y)$ erfüllt, wo $f(x, y)$ eine gegebene Function von gleicher Beschaffenheit bedeutet, und welche überdies am Rande $s$ des Gebietes $S$ vorgeschriebene Werte $U(s)$ annimmt. Man erkennt sofort, dass dieses Problem

mit Hülfe der im ersten Capitel gelösten Aufgabe auf den einfacheren Fall zurückgeführt werden kann, in welchem die gegebene Function $U$ identisch verschwindet. Die Lösung dieses einfacheren Problems gelingt mittels der Green'schen Function

$$G(x, y;\ a, b) = l\left(\frac{1}{r}\right) - \omega,$$

wo $r$ die Entfernung des Punktes $x$, $y$ von einem festen, in $S$ gelegenen Punkte $a$, $b$ und $\omega$ eine in $S$ harmonische, auf dem Rande $s$ die Werte $l\left(\frac{1}{r}\right)$ annehmende Function bedeutet. Der Punkt $a$, $b$ wird der Pol der Green'schen Function genannt. Der Verfasser zeigt, dass das über das Gebiet $S$ erstreckte Doppelintegral

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint f(x', y')G(x', y';\ x, y)dx'dy'$$

eine Function definirt, welche die sämtlichen vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt.

Das dritte Capitel enthält die Grundlage einer Theorie der allgemeinen Gleichung

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

wo $A$, $B$, ..., $F$ Functionen von $x$, $y$ bezeichnen, welche in einem Gebiete $S$ der $xy$-Ebene zugleich mit ihren ersten beiden Ableitungen stetig sind. Je nachdem der Ausdruck $B^2 - AC$ in $S$ stets positiv oder stets negativ ausfällt, lässt sich die Differentialgleichung mittels einer reellen Substitution auf einen der beiden folgenden Typen zurückführen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

Zunächst beweist der Verfasser folgende Sätze: 1. Man kann um jeden Punkt $x_0$, $y_0$ der $xy$-Ebene ein Gebiet $R$ derart abgrenzen, dass, wenn $s$ eine beliebige, in $R$ verlaufende geschlossene Curve ist, das Integral der Differentialgleichung durch die Werte auf dieser Randcurve $s$ eindeutig bestimmt ist. 2. Für jedes Gebiet $S$, in welchem $c$ nirgends positiv ausfällt, ist das Integral ebenfalls

durch seine Randwerte völlig bestimmt. Es wird endlich mittels des alternirenden Verfahrens des Hrn. H. A. Schwarz auch wirklich die Existenz eines Integrals der Differentialgleichung mit vorgeschriebenen Randwerten gezeigt. Ht.

---

G. D. d'Arone. Un théorème sur les fonctions harmoniques. C. R. CXIV. 1055-1057.

Ist $V$ eine reelle und überall im Raume stetige Function der drei Veränderlichen $x, y, z$, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

genügt, und bezeichnet $a, b, c$ irgend einen Punkt im Inneren der mit dem Radius $R$ um den Nullpunkt construirten Kugel, so sind die Werte von $V$ im Nullpunkte und im Punkte $a, b, c$ bezüglich durch die beiden Formeln

$$V(0,0,0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} V\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi,$$

$$V(a,b,c)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} V\frac{(R^2-l^2)R}{r^3}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi$$

gegeben, wo $l$ die Entfernung des Punktes $a, b, c$ vom Nullpunkte, $r$ die Entfernung zwischen dem Punkte $a, b, c$ und dem Punkte $x, y, z$ und $\vartheta, \psi$ die üblichen Bezeichnungen für die Kugelcoordinaten sind. Der Verfasser zerlegt nun jedes der beiden Doppelintegrale in zwei Integrale, von denen das erstere über denjenigen Teil der Kugeloberfläche zu erstrecken ist, in welchem die Function

$$f(x,y,z)=1-\frac{(R^2-l^2)R}{r^3}$$

positiv ist, während das zweite Integral über den Teil der Kugeloberfläche zu erstrecken ist, für welchen jene Function negativ wird. Wird ferner die Thatsache berücksichtigt, dass bei geeignetem $R$ die Werte der Function $f$ auf der Kugel, absolut genommen, beliebig klein ausfallen, so ergiebt sich unter der Annahme, dass $V$ überall im Raume positive Werte besitzt, mit Notwendigkeit $V(0,0,0)=V(a,b,c)$, d. h. die Function $V$ ist eine Constante. Aus dem so bewiesenen Satz folgt leicht der weitere Satz:

Wenn die Potentialfunction $V$ für alle Punkte des Raumes endliche Werte annimmt, so ist sie aller endlichen Werte fähig, es sei denn, dass sie constant bleibt. Ht.

---

E. Picard. Sur une classe de fonctions analytiques d'une variable dépendant de deux constantes réelles arbitraires. C. R. CXIV. 1310-1312.

Der Verfasser betrachtet (unter $u, v, x, y$ reelle Variabeln, unter $f$ und $\varphi$ reelle Functionen derselben verstanden) die Differentialgleichungen

$$(A) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = f, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \varphi. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen werden $u$ und $v$ als Functionen von $x, y$ und zwei reellen Integrationsconstanten definirt, und die Form der Gleichungen zeigt, dass $F = u + iv$ eine analytische Function von $z = x + iy$ wird. Dabei sind $f$ und $\varphi$ nicht völlig willkürlich, sondern den beiden Gleichungen unterworfen, welche die Integrabilität des Systems (A) ausdrücken. Die Function $F$ genügt einer durch Elimination leicht herzustellenden gewöhnlichen Differentialgleichung dritter Ordnung. Ein besonderes Interesse knüpft sich an den Fall, wo die kritischen Punkte von $F$ unabhängig von den Integrationsconstanten sind, da dieser Fall zu einem neuen Typus von Transcendenten zu führen scheint (während bekanntlich die gewöhnlichen nicht linearen Differentialgleichungen, deren Integrale nur von den Integrationsconstanten unabhängige kritische Punkte besitzen, nicht zu neuen Transcendenten Anlass gegeben haben). Für das System (A) kann auch der Fall eintreten, dass die kritischen Punkte von $F$ zwar nicht unabhängig von den Integrationsconstanten werden, aber doch auf eine bestimmte Curve der Ebene beschränkt sind.

Hz.

---

G. Ricci. Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables des fonctions associés à une forme différentielle quadratique. Darboux Bull. (2) XVI. 167-189.

Der Verfasser entwickelt hier die Grundzüge einer Theorie der Functionensysteme von $n$ Variabeln $x_1, \ldots, x_n$, wie sie bei den verschiedensten Fragen der reinen Analysis, der Geometrie, der Mechanik und der Physik auftreten. Bezeichnet man die Functionen des Systems mit dem Symbol $X_{r,s,\ldots,t}$ und lässt die $m$ Indices $r, s, \ldots, t$ sämtlich die $n$ Werte $1, 2, \ldots, n$ annehmen, so erhält man ein „$m$-faches Functionensystem von $n$ Variabeln", oder ein „System $m^{\text{ter}}$ Ordnung" von $n^m$ Functionen. Die einzelnen Functionen heissen die „Elemente" des Systems. Das System heisst invariabel, wenn es aus denselben Elementen hervorgeht, wie man auch die unabhängigen Variabeln wählen mag, andernfalls variabel. Es werden ausschliesslich zwei Gattungen variabler Systeme betrachtet: covariante und contravariante.

Sind $X_{r_1, r_2, \ldots, r_m}$, $Y_{r_1, r_2, \ldots r_m}$ die Elemente eines und desselben covarianten Systems, je nachdem die unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ oder $y_1, \ldots, y_n$ sind, so geht das eine in das andere über durch die Substitution:

$$Y_{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \sum_{s_1, s_2, \ldots s_m} X_{s_1, s_2, \ldots, s_m} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{r_1}} \cdot \frac{\partial x_{s_2}}{\partial y_{r_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_m}}{\partial y_{r_m}}.$$

($\sum_{s_1, \ldots, s_m}$ bedeutet hier, dass jeder variable Index die $n$ Werte $1, 2, \ldots, n$ annimmt.)

Die $m$-fachen contravarianten Systeme sind dagegen variabel gemäss der Substitution:

$$Y^{(r_1, r_2, \ldots, r_m)} = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_m} X^{(s_1, s_2, \ldots, s_m)} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial x_{s_1}} \cdot \frac{\partial y_{r_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial y_{r_m}}{\partial x_{s_m}}.$$

Invariant heissen alle absolut unveränderlichen Ausdrücke, welche aus den Elementen eines oder mehrerer variabler Systeme gebildet sind, und daher sind die Systeme von der Ordnung Null Invarianten.

Diese variabeln Functionensysteme werden dann einer quadratischen Differentialform mit $n$ Variabeln

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s,$$

welche „Fundamentalform" heisst, associirt. Hierauf werden einige Eigenschaften der quadratischen irreducibleu Differentialform entwickelt und dann Methoden angegeben, um aus jedem covarianten oder contravarianten System von der Ordnung $m$ ein neues eben-

solches System der Ordnung $m+1$ abzuleiten. Die Anwendung dieser Methoden gestattet die Ableitung einer Reihe von Sätzen über die Functionensysteme, worunter besonders ein Theorem von Wichtigkeit ist, welches dahin lautet, dass man die ganze Betrachtung auf covariante Operationen beschränken kann, indem sich aus jedem Satze über variable Systeme dadurch ein reciproker Satz ergiebt, dass man die Worte covariant und contravariant vertauscht. Hierauf folgt die Untersuchung der Invarianten einer Fundamentalform und der associirten Systeme, und es gelingt dem Verfasser, alle unabhängigen absolut invariabeln Ausdrücke zu bestimmen, welche man mit den Coefficienten einer Form $\varphi$, mit den Elementen eines oder mehrerer gegebener variabler Systeme und mit den Derivirten aller dieser Functionen bis zu einer gegebenen Ordnung $m$ bilden kann.

Die Allgemeinheit und Verwendbarkeit der entwickelten Theorie wird zum Schlusse noch an einigen Beispielen erläutert; so bestimmen sich unmittelbar die Gleichungen der Krümmungslinien, der conjugirten Curven und der Asymptotenlinien einer Fläche, ebenso erhält man die allgemeinen Gleichungen der Elasticität, sowie die Gleichungen des Gleichgewichtes und der Bewegung der Wärme im Innern eines Körpers. Bm.

---

P. Appell. Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. Journ. de Math. (4) VIII. 187-216.

Die vorstehende Differentialgleichung wird untersucht mit Rücksicht auf eine Frage aus der Wärmelehre. Ist die Anfangstemperatur $u_0 = f(x)$ eines Wärmeleiters, dessen Temperatur allein von der Abscisse $x$ abhängig ist, gegeben, so bestimmen die Fourier'schen Formeln die Temperatur zu einer beliebigen späteren Zeit. Der Verf. legt sich nun die Frage vor, ob die Anfangstemperatur $u_0$ selbst wieder aus einem früheren Zustand hervorgehen kann und, wenn ein solcher Zustand existirt, ob derselbe eindeutig bestimmt ist, und wie man denselben finden kann. Die Untersuchung ergiebt, dass ein solcher früherer Zustand nicht immer

existirt; es ist vielmehr die notwendige Bedingung seiner Existenz, dass $u_0 = f(x)$ eine transcendente ganze Function von $x$ ist; allein diese Bedingung ist, wie an einem einfachen Beispiel gezeigt wird, nicht hinreichend. Dass für jeden Zeitmoment ($t < 0$) überhaupt nur ein einziger Zustand möglich ist, lässt sich physikalisch leicht einsehen, doch wird auch auf analytischem Wege diese Thatsache begründet. Schliesslich wird noch bewiesen, dass es unmöglich ist, beliebig weit in der Zeit zurückzugehen, ohne dass die Temperatur unendlich wird, falls dieselbe nicht überhaupt constant ist.

Sh.

---

J. Bendixson. Sur l'irréductibilité des fonctions de plusieurs variables. Stockh. Öfv. XLIX. 189-193.

Durch die Substitution $p_0(x)y = \eta$ bekommt man, wenn

$$f(x, y) = p_0(x).y^{n-1} + p_1(x).y^{n-2} + \cdots + p_n(x)$$

ist ($p_0(x)$, $p_1(x)$ etc. ganze rationale Functionen):

$$[p_0(x)]^{n-1} f(x, y) = \bar{f}(x, \eta) = \eta^n + q_1(x)\eta^{n-1} + \cdots + q_n(x),$$
$$q_i(x) = [p_0(x)]^{i-1}.p_i(x).$$

Wenn $\bar{f}(x, \eta)$ einen in $x$ und $\eta$ rationalen Factor vom ersten Grade in $\eta$ hat, so hat dieser notwendig die Form $\eta - g(x)$, wo $g(x)$ eine ganze Function ist. Man kann leicht eine ganze Zahl $m$ bestimmen, unterhalb welcher die Gradzahl von $g(z)$ liegen muss. Folglich genügt $\bar{f}(x, \eta) = 0$ einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^m \eta}{dx^m} = 0;$$

d. h. $R_m(x, \eta) = 0$ [$R_m$ = einer gewissen rationalen Function] hat für jeden $x$-Wert eine $\eta$-Wurzel, welche auch $\bar{f}(x, \eta) = 0$ erfüllt. Also muss

$$\prod_{i=1}^{n} R_m(x, \eta_i)$$

identisch verschwinden. Dieser Ausdruck ist aber eine rationale Function $R(x)$ von $x$, deren Coefficienten sich rational durch diejenigen von $q_1(x), \ldots, q_n(x)$ oder $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ ausdrücken. Also muss eine gewisse ganze rationale Function von $x$ und den Coefficienten von $f$ identisch verschwinden, wenn $\bar{f}(x, \eta)$, also

auch $f(x, y)$ einen Factor vom ersten Grade in $\eta$, resp. $y$ haben soll. Man findet leicht, dass die Bedingung auch hinreichend ist.

Der Fall, dass $f(x, y)$ einen Factor vom Grade $k$ enthält, reducirt sich leicht auf den vorigen und giebt dieselbe Bedingungsform $G_k \equiv 0$. Die Bedingung, dass $f(x, y)$ überhaupt reductibel sein soll, drückt sich also in der Form

$$G_1 . G_2 \dots G_{n-1} \equiv 0$$

aus (oder wohl eigentlich schon durch $G_1 . G_2 \dots G_\mu \equiv 0$, wo $\mu = \frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$).

Man kann diese Untersuchung leicht auf Functionen mit mehr als zwei Variabeln ausdehnen. Bdn.

---

K. Hensel. Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Function einer Variabeln. Deutsche Math. Ver. I. 56-59.

Sind $x$, $y$ durch die algebraische Gleichung $f(\overset{n}{x}, \overset{m}{y}) = 0$ mit einander verbunden, so führt die Substitution

$$y = \frac{\eta}{x_2^m}, \quad x = \frac{x_1}{x_2}$$

zu einer Gleichung für $\eta$, durch welche sich $\eta$ als eine ganze homogene algebraische Form von $x_1$, $x_2$ ausweist. Offenbar kann jede rationale Function von $x$, $y$ als Quotient zweier ganzen homogenen Formen der Grössen $x_1$, $x_2$; $\eta$ von der nämlichen Dimension dargestellt werden. Um alle ganzen Formen zu überblicken, bedarf es wesentlich der Kenntnis eines vollständigen Systems von unabhängigen ganzen homogenen Formen $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, dessen Gesamtdimension $M = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{n-1}$ eine möglichst kleine ganze Zahl ist. Es besteht der Satz, dass alle ganzen homogenen Formen durch diese linear mit rationalen Coefficienten darstellbar sind. Den ganzen algebraischen Formen stehen am nächsten die sogenannten algebraischen Formen erster Gattung; dieselben sind dadurch charakterisirt, dass sie zwar unendlich werden können, aber nirgends von so hoher Ordnung, als irgend eine rationale Form von $x_1$, $x_2$ allein. Es existirt ein Fundamentalsystem von

$n$ Formen erster Gattung $\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_{n-1}$ bezüglich von den Dimensionen $-\mu_0, -\mu_1, \ldots, -\mu_{n-1}$, durch welche sich alle anderen Formen erster Gattung linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken. Diese Formen erster Gattung beherrschen die Theorie der Integrale erster Gattung. Es zeigt sich nämlich, dass die letzteren sich aus Integralen von der Gestalt

$$\int x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \bar{\eta}_i (x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2) \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_i,\ \lambda_2 \geqq 2)$$

mit constanten Coefficienten zusammensetzen lassen. Die Anzahl dieser linear unabhängigen Integrale ist demnach $p = M - n + 1$, wodurch eine einfache, rein arithmetische Bestimmung des Geschlechtes der algebraischen Beziehung $f(x, y) = 0$ gegeben ist.

Ht.

G. Kobb. Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables. Journ. de Math. (4) VIII. 385-419.

Nach einem grundlegenden Satze der Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen lassen sich die Stellen eines algebraischen Gebildes $f(x, y) = 0$ durch Paare von Potenzreihen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ darstellen. Und zwar genügt eine endliche Zahl solcher Paare zur Darstellung des ganzen algebraischen Gebildes. Entsprechendes gilt, wie der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung zeigt, für algebraische Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen. Die Ausdehnung dieses Resultates auf algebraische Functionen von beliebig vielen Veränderlichen bietet keine Schwierigkeit. Was die Methode des Verfassers angeht, so ist dieselbe derjenigen nachgebildet, deren sich Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über algebraische Functionen (einer Veränderlichen) bedient.

Hz.

P. Günther. Ueber die eindeutigen Functionen von zwei durch eine algebraische Gleichung verbundenen Veränderlichen. J. für Math. CIX. 199-212.

Nachdem die allgemeine Theorie der eindeutigen Functionen einer complexen Veränderlichen mit einer endlichen Anzahl (wesent-

lich oder ausserwesentlich) singulärer Stellen durch die Arbeiten der Herren Weierstrass und Mittag-Leffler zu einem Abschluss gelangt war, lag es nahe, entsprechende Untersuchungen für die eindeutigen Functionen einer Riemann'schen Fläche anzustellen, die ebenfalls nur eine endliche Anzahl singulärer Stellen besitzen. Diesen Gedanken hat Herr Appell in seiner schönen Abhandlung: Sur les fonctions uniformes d'un point analytique $x$, $y$ (Acta Mathematica I; F. d. M. XV. 1883. 333) durchgeführt, indem er die drei Hauptprobleme erledigte, die sich hier darbieten, nämlich: 1) die Darstellung aller eindeutigen Functionen des Punktes $x$, $y$, die eine endliche Anzahl singulärer Stellen besitzen, 2) die zugehörige Verallgemeinerung des Mittag-Leffler'schen Theorems, 3) die Zerlegung der eindeutigen Functionen mit einer wesentlich singulären Stelle in ihre Primfactoren; ein Teil der von Herrn Appell gefundenen Resultate war übrigens bereits von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen ausgesprochen worden.

Die von Herrn Weierstrass in diesen Vorlesungen gegebene algebraische Grundlage der Theorie der Abel'schen Functionen ist es nun auch, die der allzu früh verstorbene Verfasser der vorliegenden Abhandlung verwendet, um die Resultate von Herrn Appell mit grösserer Leichtigkeit herzuleiten. Aber während Herr Weierstrass bei seinen Untersuchungen eine eindeutige transcendente Function des Paares $x$, $y$ benutzt, die nur eine Nullstelle, eine Unendlichkeitsstelle und, wenn $\varrho$ der Rang des Gebildes ist, $\varrho$ Unbestimmtheitsstellen besitzt, wird hier eine eindeutige transcendente Function $\mathfrak{E}(x, y; x', y')$ hergeleitet, die nur eine Nullstelle $(x', y')$ und eine Unbestimmtheitsstelle $(x, y)$ aufweist und daher den von Herrn Weierstrass in die Theorie der eindeutigen Functionen eingeführten Primfunctionen vollkommen entspricht; die Norm der Function $\mathfrak{E}$ ist sogar eine solche eindeutige Primfunction.

Noch eine Bemerkung sei gestattet. Bei der Herleitung der Function $\mathfrak{E}(x, y; x', y')$ denkt sich Günther die Veränderlichen $x$, $y$ als Fuchs'sche Functionen $\varrho^{\text{ten}}$ Ranges $x = \varphi(\tau)$, $y = \psi(\tau)$ dargestellt und zwar, was stets möglich ist, in der Weise, dass jedem Wertepaare $x$, $y$ im allgemeinen nur ein innerhalb des

Fundamentalpolygons liegender Wert von $\tau$ entspricht. Gewiss gewinnt die Entwickelung vermöge dieser Darstellung an Kürze und Uebersichtlichkeit. Dürfte indes dieser Vorteil nicht dadurch aufgewogen werden, dass eine schwierige und noch nicht ausgereifte Theorie in die Voraussetzungen mit aufgenommen wird?

St.

---

F. Klein. Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs. Math. Ann. XL. 130-139.

Unter einem Fundamentalbereich hat man nach Herrn Klein bekanntlich ein Flächenstück zu verstehen, dessen Ränder auf einander bezogen sind, und das durch Zusammenfügung entsprechender Randteile in eine geschlossene Fläche übergeht, die zur Definition eines algebraischen Gebildes dienen kann. Indem Herr Klein in der vorliegenden Mitteilung die Frage erledigt, welche Bedingung ein über der complexen Zahlenebene (oder Zahlenkugel) ausgebreitetes Flächenstück befriedigen muss, um ein Fundamentalbereich zu sein, beseitigt er zugleich einige Unklarheiten, die sich in seinen und Poincaré's Arbeiten über automorphe Functionen finden. Als eine notwendige und hinreichende Bedingung erweist sich zunächst die, dass sich um jeden Punkt des Bereiches eine endliche Umgebung muss abgrenzen lassen, die unter Vermittelung einer analytischen Function auf die Fläche eines Kreises übertragbar ist. Diese Bedingung kann indessen noch durch eine andere ersetzt werden für diejenigen Bereiche, welche in der Theorie der automorphen Functionen in Betracht kommen. Es sind dies bekanntlich von Kreisen begrenzte Bereiche, deren Kanten durch lineare Substitutionen von $z = x + iy$ auf einander bezogen sind. Schneiden sich in einer Ecke eines solchen Bereiches zwei Kanten, die durch eine gewisse Substitution einander zugeordnet sind, so nenne man die Ecke elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder loxodromisch je nach der Natur jener Substitution. Der Bereich ist dann stets und nur dann ein Fundamentalbereich, wenn er keine hyperbolische Ecke besitzt. Ein einfaches Beispiel eines Bereiches mit hyperbolischer Ecke wird durch einen Parallelstreifen in der $z$-Ebene

dargestellt, dessen Ränder durch die Substitution $z' = k.z$ auf einander bezogen sind, unter $k$ eine reelle Zahl verstanden. Die Unbrauchbarkeit dieses Bereiches kann man leicht durch eine von Herrn Schwarz herrührende Ueberlegung nachweisen. An eben diesem Beispiel zeigt Herr Klein, worin die Unbrauchbarkeit derartiger Bereiche mit hyperbolischen Ecken ihren eigentlichen Grund hat. Man wähle als Fundamentalbereich der Gruppe aller Wiederholungen der Substitution $z' = k.z$ einen von zwei Kreisen begrenzten Ring. (Der eine der begrenzenden Kreise geht durch die Substitution $z' = kz$ in den anderen über.) Die zugehörige Riemann'sche Fläche ist eine Ringfläche vom Geschlecht 1, und den begrenzenden Kreisen entspricht eine und dieselbe Curve $C$ auf der Ringfläche. Lässt man nun die Kreise in der $z$-Ebene allmählich in die begrenzenden Geraden des Parallelstreifens übergehen, so ändert sich die Curve $C$ so, dass sie schliesslich unendlich viele Windungen erhält. Die hier klar hervortretende Thatsache, dass die Unbrauchbarkeit eines Bereiches mit hyperbolischen Ecken in der geometrischen Gestalt des Bereiches, nicht aber in der Natur der zugehörigen Gruppe begründet ist, geht auch aus der Betrachtung hervor, die Herr Poincaré beim Beweise des von Herrn Klein so genannten Fundamentaltheorems angewandt hat, um die in dem Auftreten hyperbolischer Ecken liegende Schwierigkeit zu umgehen. — Schliesslich bespricht Herr Klein noch kurz die Beziehungen, in welchen der Gegenstand dieser Note mit seinen neueren Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung steht. Hz.

---

M. Noether. Zum Beweise des Satzes der Theorie der algebraischen Functionen, diese Annalen Bd. VI. p. 351.
Math. Ann. XL. 140-144.

Es handelt sich um eine neue, vereinfachte Darstellung des im Titel genannten Beweises für den bekannten „Fundamentalsatz". Die neue Darstellung hat den Vorzug, von Reihenentwickelungen keinen Gebrauch zu machen und sogleich eine obere Grenze für die Dimension der zu vergleichenden Glieder zu ergeben. (S. F. d. M. XXI. 1889. 426.) Hz.

---

P. del Pezzo. Sulle superficie di Riemann relative alle curve algebriche. Palermo Rend. VI. 115-126.

Die Arbeit ist eine interessante Erweiterung der geometrischen Methode, mittels welcher Hr. F. Klein direct aus der Gestalt einer ebenen algebraischen Curve die zugehörige Riemann'sche Fläche construirt. Der Verfasser legt seiner Untersuchung die Normalcurve des betreffendeu Geschlechts zu Grunde und erörtert besonders ausführlich den Fall des Geschlechtes 1. Die als Schnittcurve einer Fläche zweiter Ordnung mit einem Kegel zweiter Ordnung definirte Curve $C$ der vierten Ordnung wird von der Spitze dieses Kegels aus auf eine Ebene $\pi$ projicirt, wodurch sich als Abbild in dieser Ebene ein Kegelschnitt $\gamma$ ergiebt. Jeder reelle Punkt der Curve $C$ wird durch die in demselben construirte Tangente, und jeder imaginäre Punkt derselben wird durch die reelle Gerade repräsentirt, welche denselben mit dem conjugirt imaginären Punkte der Curve verbindet. Das so entstehende System von zweifach unendlich vielen Geraden im Raume denke man sich von der Kegelspitze aus auf die Ebene $\pi$ projicirt, und dort endlich werde jeder Geraden der Pol in Bezug auf den Kegelschnitt $\gamma$ zugeordnet, so dass nunmehr jedem reellen oder imaginären Punkte der Raumcurve $C$ ein Punkt in der Ebene $\pi$ entspricht und auf diese Weise in $\pi$ eine zur Curve gehörige Riemann'sche Fläche erzeugt wird. Gestalt und Verzweigung derselben hängen wesentlich davon ab, ob 4, 2 oder 0 reelle Tangenten von der Kegelspitze aus an die Raumcurve $C$ möglich sind. Diese Fälle werden daher vom Verfasser einzeln behandelt. Ht.

---

A. Hurwitz. Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Ann. XLI. 403-442.

Im ersten Abschnitte der Abhandlung zeigt der Verfasser zunächst durch eine einfache Betrachtung, dass es auf einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte $p$ höchstens $2p+2$ verschiedene Stellen $P$ giebt, welche ungeändert bleiben, wenn man die Riemann'sche Fläche einer eindeutigen Transformation in sich unterwirft. Sind nun $u_1, \dots, u_p$ die $p$ zur Fläche gehörigen, linear

unabhängigen Integrale erster Gattung, und bezeichnet $t$ eine solche Function des Ortes der Fläche, welche in der gerade zu betrachtenden Stelle $P$ derselben von der ersten Ordnung verschwindet, so gilt für die Determinante

$$\varDelta_t = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{dt}, & \frac{du_2}{dt}, & \ldots, & \frac{du_p}{dt} \\ \frac{d^2u_1}{dt^2}, & \frac{d^2u_2}{dt^2}, & \ldots, & \frac{d^2u_p}{dt^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^pu_1}{dt^p}, & \frac{d^pu_2}{dt^p}, & \ldots, & \frac{d^pu_p}{dt^p} \end{vmatrix}$$

die folgende Thatsache: Es giebt stets eine endliche Zahl von Stellen $P$, an welchen $\varDelta_t$ verschwindet. Sind $P_1, \ldots, P_r$ diese Stellen und $m_1, \ldots, m_r$ die zugehörigen Ordnungszahlen des Verschwindens von $\varDelta_t$, so ist

$$m_1 + \cdots + m_r = p(p^2-1).$$

Die nähere Untersuchung der Zahlen $m_1, \ldots, m_r$, bei welcher auch ihre Beziehung zum Weierstrass'schen Lückensatze hervortritt, führt zu der Erkenntnis, dass die Anzahl $r$ derselben auf jeder nicht hyperelliptischen Fläche stets die Zahl $2p+2$ übersteigt. Da ferner die Stellen $P_1, \ldots, P_r$ sich bei einer eindeutigen Transformation der Fläche in sich offenbar nur unter einander vertauschen, so wird hieraus sofort geschlossen, dass die Fläche nur eine endliche Anzahl, nämlich höchstens $r!$ eindeutige Transformationen in sich besitzen kann. Denn zwei Transformationen $S$ und $S'$, welche dieselbe Vertauschung der Stellen $P_1, \ldots, P_r$ hervorbringen, sind notwendig identisch, da $S'S^{-1}$ die $r$ Stellen fest lässt und also nach dem anfangs genannten Satze die identische Transformation ist. Der dabei ausgeschlossene Fall der hyperelliptischen Fläche wird durch eine besondere Betrachtung erledigt. Wird die Riemann'sche Fläche in der bekannten Weise durch eine Curve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume von $p-1$ Dimensionen dargestellt, indem man die homogenen Coordinaten den $p$ Differentialen $du_1, \ldots, du_p$ proportional setzt, so sind die Punkte $P_1, \ldots, P_r$ auf dieser Curve keine anderen als diejenigen, in welchen eine Ebene hyperosculirt. Der Verfasser beweist die Existenz weiterer

invarianter Punktgruppen auf der Curve durch den Satz: Die Anzahl der Punkte auf der Curve $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, in welchen dieselbe von einer Fläche $k^{\text{ter}}$ Ordnung hyperosculirt wird, beträgt stets $(2k-1)^2 p(p-1)^2$; dabei ist jeder Punkt mit der ihm zugehörigen Multiplicität zu zählen.

Im zweiten Abschnitt giebt der Verfasser zunächst eine sehr übersichtliche und zweckmässige Zerschneidung der Riemann'schen Fläche an, welche darauf beruht, dass er von einem beliebigen Punkte $O$ aus $2p$ knotenlose, in $O$ beginnende und endigende Schnitte ausführt. Der Hauptgegenstand dieses Abschnittes ist nun die Construction einer Riemann'schen Fläche, welche eine endliche Gruppe von eindeutigen Transformationen in sich besitzt. Man erhält die allgemeinste derartige Fläche $F$, wenn man eine beliebig gewählte Fläche $\Phi$ in $r$ Exemplaren nimmt, diese Exemplare auf einander legt und in geeigneter Weise zu einer einzigen Fläche mit einander verbindet. Ist die so entstehende Riemann'sche Fläche $F$ vom Geschlechte $p$ und die ursprüngliche Fläche $\Phi$ vom Geschlechte $\pi$, so besteht die Gleichung

$$2p-2 = W+r(2\pi-2),$$

wo $W$ die Gesamtzahl der Verzweigungen von $F$ in Bezug auf $\Phi$ bedeutet. Aus dieser Gleichung erschliesst der Verfasser die von Zeuthen aufgestellte Relation zwischen den Geschlechtszahlen zweier mehrdeutig auf einander bezogenen algebraischen Gebilde. Es folgen noch weitere Anwendungen und specielle Beispiele.

Die Untersuchungen des dritten Abschnittes beziehen sich auf die Integrale erster Gattung, wenn diese eine Gruppe eindeutiger Transformationen in sich besitzt. Jeder solchen eindeutigen Transformation der Fläche entspricht eine lineare Transformation der Integrale erster Gattung, und diese letztere ist gleichbedeutend mit einer homogenen linearen Transformation der Differentiale erster Gattung. Die Frage, wie oft eine bestimmte Einheitswurzel als Wurzel der charakteristischen Gleichung einer einzelnen linearen Transformation auftritt, führt auf die Bestimmung gewisser Systeme von Functionen einer Fläche, welche wesentlich durch die Eigenschaft charakterisirt sind, dass sie sich auf geschlossenen Wegen

bis auf multiplicative Constanten reproduciren. Es werden die Existenzbedingungen und hauptsächlichsten Eigenschaften dieser Functionen entwickelt. Ht.

---

A. Schönflies. Ueber gewisse geradlinig begrenzte Stücke Riemann'scher Flächen. Gött. Nachr. 1892. 257-267.

Sätze über die Bestimmung der Integrale einer gewissen Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die Lage ihrer Nullstellen haben auf die geometrische Frage geführt: in wie weit sind die geradlinigen Polygone festgelegt, wenn $n-1$ Winkel beliebig vorgeschrieben sind und ausserdem die Zahlen, welche angeben, wie oft jede der dazwischen liegenden Seiten durch den Unendlichkeitspunkt geht. Dabei ist zugelassen, dass die Fläche diesen Punkt beliebig oft im Innern enthält, und dass in den Ecken (nicht aber im Innern) Windungspunkte liegen. Es wird dann mit Hülfe der von Hrn. F. Klein (Math. Ann. XXXVII) gegebenen Reductionsprocesse gezeigt, dass die gestellte Frage in einer Reihe von Fällen zu bejahen ist, vorausgesetzt, dass man im Laufe der Reduction auch negativ zu rechnende Flächenteile zu verwenden sich gestattet. In andern Fällen sind noch weitere Unterscheidungen erforderlich. Man vergleiche die Ausführung in Math. Ann. XLII. Bdt.

---

J. von Puzyna. Ueber den Laguerre'schen Rang einer eindeutigen analytischen Function mit unendlich vielen Nullstellen. Monatsh. f. Math. III. 1-15.

Die Potenzsummen der Nullstellen einer ganzen rationalen Function lassen sich bekanntlich ganz und rational durch die Coefficienten der Function darstellen. Entsprechendes gilt für transcendente Functionen mit einer wesentlich singulären Stelle und unendlich vielen Nullstellen, wie der Verfasser im ersten Capitel vorliegender Abhandlung zeigt. Im zweiten Capitel giebt er eine von der Laguerre'schen abweichende Definition des Ranges einer transcendenten ganzen Function und weist darauf hin, dass

nach der neuen Definition der Rang unter Umständen mehrdeutig ist. Hz.

G. Ascoli. Delle funzioni regolari in un'area connessa qualsivoglia a distanza finita. Annali di Mat. (2) XX. 243-255.

Die Arbeit knüpft an eine frühere desselben Verfassers an, über welche in F. d. M. XXI. 1889. 421 referirt worden ist. Die Resultate der Arbeit beziehen sich auf den Verlauf der Linien $f(x, y) =$ const. in einem Gebiete, in welchem die Function $f(x, y)$ gewisse Bedingungen befriedigt. Hz.

D. Gambioli. Le funzioni simmetriche, loro rappresentazione simbolica e loro caratteri invariantivi. Batt. G. XXX. 192-205.

In der Theorie der symmetrischen Functionen von $n$ Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ treten drei Determinanten von charakteristischem Aufbau auf, deren Elemente entweder ganze Zahlen (incl. Null) sind, oder aber, etwa abgesehen von ganzzahligen Factoren, die Coefficienten der Gleichung mit den Wurzeln $x$. Der Verf. untersucht die eigentümlichen Differentialrelationen, welche diese drei Determinanten mit einander verknüpfen.

Die Rolle, welche auf Grund derartiger Relationen die drei Determinanten für die symmetrischen Functionen spielen, erkennt man am deutlichsten, wenn man auf die letzteren eine symbolische Bezeichnung (analog der in der Invariantentheorie üblichen) anwendet.

Es wird dann nachgewiesen, wie das Wesentliche der oben erwähnten Differentialrelationen darin beruht, dass dieselben ihre Form nicht ändern, wenn man die eingeführten Symbole nach gewissen Regeln mit einander vertauscht. My.

E. Bertini. Osservazioni sulle „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale von Dr. C. Neumann.“ (2. Aufl.) Palermo Rend. VI. 165-172.

Die Bemerkungen beziehen sich auf Vereinfachung und Ver-

allgemeinerung der Beweise einiger wichtigen Sätze aus der Theorie der Abel'schen Integrale. Der Verfasser giebt zunächst einen einfachen Beweis für den Satz, nach welchem eine „Specialgruppe“ durch das identische Verschwinden einer $\vartheta$-Function oder auch durch das Verschwinden der Determinanten einer aus Ableitungen der Integrale erster Gattung gebildeten Matrix charakterisirt wird. Er giebt ferner eine Ausdehnung des Beweises für das Abel'sche Theorem auf den Fall, wo die in Betracht kommenden Punktgruppen auf der Riemann'schen Fläche nicht aus lauter getrennt liegenden Punkten bestehen. Endlich bemerkt er, dass einige Sätze der Theorie in weiterem Umfange gelten, als sie in den Vorlesungen von Neumann ausgesprochen sind, weil die Existenz von unendlich vielen Polen eine wesentliche Singularität nach sich zieht. Hz.

---

A. Hurwitz. Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Gött. Nachr. 1892. 247-254.

Es werden Functionen $f$ untersucht, welche auf einer Riemann'schen Fläche von wesentlichen Singularitäten frei und eindeutig sind, mit Ausnahme einer Anzahl bestimmter Schnittcurven, bei deren Ueberschreitung sie vorgeschriebene constante Multiplicatoren annehmen (die Logarithmen dieser Functionen sind Summen von Abel'schen Integralen dritter Gattung). Die Anzahl der linear unabhängigen, überall endlichen Integrale der Form $\int fdz$, sowie die Anzahl der Nullstellen des Differentials $dJ$ wird bestimmt; endlich wird auch noch ein Satz abgeleitet, der die Verallgemeinerung des für die eindeutigen Functionen der Fläche geltenden Riemann-Roch'schen Satzes auf die Functionen $f$ vorstellt. Bdt.

---

S. Lie. Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel. C. R. CXIV. 277-280.

Der Verfasser teilt hier die Lösung der Aufgabe mit, alle Flächen im Raume von drei Dimensionen zu bestimmen, die auf vier verschiedene Weisen durch die Translation gewisser Curven erzeugt werden können. Die analytische Formulirung der Aufgabe

lautet: Die Functionen $A$, $B$, $C$, $D$ so zu bestimmen, dass die drei Gleichungen

$$A_k(t_1)+B_k(t_2)=C_k(t_3)+D_k(t_4) \qquad (k=1,2,3)$$

sich auf nur zwei Relationen zwischen den Argumenten $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ reduciren, von welchen jede mindestens drei Argumente enthält. Abgesehen von dem trivialen Fall, wo eine der Gleichungen linear von den beiden anderen abhängt, wird die allgemeinste Lösung durch den Ansatz

$$A_k(\alpha)=B_k(\alpha)=-C_k(\alpha)=-D_k(\alpha)=\varphi_k(\alpha)$$

gegeben, unter $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ die Integrale erster Gattung einer ebenen Curve vierter Ordnung verstanden. Die Argumente $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ entsprechen den vier Schnittpunkten einer Geraden mit der Curve. Ein entsprechender Satz gilt für $n$ Dimensionen. Der Verfasser giebt einige interessante Hülfssätze an, die er bei seiner Untersuchung gebraucht. Von diesen sei hier folgender beispielsweise erwähnt: Die $\infty^2$ Raumcurven dritter Ordnung durch fünf feste Punkte des Raumes schneiden eine beliebige feste Ebene in je drei Punkten, die bezüglich eines gewissen Kegelschnittes der Ebene ein sich selbst conjugirtes Dreieck bilden. Hz.

---

## W. Anissimoff. Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis.

Math. Ann. XL. 145-148.

In der Frage nach dem Fuchs'schen Grenzkreis $K$ für die Function $F(w)$ (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 428, XXIII. 1891. 436) handelte es sich wesentlich darum, ob in dem von Herrn Nekrassoff zur Bestimmung des Radius $R$ von $K$ aufgestellten Gleichungssystem

$$\frac{F(w)-F(w_1)}{w-w_1}=0, \quad wF'(w)+Aw_1F'(w_1)=0, \qquad |w|=|w_1|,$$

unter dessen Lösungen der kleinste der Moduln $|w|=|w_1|$ für den Radius $R$ auszuwählen ist, die positive Zahl $A$, falls sie nicht Null ist, gleich 1 sein muss, wie Herr Fuchs behauptet. Herr Anissimoff teilt nun ein Beispiel mit, in welchem sich diese Grösse von 1 verschieden ergiebt. Ist nämlich

$$F(z)=\frac{(z-ae^{\frac{\pi i}{3}})^2}{z(z-a)},$$

wo $a$ irgend eine von Null verschiedene reelle positive Zahl bedeutet, so findet man $A = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$. Hr.

---

W. A. Anissimoff. Der Fuchs'sche Grenzkreis. Warschau. 1892. (Russisch.)

Die Arbeit ist der eingehenden Behandlung der Frage nach dem Fuchs'schen Grenzkreise gewidmet und ist in zwei Capitel geteilt. Im ersten Capitel wird der der Function $F(z) = \frac{f(z)}{zg(z)}$ ($f$ und $g$ ganze rationale Functionen, die für $z=0$ nicht verschwinden) zugehörige Grenzkreis definirt und die Lage der Nullpunkte und Pole der Functionen $F(z)$ und $F'(z)$ in Bezug auf diesen Grenzkreis untersucht. Das zweite Capitel behandelt die Frage nach der Berechnung des Radius des Grenzkreises. Der Verfasser zeigt an dem Beispiele $F(z) = \frac{(z-b)^n}{z(z-a)^m}$, dass die modificirte Regel des Hrn. Fuchs (F. d. M. XXIII. 1891. 436) nicht genügt, und dass sie durch die Regel des Hrn. Nekrassoff ersetzt werden muss. Nach derselben hat man aus den Gleichungen:

$$\psi(z, z_1) = \frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} = 0, \quad zF'(z) + Az_1 F'(z_1) = 0,$$

wo $A$ reell und positiv, die Lösungen $z$, $z_1$ mit gleichen Moduln zu suchen und unter diesen die kleinste zu wählen. Wi.

---

W. A. Anissimoff. Bemerkung über den Fuchs'schen Grenzkreis. Mosk. Math. Samml. XVI. 234-235. (Russisch.)

Es wird an dem Beispiel $F(z) = \frac{(z-b)^3}{z(z-a)}$ gezeigt, dass auch die modificirte Regel des Hrn. Fuchs (vgl. das vorige Referat) in einigen Fällen nicht hinreichend ist. Wi.

---

P. A. Nekrassoff. Erklärungen, veranlasst durch die Abhandlung des Hrn. Prof. Fuchs im CVIII. Bande des Journals für Mathematik. Mosk. Math. Samml. XVI. 219-227. (Russisch.)

Der Verfasser besteht darauf, dass die neue, modificirte Regel des Hrn. Fuchs für die Auffindung des Radius des Grenzkreises immer noch ungenügend ist. Herr Nekrassoff liefert den Beweis, dass eine bei der Behandlung der Frage auftretende algebraische Gleichung $\xi(a)=0$ keine Identität bei willkürlichem $a$ ist. (F. d. M. XXIII. 1891. 437.) Wi.

---

W. A. Anissimoff. Ueber die Darstellung und Fortsetzung der analytischen Functionen. Warschau 1892. (Russisch.)

Bei dem Studium der Fuchs'schen Methode für die Darstellung und Fortsetzung der analytischen Functionen benutzt der Verf. die Resultate seiner Arbeit über den Fuchs'schen Grenzkreis (vgl. die vorhergehenden Referate) und betrachtet mit besonderer Ausführlichkeit den Fall der analytischen Function mit vier singulären Punkten. Einige Fälle der analytischen Functionen mit fünf singulären Punkten werden ebenfalls studirt. Wi.

---

H. Poincaré. Sur les fonctions à espaces lacunaires. American J. XIV. 201-221.

Eine analytische Function besitzt einen Bereich $B$ der complexen Zahlenebene als „espace lacunaire", wenn sie in diesen Bereich nicht fortsetzbar ist. Die Existenz von Functionen mit „espace lacunaire" hat bekanntlich zuerst Herr Weierstrass nachgewiesen. Der Verfasser giebt in der vorliegenden Abhandlung neue Beispiele derartiger Functionen. Der Bereich $B$ werde von einer knotenlosen, geschlossenen Curve $C$ begrenzt, die mit jedem sie von aussen berührenden Kreise nur den Berührungspunkt gemein hat. Dann stellt die Summe

$$(1) \qquad \varphi(x)=\sum_0^\infty{}_n \frac{A_n}{x-b_n}$$

unter folgenden Bedingungen eine ausserhalb $C$ holomorphe Function dar, die nicht in den Bereich $B$ fortsetzbar ist: 1) Die $\sum_0^\infty{}_n A_n$ convergirt absolut. 2) Die Punkte $b_0, b_1, b_2, \dots$ liegen im Innern

und auf dem Rande von $B$ und sind auf letzterem, also auf der Curve $C$, überall dicht. Als Beispiel giebt der Verfasser die über alle nicht negativen ganzen Zahlen $m_1, m_2, \dots, m_p$ erstreckte Summe

$$\Sigma \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_p^{m_p}}{x - \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \dots + m_p}},$$

wo $u_1, u_2, \dots, u_p, a_1, a_2, \dots, a_p$ Constanten bedeuten, von welchen die $p$ ersten, absolut genommen, kleiner als 1 sind. Die Curve $C$ ist hier dasjenige convexe Polygon, dessen Ecken Punkte $a_1, a_2, \dots, a_p$ sind, und welches jeden Punkt $a_i$, der nicht zu seinen Ecken gehört, in seinen Innenraum aufnimmt. Nach einigen weiteren Bemerkungen über die Summen der Gestalt (1) und über das Auftreten von „espaces lacunaires“ bei Newton'schen Potentialen wendet sich der Verfasser zu einer anderen Thatsache, die ebenfalls zuerst von Herrn Weierstrass erkannt worden ist. Dieselbe besteht darin, dass eine unendliche Summe $\sum_0^\infty{}_n R_n(x)$, deren allgemeines Glied $R_n(x)$ eine rationale Function ist, in getrennten Gebieten verschiedene analytische Functionen darstellen kann. Der Verfasser zeigt auf zwei Weisen, dass diese verschiedenen Functionen in keinerlei Zusammenhang zu stehen brauchen. Die erste Weise benutzt einen Satz aus der Theorie der „fonctions fuchsiennes“, während die zweite auf folgendem Satz beruht. Es seien $f_1$ und $f_2$ zwei analytische Functionen, von denen die erste nur in der oberen, die zweite nur in der unteren Halbebene existirt. Dann kann man die analytischen Functionen $\varphi$ und $\psi$ so bestimmen, dass $\varphi$ in der ganzen Ebene mit Ausschluss des Segmentes $(-1, +1)$ der reellen Axe, ferner $\psi$ in der ganzen Ebene mit Ausschluss der Segmente $(-\infty, -1)$ und $(+1, +\infty)$ der reellen Axe existiren, und dass $\varphi + \psi$ in der oberen Halbebene gleich $f_1$, in der unteren gleich $f_2$ ist. Hz.

---

G. Bohlmann. Ueber eine gewisse Klasse continuirlicher Gruppen und ihren Zusammenhang mit den Additionstheoremen. Diss. Halle a. S. C. A. Kämmerer u. Co. 31 S. 4°.

Das von Hrn. Weierstrass erledigte Problem, alle Functionen $\varphi$ mit algebraischem Functionalproblem

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \varphi(a)$$

aufzustellen, wo $y$ algebraisch von $x$ und $a$ abhängt, ist identisch mit dem Problem, alle algebraischen Integrale der Differentialgleichung

$$\psi(y)dy - \psi(x)dx = 0$$

anzugeben; dabei ist $\psi$ die Ableitung von $\varphi$. In dieser neuen Gestalt erweist sich das Problem den Hülfsmitteln der Lie'schen Theorie der Transformationsgruppen zugänglich. Der Verfasser findet den Satz: Damit $y = f(x, a)$ ein Integral der genannten Differentialgleichung wird, welches für $x = x_0$ den Wert $a$ annimmt, ist es notwendig und hinreichend, dass die Transformationen $y = f(x, a)$ eine eingliedrige continuirliche Gruppe bilden, bei welcher Parameter und Argument vertauschbar sind. Infolge dieses Satzes kommt die Lösung des Problems darauf hinaus, alle algebraischen Gruppen der bezeichneten Art zu ermitteln. Die genannte Thatsache bildete die Anregung für die weiteren Untersuchungen des Verfassers, in denen derselbe allgemein für eine beliebige Zahl $n$ von Veränderlichen eine Theorie derjenigen endlichen continuirlichen Gruppen von Transformationen

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

aufstellt, bei denen jede Function $f$ ungeändert bleibt, wenn man die Argumente $x_i$ mit den entsprechenden Parametern $a_i$ vertauscht. Wenn man auf die infinitesimalen Transformationen $U_1, \ldots, U_n$ dieser Gruppe eingeht, so zeigt sich, dass die Parametergruppe derselben mit der Gruppe selbst zusammenfällt, und dass die Gruppe in den Variabeln $x$ lauter vertauschbare Transformationen besitzt. Durch die beiden letzteren Eigenschaften sind die besonderen vom Verfasser untersuchten Gruppen auch umgekehrt vollständig charakterisirt. Es bestehen die Relationen $(U_i, U_k) = 0$, und es haben mithin die Constanten $c_{iks}$, welche die „Zusammensetzung" der Gruppe bestimmen, sämtlich die Werte 0. Die Gruppe ist definirt als ein System von Integralen der $n$ totalen Differentialgleichungen:

$$\sum_k \xi_{jk}(x_1, \ldots, x_n)dx_k = \sum_i \xi_{ji}(y_1, \ldots, y_n)dy_i$$

$$(i, k, j = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Functionen $\xi$ den Bedingungen

$$\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_i}$$

genügen; durch einfache Quadraturen ergeben sich somit die endlichen Gleichungen der Gruppe in der Gestalt

$$F_j(y_1, \ldots, y_n) = F_j(x_1, \ldots, x_n) + F_j(a_1, \ldots, a_n),$$

d. h. die Gruppe ist mit der Gruppe der Translationen ähnlich.

Zum Schlusse werden die erhaltenen Resultate für den Fall einer Veränderlichen specialisirt und zur Lösung des oben bezeichneten Weierstrass'schen Problems verwandt. Ht.

---

W. Burnside. On a class of automorphic functions. (2 Noten). Lond. M. S. Proc. XXIII. 49-88, 281-295.

In der ersten Abhandlung wird nach Recapitulation der fundamentalen Sätze und Definitionen Poincaré's gezeigt, dass die Reihe $\Sigma \bmod (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$ in einer Anzahl von Fällen auch noch für $m = 1$ convergirt, sodass man für diese „Thetafunctionen" mit nur einer Unendlichkeitsstelle, sowie (S. 61) Integralfunctionen der drei Gattungen analytisch darstellen kann. S. 72 wird der Fall eines symmetrischen Fundamentalbereichs betrachtet, der zu einem hyperelliptischen Gebilde gehört.

Die zweite Abhandlung verfolgt diesen Fall weiter, namentlich einen Unterfall, in welchem die betreffenden hyperelliptischen Functionen durch quadratische Transformation in elliptische übergeführt werden können. Ausserdem giebt sie die Darstellung der Klein'schen Primform. Bdt.

E. Ritter. Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null. Gött. Nachr. 1892. 283-291.

E. Ritter. Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze. Math. Ann. XLI. 1-82 (auch Diss. Gött.).

Die Theorie der automorphen Functionen, d. h. derjenigen, die bei einer gewissen Gruppe linearer Substitutionen der Veränder-

lichen in sich übergehen, ist 1881/82 von den Herren Poincaré und Klein in Angriff genommen worden; nach einer Reihe kurzer Mitteilungen hat dann der erstere 1882—84 einen vorläufigen Abriss der Theorie in den Acta Math. veröffentlicht, der denn auch für die nicht eben zahlreichen einschlägigen Arbeiten der Zwischenzeit die Grundlage geblieben ist. Es thut der Bedeutung dieser Grundlage keinen Abbruch, wenn man zugiebt, dass sie im einzelnen der Vereinfachung und Erweiterung fähig ist, wie es der Verf. der vorliegenden Abhandlung durchzuführen unternimmt.

Der erste Teil giebt den Existenzbeweis für die in Rede stehenden Functionen auf Riemann'scher Grundlage unter Benutzung der von den Herren H. A. Schwarz und C. Neumann ausgebildeten Approximationsmethoden. Dass das möglich sein musste, konnte nur bestritten werden, so lange von diesen Methoden noch nicht, wie es jetzt der Fall ist, zusammenhängende Darstellungen vorlagen.

Der zweite Teil stellt sich die Aufgabe, das von Hrn. Klein inzwischen in der Theorie der Abel'schen Functionen zur Geltung gebrachte Princip der homogenen Variabeln auch für die automorphen zu verwenden. Es stellt sich heraus, dass eine Spaltung der unabhängigen Variable $z$ und der automorphen Function $\zeta$ in den Quotienten von zwei homogenen, nie unendlich und nie Null werdenden Variabeln $z_1$, $z_2$, bezw. $\zeta_1$, $\zeta_2$ nur auf eine Weise möglich ist, wenn verlangt wird, dass bei geschlossenen Umläufen der $z_1$, $z_2$ die $\zeta_1$, $\zeta_2$ ganze binäre Substitutionen erleiden. Die Gruppe der letzteren kann aber zur ursprünglichen Gruppe gebrochener Substitutionen von $\zeta$ im allgemeinen nicht isomorph, sondern nur monodimorph gemacht werden (so sagt der Verf. mit Hrn. Klein für holoedrisch, bezw. hemiedrisch isomorph S. 22). Dem entsprechend werden die durch Spaltung der automorphen Functionen in Zähler und Nenner entstehenden Formen nicht immer so fixirt werden können, dass sie der Gruppe gegenüber sich absolut invariant verhalten; man wird vielmehr zutretende constante Factoren (insbesondere Einheitswurzeln) zulassen müssen, und der Verf. nimmt daher solche Multiplicatoren gleich in allgemeinster Weise in die Definition „automorpher Formen" auf (S. 21). Es folgen Untersuchungen über die möglichen Multiplica-

torensysteme (S. 30), über die Darstellung der automorphen Formen durch $(z_1, z_2)$ (S. 39), über ihre Null- und Unendlichkeitsstellen (S. 46), über die zu dem Fundamentalbereiche gehörigen Integrale (S. 53). Zu bemerken ist dabei eine eigentümliche reciproke Beziehung zwischen je einer Form von positivem und einer von negativem Grade.

Der dritte Teil hat zum Gegenstand die analytische Darstellung der automorphen Formen durch Reihen, welche Verallgemeinerung der von Poincaré gegebenen séries thêtafuchsiennes und thêtakleinéennes sind, und welche der Verf. deshalb als Poincaré'sche Reihen bezeichnet. (Die Scheidung der groupes fuchsiens und groupes kleinéens hat zwar seinerzeit das erste Eindringen in dieses Gebiet vermöge der grösseren geometrischen Zugänglichkeit der ersteren wesentlich erleichtert, ist aber für allgemeine Untersuchungen wie die vorliegenden von ganz secundärer Bedeutung; noch mehr gilt dies von Poincaré's weiteren Unterabteilungen.) Die erste Frage ist natürlich die nach der Convergenz dieser Reihen. Der Verf. giebt an, dass diese auch noch in gewissen Fällen stattfindet, in welchen Poincaré die Frage offen gelassen hatte (S. 57), in anderen sicher nicht; noch andere Fälle muss auch er unentschieden lassen (S. 58). Aus den Poincaré'schen Reihen werden durch Integration Reihen- und Productdarstellungen für die automorphen Integrale hergeleitet (S. 64). Endlich folgt noch eine Zerlegung der automorphen Formen in Elementarformen (S. 69), aus der sich insbesondere ergiebt, dass sicher nicht alle „holotypischen" Reihen identisch Null sind (S. 74). Bdt.

---

R. Fricke. Ueber discontinuirliche Gruppen, deren Substitutionscoefficienten ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind. Gött. Nachr. 1892. 268-271.

Sei $q$ eine feste positive ganze Zahl ohne quadratischen Teiler; dann bilden die unimodularen linear gebrochenen Substitutionen einer complexen Variable $\omega$ mit den Coefficienten:

$$\begin{pmatrix} a+b\sqrt{q}+\sqrt[4]{q}(\alpha+\beta\sqrt{q}), & c+d\sqrt{q}+\sqrt[4]{q}(\gamma+\delta\sqrt{q}) \\ -c-d\sqrt{q}+\sqrt[4]{q}(\alpha+\beta\sqrt{q}), & a+b\sqrt{q}-\sqrt[4]{q}(\alpha+\beta\sqrt{q}) \end{pmatrix}$$

($a$, $b$, $c$, $d$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ganze Zahlen) eine Gruppe, von der unter Benutzung einer projectiven Massbestimmung gezeigt wird, dass ihr in der $\omega$-Ebene ein endlicher Fundamentalbereich zugehört.

Bdt.

---

R. Fricke. Ueber ein allgemeines arithmetisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen. Gött. Nachr. 1892. 453-460.

Verallgemeinerung des in dem vorhergehenden Referat besprochenen Ansatzes: ein Zahlkörper $n^{\text{ten}}$ Grades wird zu Grunde gelegt, die Quadratwurzeln aus zwei bestimmten ganzen Zahlen desselben werden adjungirt, mit den so gewonnenen Zahlen als Coefficienten werden Gruppen linearer Substitutionen einer complexen Veränderlichen gebildet. Für den Fall, dass der Zahlkörper ein reeller ist, werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, dass der Gruppe in der $\omega$-Ebene ein endlicher Fundamentalbereich zugehört. Der Nachweis stützt sich auf den Satz von der Anzahl unabhängiger Einheiten und auf die Theorie der Pell'schen Gleichung in einem höheren Körper. Ausführliche Darstellung in Math. Ann. XLII. 1893. Bdt.

---

R. Fricke. Zur Theorie der Modularcorrespondenzen. Gött. Nachr. 1892. 272-279.

Der algebraischen Behandlung der Modularcorrespondenzen siebenter Stufe wird dasjenige Modulsystem $x_1$, $x_2$, $x_3$ dieser Stufe zu Grunde gelegt, das der Relation $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$ genügt. Zahlentheoretische Ueberlegungen führen zur Aufstellung der Bedingungen dafür, dass die Correspondenz durch eine algebraische Gleichung zwischen den ursprünglichen und den transformirten Moduln rein dargestellt werden kann. Für $n = 3, 6, 19, 12$ führen invariantentheoretische Sätze zur expliciten Aufstellung dieser Gleichungen. Ausführliche Darstellung in Klein-Fricke, Modulfunctionen, II. Bd. (Leipz. 1892) S. 667 ff. (vgl. das Referat S. 412 dieses Bandes). Bdt.

---

R. Fricke. Ueber die zur Verzweigung (2, 3, 7) gehörende $s$-Function. Gött. Nachr. 1892. 279-282.

Das arithmetische Bildungsgesetz der zugehörigen Substitutionscoefficienten wird klar gelegt; es handelt sich um ganze Zahlen des durch $j^6+4j^4+3j^2-1=0$ definirten reellen Zahlkörpers. Ausführlich in Math. Ann. XLI, 443, vergl. das folgende Referat.

Bdt.

---

R. Fricke. Ueber den arithmetischen Charakter der zu den Verzweigungen (2, 3, 7) und (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunctionen. Math. Ann. XLI. 443-468.

Der kubische Zahlkörper, welcher die zweigliedrigen Perioden aus den siebenten Einheitswurzeln enthält, wird mit $K$ und die Irrationalität $\sqrt{e^{\frac{2i\pi}{7}}+e^{-\frac{2i\pi}{7}}-1}$ vom sechsten Grade wird mit $j$ bezeichnet. Der Verfasser studirt die Gruppe $\Gamma$ aller linearen Substitutionen von der Gestalt

$$\eta' = \frac{(A+jB)\eta+(C+jD)}{(-C+jD)\eta+(A-jB)},$$

wo $A$, $B$, $C$, $D$ ganze Zahlen des Körpers $K$ sind und die Determinante der Substitution

$$A^2+C^2-j^2(B^2+D^2)=1$$

wird. Diese Gruppe $\Gamma$ wird zunächst durch Spiegelung an der imaginären Axe der $\eta$-Ebene in bekannter Weise zu der Gruppe $\bar{\Gamma}$ erweitert. Durch Aufstellung der elliptischen Substitutionen von $\bar{\Gamma}$ zeigt der Verfasser, dass zu dieser Gruppe $\bar{\Gamma}$ ein Kreisbogensiebeneck mit lauter rechten Winkeln als Fundamentalbereich in der $\eta$-Ebene gehört: eine Thatsache, aus welcher sich eine Reihe bemerkenswerter arithmetischer und functionentheoretischer Folgerungen ergiebt. Durch weitere Hinzufügung einer gewissen Substitution von der Periode 7 entstehen aus $\bar{\Gamma}$, $\Gamma$ die Gruppen $\Gamma_{(7)}$, $\bar{\Gamma}_{(7)}$, welche ihrerseits mit der Gruppe der zur Verzweigung (2, 4, 7) gehörenden Dreiecksfunctionen in unmittelbarem Zusammenhange stehen. Endlich wird die auf zwei Arten mögliche Einteilung des genannten Siebenecks in 63 Kreisbogendreiecke vom Typus (2, 3, 7) untersucht und der arithmetische Charakter der diese beiden Einteilungen vermittelnden Gruppen $\Gamma_{(63)}$, $\Gamma'_{(63)}$ bestimmt. Ht.

---

O. Biermann. Ueber die Darstellung der Fuchs'schen Functionen erster Familie durch unendliche Producte. (Fortsetzung.) Monatsh. f. Math. III. 143-168.

Das Endergebnis einer früheren Arbeit des Verfassers (ebenda, Bd. I, F. d. M. XXII. 1890. 425) war die Darstellung einer innerhalb des Einheitskreises gültigen analytischen Function in Form eines Quotienten unendlicher Producte, wenn deren Null- und Unendlichkeitsstellen in dem einer Gruppe linearer Substitutionen von der ersten Familie und dem ersten Rang zugehörigen Elementarpolygone gegeben waren, während die Null- und Unendlichkeitsstellen in dem äquivalenten Polygone die äquivalenten der erstgenannten waren. Die damals nicht erledigte Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass diese Function eine Fuchs'sche sei, wird hier wieder aufgenommen und in einem speciellen Falle näher untersucht.

Es wird zuerst die Vorschrift zur Herstellung einer discontinuirlichen Fuchs'schen Gruppe linearer Substitutionen ausgeführt, der als Fundamentalbereich ein convexes Viereck erster Familie vom Geschlechte 1 zugehört; dann werden umgekehrt zwei reelle Substitutionen von der Determinante 1:

$$(\Gamma) \qquad \left(z,\ \frac{\alpha_1 z+\beta_1}{\gamma_1 z+\delta_1}\right),\quad \left(z,\ \frac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2}\right)$$

gegeben, von denen man weiss, dass sie die Erzeugenden einer discontinuirlichen Gruppe vom Geschlechte 1 sind, und es wird der zugehörige Fundamentalbereich ermittelt. Ein specielles Zahlenbeispiel erläutert die Rechnung.

Nach dieser arithmetischen Beschreibung des Fundamentalbereiches, der zu $\Gamma$ gehört, wird die Theorie der Formen zweiten Grades $ax^2+bxy+cy^2$, wo $a$, $b$, $c$ ganze Zahlen sind, die also durch die Zusammensetzung der Coefficienten der fundamentalen Substitutionen der Modulgruppe

$$(z,\ z+1),\quad \left(z,\ -\frac{1}{z}\right)$$

durch die zwei directen der vier Rechnungsoperationen gebildet sind, auf die Formen zweiten Grades übertragen, in welchen die

Coefficienten $a$, $b$, $c$ zu demjenigen Grössenbereiche gehören, bei dem jede Grösse $\pm\alpha_i$, $\pm\beta_i$, $\pm\gamma_i$ $(i = 1, 2)$ durch Multiplication und Addition zusammengesetzt ist.

Schliesslich wird die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgenommen, unter welchen eine der fraglichen Functionen bei den Substitutionen der Gruppe $\Gamma$ ungeändert bleibt. Seine Behandlungsweise führt den Verfasser auf ein Problem, das nicht mehr dem Gebiete der Functionen einer Veränderlichen angehört, indem es von Reihen mit mehreren Parametern abhängt, so dass damit der gewünschte Abschluss allerdings nicht vollständig erreicht wird. Bm.

---

L. Schlesinger. Sur la théorie des fonctions fuchsiennes. C. R. CXIV. 1100-1102, 1409-1412.

Im Journal für Math. Bd. CV (F. d. M. XXI. 1889. 438) hatte der Verfasser bewiesen, dass die symmetrischen Fuchs'schen Functionen der zweiten Familie als die Grenzen gewisser algebraischer Functionen betrachtet werden können, entsprechend einer Reihe von Untergruppen der Gruppe genannter Functionen. Diese Erzeugungsweise wird nun auf den Fall der übrigens ganz beliebigen Fuchs'schen Functionen vom Geschlechte Null ausgedehnt. Zu diesem Zwecke wird zuerst eine Gruppe $E$ von linearen Substitutionen betrachtet, welche aus $n$ Fundamentalsubstitutionen $S_1, \dots, S_n$ zusammengesetzt ist, zwischen denen keine Relation stattfindet; dann handelt es sich darum, eine Reihe von Untergruppen der Gruppe $E$ zu bilden, die sich in der Weise immer enger zusammenzieht, dass die Grenze dieser Untergruppen die identische Substitution bildet. Diese Zerlegung der Fuchs'schen Gruppe $E$ giebt dann Veranlassung zu einer unbegrenzten Folge von algebraischen Functionen einer Variable $x$, welche sich einer Grenze $z$ nähert, so dass $x$ eine Fuchs'sche Function von $z$ vom Geschlechte Null ist und der zweiten oder vierten Familie angehört.

Der Algorithmus zur Bildung dieser unendlichen Reihe von algebraischen Functionen wird für den Fall entwickelt, dass die Gruppe $E$ der zweiten Familie angehört, und dadurch wird ein

neuer Beweis für das fundamentale Theorem Poincaré's über die Existenz der Fuchs'schen Gleichungen in einem gegebenen Typus erhalten; und zwar stützt sich dieser Beweis nicht auf das Continuitätsprincip, sondern er schliesst mittels des Dirichlet'schen Princips auf die Existenz einer algebraischen Function, die einer bestimmten Riemann'schen Fläche zugehört. Bm.

---

W. H. Echols. On certain determinate forms and their applications. Annals of Math. VI. 105-126; VII. 11-59.

Bericht auf S. 145 dieses Bandes.

---

P. Painlevé. Sur les groupes discontinus de substitutions non linéaires à une variable. C. R. CXIV. 1345-1348.

Bericht auf S. 137 dieses Bandes.

---

H. Burkhardt. Ueber einen fundamentalen Satz der Lehre von den endlichen Gruppen linearer Substitutionen. Math. Ann. XLI. 309-312.

Bericht auf S. 135 dieses Bandes.

---

Riquier. Sur les principes de la théorie générale des fonctions. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 281-282.

Der Verfasser giebt einem Beweise, der sich in seiner unter gleichem Titel erschienenen Abhandlung (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 422) findet, eine correctere Fassung. Hz.

---

D. Hilbert. Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten. J. für Math. CX. 104-129.

Bericht auf S. 87 dieses Bandes.

---

# Capitel 2.

## Besondere Functionen.

### A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

G. D. d'Arone. Sur la fonction exponentielle. S. M. F. Bull. XX. 2-4.

1) Bezeichnen $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zwei endliche und stetige Functionen von $n$ reellen Veränderlichen mit eben solchen ersten Ableitungen, deren zweite Ableitungen endlich sind und der Laplace'schen Gleichung

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

genügen, und ist die Differenz

$$A = e^{M(x_1, x_2, \ldots, x_n)} - e^{N(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

eine von Null verschiedene Constante, so reduciren die Functionen $M$ und $N$ sich auf Constanten.

2) Ist die Differenz zweier Exponentialfunctionen, deren Exponenten zwei ganze rationale Functionen sind, constant, so müssen diese beiden Functionen sich auf Constanten reduciren.

3) Verfasser giebt einen Weg an, mittels der vorhergehenden Entwickelungen auf directem Wege folgenden äusserst wichtigen Satz von Picard zu beweisen: „Wenn eine in der ganzen Ebene holomorphe Function weder den Wert $a$ noch den Wert $b$ annimmt, so reducirt sie sich auf eine Constante". Wbg.

---

A. Bassani. Sur une représentation des fonctions exponentielles par des produits infinis. Teixeira J. XI. 93-106.

Der Verf. beweist zuerst die Formel

$$(1) \qquad e^{-\Sigma F(n)\cdot\frac{z^n}{n}} = \Pi(1-z^n)^{\frac{f(n)}{n}} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

in der $F(n)$ eine ganze Function von $n$, $f(n)$ eine durch die Gleichung

$$F(n) = \Sigma f(\delta)$$

definirte Function bedeutet, bei der die Summe $\Sigma$ sich auf alle Teiler $\delta$ der Zahl $n$ bezieht. Aus (1) wird hergeleitet:

$$(2) \qquad e^{-\int_0^z \frac{z^{\nu-1}dz}{(1-z)(1-z^\nu)}} = \prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{\varphi_\nu(n)}{n}},$$

wo $\varphi_\nu(n)$ die Anzahl unkürzbarer Brüche mit dem Zähler $n$ bezeichnet, die nicht kleiner als $\nu$ sind. Setzt man in dieser Formel $\nu=1$, so erhält man eine Formel des Hrn. Lipschitz (C. R. XCIX. 701, F. d. M. XVI. 1884. 394). Hierauf werden die Fälle behandelt:

$$F(n) = \begin{cases} 0 \text{ für } n>1, \\ 1 \quad ,, \quad n=1; \end{cases} \quad F(n) = \sin\tfrac{1}{2}n\pi, \quad F(n) = n^r, \quad \text{etc.}$$

Die Betrachtung der beiden ersten Fälle führt den Verf. zu den Entwickelungen der Exponentialfunctionen $e^{-z}$, $e^{-\operatorname{arctg} z}$ in unendliche Producte. Tx. (Lp.)

---

J. Hadamard. Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$. C. R. CXIV. 1053-1055.

Ist in der Taylor'schen Entwickelung einer ganzen Function $\varphi(x)$ von der Form $e^{G(x)}$ der Coefficient von $x^m$ von einem gewissen Gliede an kleiner als $\frac{1}{(m!)^\alpha}$, so ist $G(x)$ ein Polynom. Wenn $\alpha>1$, so hat die Gleichung $\varphi(x)=P(x)$ für jedes beliebige Polynom $P$ unendlich viele Wurzeln; wenn in dem Falle $\alpha<1$ die Function $\varphi(x)-P(x)$ von der Form $P_1(x)e^{G(x)}$ ist, so reducirt $G$ sich ebenfalls auf ein Polynom. Wbg.

---

I. Stringham. A classification of logarithmic systems. American J. XIV. 187-194.

Der Verfasser benutzt die logarithmische Spirale als Mittel zu einer allgemeinen Definition des Logarithmus und zur Ableitung seiner Eigenschaften. Diese Behandlungsweise gewinnt, abgesehen von ihrem geometrischen Interesse, auch für die Analysis dadurch an Wichtigkeit, dass sie durch Einführung „gonischer" Systeme von Logarithmen, deren Moduln einen Winkel als Bestimmungselement enthalten, zu einer Klassification der Logarithmensysteme führt.

Wbg.

---

A. Breuer. Die Logarithmen complexer Zahlen in geometrischer Darstellung. Ein Beitrag zur algebraischen Analysis. Erfurt. B. Bacmeister. 6 S. Mit 1 Fig.-Taf. 8°.

Es sei die Strecke $OB_1$ die Basis der Logarithmen und $OB_0$ die Längeneinheit. Der Winkel $B_0 OB_1 = \beta_1$ sei 57,3°, so dass der mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebene Bogen $B_0C = 1$ ist. Legt man nun durch $B_0$ und $B_1$ die logarithmische Spirale vom Ursprunge $O$, so ist ihre Gleichung (da $\beta_1 = 1$)

$$r = B^\beta \quad \text{oder} \quad \beta = \log r.$$

Hierdurch ist die Amplitude $\beta$ das Mass vom Logarithmus $r$, der Logarithmus einer reellen Zahl mithin als eine Drehung um den Winkel $\beta$ definirt. Ferner ist:

$$\text{Log}[r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)] = \beta \pm i(\varphi \pm 2k\pi).$$

Um demnach von $B^0 = 1$ zu $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ zu gelangen, hat man erstens in der Ebene der reellen Zahlen die Drehung $\beta$ und zweitens die Drehung $i\varphi$ normal zu ihr auszuführen. Wz.

---

A. Breuer. Die goniometrischen Functionen complexer Winkel. Eine Ergänzung zur algebraischen Analysis. Erfurt. B. Bacmeister. 14 S. 8°. Mit 1 Fig.-Taf.

Der Verfasser ist bei seinen Studien über das Imaginäre in der Geometrie auf Widersprüche zwischen seinen Resultaten mit denen der algebraischen Analysis gestossen. Er setzt z. B. $\text{tg}\, i\varphi = i\sin\alpha$ und „verwandelt“ diese Formel in $i\varphi = i\,\text{arctg}\,\alpha$, woraus sich dann

$$\text{tg}\, i\varphi = i\,\text{tg}\,\varphi$$

ergiebt. Nach Ansicht des Referenten ist dies nicht richtig; ebenso ist in der Formel

$$\text{tg}\, i(\varphi \pm \psi) = \frac{\sin i\varphi \cos i\psi \pm \cos i\varphi \sin i\psi}{\cos i\varphi \cos i\psi \pm \sin i\varphi \sin i\psi}$$

im Nenner $\pm$ in $\mp$ zu verändern; der Verfasser gewinnt hieraus die (nach Ansicht des Referenten unrichtigen) Formeln:

$$\operatorname{tg} 2i\varphi = 2 \sin i\varphi \cos i\varphi,$$

$$\cos i(\varphi \pm \psi) = \frac{\cos i\varphi \cos i\psi \pm \sin i\varphi \sin i\psi}{\sqrt{1 \pm \operatorname{tg} 2i\varphi \operatorname{tg} 2i\psi}},$$

$$\sin i(\varphi \pm \psi) = \frac{\sin i\varphi \cos i\psi \pm \cos i\varphi \sin i\psi}{\sqrt{1 \pm \operatorname{tg} 2i\varphi \operatorname{tg} 2i\psi}}.$$

Wz.

---

H. Laurent. Démonstration simple des formules qui servent au calcul des tables de logarithmes sinus. Nouv. Ann. (3) XI. 119-120.

G. Peano. Extrait d'une lettre à M. Brisse. Nouv. Ann. (3) XI. 289.

Der erste Artikel beabsichtigt, die Darstellung des Sinus als unendliches Product einfacher als gewöhnlich herzuleiten. Der zweite weist den dabei begangenen Fehler nach. H.

---

C. A. Laisant. Note relative au symbole $i^i$, et en général à l'opération $p^q$. S. M. F. Bull. XX. 12-15.

Bekannte Reduction jener Complexen auf die Grundform, zur Berichtigung einer Angabe eines Autors. H.

---

A. Forti. Nuove tavole delle funzioni iperboliche aventi per argomento il loro doppio settore, precedute da nozioni principali della teoria, da cenni monografici ed applicazioni. Roma. Società editrice Laziale. LIII + 299 S. 8°.

Diese Tafeln geben für jeden Doppelsector $\omega$ von $\omega = 0$ bis $\omega = 8$: $\log\omega$, $\log\sinh\omega$, $\log\cosh\omega$, $\log\operatorname{tgh}\omega$, $\sinh\omega$, $\cosh\omega$, $\operatorname{tgh}\omega$ und $\tau$, wo $\tau$ den „Lambert'schen transcendenten Winkel" bezeichnet, der mit $\omega$ durch die Relation $\operatorname{tg}\tau = \sinh\omega$ zusammenhängt. $\omega$ nimmt um je $\frac{1}{10000}$ von 0 bis 0,2100, um je $\frac{1}{1000}$ bis 2,010, um je $\frac{1}{100}$ bis 8 zu; eine weitere Ausdehnung wäre für den Zweck des Verfassers unnütz, da man ja bei der angenommenen Annäherung $\sinh 8 = \cosh 8$ hat. Eine Einleitung enthält die Theorie der hyperbolischen Functionen, ihre Anwendungen auf sphärische Geometrie und Trigonometrie und einige historische und bibliographische Aufzeichnungen; die letzten bilden nur eine Ver-

vollständigung der in einem früheren Werke des Verfassers (Tavole dei logaritmi dei numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche, Torino, Paravia, 1870) enthaltenen Notizen. Die ganz günstigen Urteile der Società Reale di Napoli und des Istituto Lombardo werden vorangeschickt. Vi.

---

F. J. Studnička. Sur de nouvelles formules pour le calcul du nombre $\Pi$ de Laisant. Liège Mém. (2) XVII. 7 S.

Vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 441.

---

F. J. Studnička. Ueber einige Analogien zwischen der Ludolfine und der Laisantine. Prag. Ber. 1892. 250-253.

Die durch die Gleichung $\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}\Pi} - e^{-\frac{1}{2}\Pi}) = 1$ bestimmte Zahl $\Pi$, die „Laisantine", soll als die wahre Analogie von $\pi$ betrachtet werden, um einen grösseren Parallelismus zwischen den Formeln der Theorie der Kreisfunctionen und der Hyperbelfunctionen zu erzielen. Lh.

---

F. J. Studnička. Ueber eine möglichst kurze Entwickelung zweier goniometrischen Formeln. Časopis. XXI. 128-133. (Böhmisch.)

Unter Verwendung der Exponentiellen wird die Relation

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{K}{S}(nx) = \genfrac{}{}{0pt}{}{f}{F}[n,\ K^m(x)],$$

wo $K$, $S$ den hyperbolischen Cosinus und Sinus bedeutet, auf eine kurze Weise entwickelt und auf cyklische Functionen übertragen. Std.

---

H. Schapira. Theorie allgemeiner Cofunctionen und einige ihrer Anwendungen. I. 2. I. Leipzig. B. G. Teubner. VIII + 224 S. 8°.

In dem Vorwort wird ausgeführt, dass viele Eigenschaften der Functionen sehr viel klarer, übersichtlicher, verwendbarer hervortreten, ja begrifflich erst entstehen durch die gleichzeitige Betrachtungsweise der zusammengehörigen „Cofunctionen". „Diese

Thatsache wurde bereits empfunden bei und seit der Entstehung der trigonometrischen, der ersten der überhaupt existirenden transcendenten Functionen: Zum Sinus musste man sich gleichzeitig den Cosinus bilden und sie beide als Cofunctionen betrachten. Die algebraische Cofunctionalität kommt hierbei entweder in Gestalt einer algebraischen Relation zweiten Grades mit rationalen Coefficienten $u^2+v^2-1=0$ zum Vorschein, welche beide Cofunctionen zusammen identisch befriedigen, wenn man $u=\sin x$, $v=\cos x$ setzt; oder als das sogenannte algebraische Additionstheorem, oder endlich auch als lineare homogene Relation zwischen $\cos x$, $\sin x$ einerseits und $e^{ix}$, $e^{-ix}$ andrerseits." Aus diesen Worten des Verfassers sieht man, durch welche Ueberlegungen derselbe zu der Einführung des allgemeinen Begriffs der Cofunctionen gekommen ist. Unter einem System zusammengehöriger Cofunctionen versteht nämlich der Verfasser irgend welche $n$ lineare, homogene, unter einander unabhängige Verbindungen der $n$ Functionen

$$f(\alpha_0 x),\ f(\alpha_1 x),\ \dots,\ f(\alpha_{n-1} x),$$

wo $f(x)$ eine beliebige Potenzreihe (die sogenannte Hauptfunction) und $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades bedeuten, für welche insbesondere die Gleichung $x^n-1=0$ gewählt wird. Es werden dann zahlreiche Probleme aus der Theorie der algebraischen Gleichungen und der linearen Differentialgleichungen genannt, für welche die Theorie der Cofunctionen von Nutzen sein soll. Referent hat sich hiervon durch die Lectüre des Buches nicht überzeugt. Ht.

---

J. E. A. Steggall. On the smallest number of entries necessary in a table of logarithms to seven decimal places. Edinb. M. S. Proc. X. 35-37.

---

D. M. Sintzoff. Bernoulli'sche Functionen mit beliebigen Indices. Kasan Ges. (2) I. 234. (Russisch.)

Die Resultate der in F. d. M. XXII. 1890. 443 besprochenen

Arbeit über die Functionen

$$\varphi_{p,s}(x) = \left[D_z^s\left(\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^p(e^{xz}-1)\right)\right]_{z=0}$$

werden auf beliebige Werte von $p$ und $s$ ausgedehnt. Die meisten Eigenschaften der Bernoulli'schen Functionen bleiben auch in diesem Falle bestehen, obgleich die verallgemeinerten Functionen keine ganzen Polynome sind. Um in § 2 die Formel

$$\Delta_x^m \varphi_{p,s}(x) = D_x^m \varphi_{p-m,s}(x)$$

zu beweisen für die Werte von $m$, deren reeller Teil grösser als Null ist, zeigt der Verf., dass für solche $m$

$$\Delta_x^m u_x = (-1)^m[u_x-(m)_1 u_{x+1}+(m)_2 u_{x+2}-(m)_3 u_{x+3}+\cdots]$$

ist, wenn $u_x$ endlich bleibt für alle Werte von $x$, deren reeller Teil von einem endlichen Werte an bis $+\infty$ sich ändert, deren imaginärer Teil aber constant bleibt.

Es werden auch einige Eigenschaften der höheren Bernoulli'schen Zahlen mit beliebigen Indices gezeigt, so z. B.

$$p B_{p+1,s} = (p-s) B_{p,s} - p.s B_{p,s-1},$$

$$B_{-m,s} = \frac{\Delta^m 0^{s+m}}{(s+m)^{m|1}} \qquad (m \text{ eine ganze Zahl}),$$

$$B_{1,s} = \frac{\Gamma(1+s)}{(2\pi)^s}\,\frac{1+(-1)^s}{(-1)^{\frac{1}{2}s-1}}\cdot\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Wi.

J. Thomae. Ueber die Function $W\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & n\end{pmatrix}$ für singuläre Werte ihrer Parameter. J. für Math. CX. 78-103.

Die vorliegende Abhandlung schliesst sich unmittelbar an eine frühere Abhandlung desselben Verfassers an, über die in F. d. M. XI. 1879. 336 ausführlich referirt worden ist. Die Thomae'sche $W$-Function ist durch eine gewisse Differenzengleichung zweiter Ordnung definirt und bildet zugleich ein Analogon und eine Verallgemeinerung der Riemann'schen $P$-Function. Wie nun einzelne Zweige der letzteren Function für den Fall, dass unter den charakteristischen Exponentendifferenzen ganze Zahlen vorkommen, unbrauchbar werden und durch andere, deren Entwickelungen Loga-

rithmen enthalten, ersetzt werden müssen, so findet ein ähnliches für die Zweige der $W$-Function statt. Der Verfasser zeigt an einer Reihe von Fällen, welches die „Ersatzzweige" für die $W$-Function sind. Durch einen Grenzübergang lassen sich beiläufig die für die $W$-Function erhaltenen Ergebnisse auf die Riemann'sche $P$-Function übertragen. Hz.

---

J. Beaupain. Sur l'intégrale eulérienne de première espèce. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 309-328.

Im ersten Capitel stellt der Verf. zwei Reihenentwickelungen für

$$B(a,x)=\frac{\Gamma(a).\Gamma(x)}{\Gamma(a+x)}\quad\text{und}\quad\frac{1}{B(a,x)}=\frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(a).\Gamma(x)}$$

auf; im zweiten giebt er als Anwendung derselben convergente Reihen für die Functionen $\Pi\frac{\cos(2x-m)\Theta}{\sin\pi x}$ und $\Pi\frac{\sin(2x-m)\Theta}{\sin\pi x}$, aus welchen durch Specialisirung zahlreiche, zum Teil bekannte Formeln hervorgehen; im dritten Capitel wird die Reihenentwickelung für $\frac{1}{B(a,x)}$ zur Summation einer ganzen Gruppe trigonometrischer Reihen benutzt, wobei sich bemerkenswerte Reihen für $\frac{1}{8}\pi^2$ und $\pi$ ergeben; das vierte Capitel endlich bringt zwei neue Formen der Entwickelung von $B(a,x)$ und $\frac{1}{B(a,x)}$. Wbg.

---

L. Pochhammer. Bemerkungen über das Integral $\overline{\Gamma}(a)$. Math. Ann. XLI. 157-166.

Verschiedene Umformungen des von Hankel statt des Euler'schen Integrals zweiter Gattung eingeführten Integrals

$$\overline{\Gamma}(a)=\int e^u u^{a-1}du,$$

in welchem die Variable $u$, vom unendlich fernen Punkte der negativen reellen Axe ausgehend und dahin zurückkehrend, einen positiven Umlauf um den Nullpunkt ausführt. Es werden einerseits durch Substitutionen, wie z. B. $u=t^{-1}$, neue Variabeln eingeführt, andererseits die Integrationswege stetig deformirt.

Bdt.

Ed. Weyr. Ueber die Summation gewisser unendlicher Reihen. Casopis XXI. 161-180. (Böhmisch.)

Behandelt die bekannten Fundamentaleigenschaften der Gauss'schen Function $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, berichtet ausführlich über den Gauss'schen Nachweis der Wertbestimmung von $\Psi(z)$ für rationale Argumente. Summirung von unendlichen Reihen, deren allgemeines Glied $u_\nu$ eine rationale Function des Index $\nu$ ist. Lh.

---

C. Schellenberg. Neue Behandlung der hypergeometrischen Function auf Grund ihrer Definition durch das bestimmte Integral. Diss. Göttingen. Dieterich'sche Univers.-Buchdr. (W. Fr. Kästner.) 68 S. gr. 8°.

Der Verfasser entwickelt hier die Theorie der hypergeometrischen Function unter consequenter Benutzung homogener Variabeln und der von den Herren C. Jordan und Pochhammer eingeführten Integrale mit Doppelumlauf. Er verwirklicht damit ein Programm, welches Herr Klein (Math. Ann. XXXVIII. 151, F. d. M. XXIII. 1891. 337) aufgestellt hat. Gegenüber anderen Definitionen der hypergeometrischen Function hat die durch das bestimmte Integral den Vorzug, unmittelbar erkennen zu lassen, dass die Function eine ganze transcendente Function der Parameter (d. i. der unter dem Integralzeichen auftretenden Exponenten) ist. Dieser Thatsache entsprechend, gelingt es dem Verfasser leicht, die Fälle, in denen gewisse Combinationen der Parameter ganze Zahlen sind, als Grenzfälle in die allgemeine Theorie einzuordnen, während dieselben in früheren Darstellungen, wie zum Beispiel in Riemann's klassischer Abhandlung, ausgeschlossen werden mussten. Was die Einführung homogener Variabeln angeht, so bringt dieselbe einerseits eine hohe formale Eleganz in den Formeln mit sich und setzt andererseits die Symmetrien, welche die Function rücksichtlich der in ihr eingehenden Grössen darbietet, in Evidenz. Den behandelten Stoff hat der Verfasser in fünf Capitel eingeteilt, von denen das erste, einleitende, den Euler'schen Integralen gewidmet

ist, die folgenden das Studium der verschiedenen Zweige der hypergeometrischen Function, deren mannigfache Potenzentwickelungen und die Theorie der verwandten Functionen enthalten. Bei den im ersten Capitel auftretenden Grenzübergängen vermisst der Referent die Begründung ihrer Zulässigkeit. Hz.

---

Levavasseur. Sur les fonctions contiguës relatives à la série hypergéométrique de deux variables. C. R. CXV. 1255-1258.

Ist

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

$$\int_0^1 U du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma;\ x, y),$$

so besteht zwischen der Function $F_1$ und drei beliebigen der acht verwandten (contiguës) Functionen $F_1(\alpha \pm 1)$, $F_1(\beta \pm 1)$, $F_1(\beta' \pm 1)$, $F_1(\gamma \pm 1)$ eine homogene lineare Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen von $x$ und $y$ sind.

Jede partielle Ableitung zweiter und höherer Ordnung der Function $F_1$ und jede angrenzende Function

$$F_1(\alpha \pm m,\ \beta \pm n,\ \beta' \pm n',\ \gamma \pm p;\ x, y)$$

ist als lineare homogene Function von $F_1$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ darstellbar, deren Coefficienten rationale Functionen von $x$ und $y$ sind.

Das System der drei simultanen partiellen Differentialgleichungen, dem die hypergeometrische Reihe $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma;\ x, y)$ genügt, hat 10 Integrale der Form $\int_g^h U du$, wo $g, h = 0, 1, \infty, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ sind. Die linearen Relationen, welche zwischen dreien oder vieren dieser Integrale bestehen, sind nach der verschiedenen Lage von $x$, $y$ verschieden und werden in 14 Tafeln eingeteilt.

Wz.

---

A. A. Markoff. Ueber eine ganze Function, die dem Producte zweier hypergeometrischen Reihen gleich ist. Charkow Ges. (2) III. 252-254. (Russisch.)

In der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe" (Charkow Ges. II, F. d. M. XIX. 1887. 330) hat der Verfasser alle Fälle bestimmt, in welchen das Product irgend welcher zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\Big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\Big)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

einer ganzen Function von $x$ gleich ist. Jetzt zeigt er, veranlasst durch das merkwürdige Theorem Klein's über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe, dass, wenn $-\alpha-\beta$ gleich einer ganzen positiven Zahl $n$ ist, $-\gamma+\frac{1}{2}=k$ (eine ganze positive Zahl, die kleiner oder gleich $n$ ist) und $\alpha-\beta=\Delta$ (nicht ganze Zahl), die gesuchte ganze Function erstens durch das Product

$$Lx^n F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\frac{1}{x}\right)\cdot F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\frac{1}{x}\right),$$

zweitens durch ein Polynom gegeben wird, in welchem die Coefficienten der Potenzen von $x$ die hypergeometrischen Reihen höherer Ordnung $F(\lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, x)$ sind. Wi.

---

A. Markoff. Sur la série hypergéométrique. Math. Ann. XL. 313-316.

Der Verfasser hat in einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 330) gezeigt, dass das Product der hypergeometrischen Reihen $F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x)$ und $F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, x)$ eine ganze rationale Function von $x$ ist, wenn $-\alpha-\beta$ und $-\gamma+\frac{1}{2}$ positive ganze Zahlen sind, von denen die letztere die erstere nicht übersteigt. In der vorliegenden Mitteilung giebt er einige Eigenschaften dieser ganzen Function. So bestimmt er namentlich die Anzahl ihrer reellen Nullstellen und den Ausdruck ihrer Discriminante als Function der Parameter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Hz.

---

A. Markoff. Sur la série hypergéometrique. C. R. CXIV. 54-55.

Ist $\alpha+\beta=\gamma-\frac{1}{2}=-n$ eine negative ganze Zahl, so reducirt

sich das Product

$$F(\alpha,\ \alpha+1-\gamma,\ \alpha-\beta+1,\ x).\quad F(\beta,\ \beta+1-\gamma,\ \beta-\alpha+1,\ x)$$

auf eine ganze rationale Function von $x$. Indem der Verfasser den Satz des Hrn. Klein über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe auf die Factoren des Productes anwendet, erhält er die Zahl $N_1$ der positiven und die Zahl $N_2$ der negativen Wurzeln jener ganzen Function. Hz.

---

M. Lerch. Ueber die Eigenschaften der unendlichen Reihe $\varphi(x, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-a}$. Casopis XXI. 65-68. (Böhmisch.)

Bericht auf S. 232 dieses Bandes.

---

## B. Elliptische Functionen.

A. G. Greenhill. The applications of elliptic functions. London. Macmillan and Co. XI + 357 S. 8°.

Der Inhalt dieses Buches wird durch den Titel nicht genau bezeichnet. Herr Greenhill will nicht etwa die Theorie der elliptischen Functionen, wie sie gegenwärtig ausgebildet ist, „anwenden“, das heisst mit ihrer Hülfe Probleme anderer Disciplinen behandeln, vielmehr setzt er bei seinen Lesern, die er sich als „Studirende der angewandten Mathematik“ denkt, keine Kenntnis dieser Functionen voraus und hat die Absicht, indem er von wichtigen Problemen der Geometrie und Physik ausgeht, deren vollständige Lösung mit elementaren Mitteln nicht möglich ist, eine Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen zu liefern.

Die Ergebnisse moderner analytischer Forschungen den Physikern zugänglich zu machen und auf diese Weise die leider recht locker gewordene Verbindung zwischen Mathematik und Physik wieder fester zu gestalten, das ist ein Unternehmen, welches gewiss Anerkennung verdient. Freilich möchte es dem Referenten scheinen, als ob Herr Greenhill dieses Ziel manchmal aus dem Auge verloren

hat; denn es finden sich in seinem Buche, wie die nachfolgende Inhaltsangabe bestätigen wird, umfangreiche Capitel rein analytischer Natur, deren Verständnis kein unbeträchtliches Mass algebraischer und functionentheoretischer Vorkenntnisse verlangt. Sie werden dem Physiker schwerlich viel Freude bereiten, während auf der anderen Seite der Mathematiker zwar viele originelle Entwickelungen mit Genuss lesen, aber an verschiedenen Stellen die vollkommene Strenge der Deduction schmerzlich vermissen wird. Mehr Beispiele, und es giebt deren noch in Fülle, und eingehendere Behandlung der Beispiele, das dürfte dem Zwecke des Buches besser entsprochen haben. Unter allen Umständen aber ist das Werk des Herrn Greenhill eine bemerkenswerte Erscheinung in einem Lande, wo bis vor kurzem bei den mathematischen Prüfungen eine auch nur elementare Kenntnis der elliptischen Functionen nicht verlangt wurde.

Um nunmehr darüber zu berichten, wie der Verfasser sein Programm durchführt, so beginnt das erste Capitel mit der Behandlung des Kreispendels, die sofort auf ein elliptisches Integral erster Gattung in der Legendre'schen Normalform führt, und hieraus ergiebt sich die Veranlassung, die einfachsten Eigenschaften der elliptischen Functionen zu entwickeln, soweit das bei Beschränkung auf reelle Werte der Veränderlichen möglich ist. Im Anschlusse hieran wird im zweiten Capitel die Reduction auf die Normalformen von Legendre und Weierstrass gelehrt, wobei freilich die Beweise der Formeln meist dem Leser überlassen bleiben. Dass die durchgängige (in England übliche) Anwendung der Bezeichnung Clifford's, wonach $u = \mathrm{sn}^{-1}(x)$ die Umkehrung von $x = \mathrm{sn}\, u$ ist, dem Anfänger das Eindringen in die Theorie der elliptischen Functionen erleichtert, möchte der Referent bezweifeln. Das dritte, recht frisch und anregend geschriebene Capitel bringt eine Reihe hübscher geometrischer und physikalischer Anwendungen der elliptischen Functionen, wobei nur von verhältnismässig elementaren Eigenschaften derselben Gebrauch gemacht wird. Aehnliches gilt von dem vierten, sechsten und siebenten Capitel, in denen der Reihe nach das Additionstheorem, die Integrale zweiter und dritter Gattung und die allgemeinen elliptischen Integrale nebst ihren An-

wendungen behandelt werden, und auch vom achten, wo die doppelte Periodicität der elliptischen Functionen mit der conformen Abbildung in Zusammenhang gebracht und dadurch die Lösung von Problemen aus der Theorie der elektrischen Ströme erzielt wird.

Dagegen ist das sechste Capitel, welches sich auf die algebraische Form des Additionstheorems bezieht, rein theoretischen Inhalts, und dasselbe ist vom neunten und zehnten Capitel zu sagen, deren Gegenstände die Reihen- und Productentwickelung der elliptischen Functionen und die Transformationstheorie sind; denn die einführenden physikalischen Probleme sind unbedeutend gegenüber der Ausdehnung und Mannigfaltigkeit des Inhalts dieser Capitel, die freilich, vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet, recht interessant sind und für Studirende, die in der Theorie der elliptischen Functionen schon Fortschritte gemacht haben, viel Lehrreiches bieten dürften.

Hervorgehoben zu werden verdient auch, dass Herr Greenhill die neuere französische und deutsche Litteratur über elliptische Functionen, die in England wenig bekannt zu sein scheint, in ausreichender Weise berücksichtigt. St.

---

Felix Klein. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke. Zweiter Band. Fortbildung und Anwendung der Theorie. Leipzig. B. G. Teubner. XV + 712 S. 8°.

Nach verhältnismässig kurzer Zeit ist dem ersten Bande (F. d. M. XXII. 1890. 455-464) der zweite gefolgt, welcher, wie der Titel besagt, Fortbildung und Anwendung der Theorie bringt. Beides hängt aufs engste zusammen. Das Hereinziehen der elliptischen Functionen, das in den Abschnitten II und III des ersten Bandes durchaus vermieden worden war, um der Darstellung ihre Unabhängigkeit zu wahren, hat zunächst den Zweck, die dort gewonnenen Ergebnisse gruppentheoretischer und functionentheoretischer Natur zur Lösung von Aufgaben aus der überlieferten Theorie der elliptischen Functionen zu benutzen. Hierbei stellt sich nicht nur

heraus, „dass die verschiedenen Formen, welche man den Modulargleichungen erteilt hat, und die in gewissermassen verwirrender Mannigfaltigkeit bisher unvermittelt neben einander standen, sich einem einfachen allgemeinen Principe als sehr specielle Fälle einordnen“ (F. Klein, Math. Ann. XVII. 62) — und damit ist die erste Aufgabe des Abschnittes IV gekennzeichnet —, sondern man gelangt auch bei consequenter Fortentwickelung dieser Auffassung über den Rahmen der Ueberlieferung hinaus von den Modulargleichungen zu den Modularcorrespondenzen, die wegen der Uebereinstimmung in Grad, Galois'scher Gruppe und Vertauschbarkeit der Argumente als die natürliche Fortsetzung der Modulargleichungen anzusehen sind; ihnen ist Abschnitt VI gewidmet.

Aber gleichzeitig gewähren die Teilung und die Transformation der elliptischen Functionen Mittel — und sie zu gewinnen, ist die zweite Aufgabe des Abschnittes IV —, die dazu ausreichen, die Lösung des functionentheoretischen Grundproblems, deren Möglichkeit in Abschnitt III auf Grund der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen nachgewiesen war, die jedoch damals nur in den einfachsten Fällen explicite durchgeführt werden konnte, wie Abschnitt V zeigt, wenigstens für die Congruenzgruppen erheblich weiter zu führen, ja zu einem gewissen Abschluss zu bringen.

Daneben gehen zahlreiche geometrische und arithmetische Anwendungen.

Diese einleitenden Bemerkungen zeigen, ein wie umfangreiches und mannigfaltiges Material in dem zweiten Bande verarbeitet ist. Es wird daher an dieser Stelle nur möglich sein, den Inhalt in grossen Zügen zu skizziren.

Als elliptische Function $n^{\text{ter}}$ Stufe wird, im ersten Capitel des Abschnittes IV, eine eindeutige homogene Function der drei Argumente $u$, $\omega_1$ und $\omega_2$ definirt, welche:

1) unverändert bleibt, wenn man auf ihre Argumente die Operationen der ternären Hauptcongruenzgruppe $n^{\text{ter}}$ Stufe ausübt, die alle zur Identität mod. $n$ congruenten Substitutionen:

$$u' = u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2, \quad \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

$(\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$ umfasst;

2) bei constantem $\omega_1$ und $\omega_2$ als Function von $u$ im Periodenparallelogramm keine wesentlich singuläre Stelle aufweist;

3) bei constantem $u$ als Function von $\omega_1$ und $\omega_2$ den Charakter einer algebraischen Modulform $n^{ter}$ Stufe besitzt.

Hiernach ergeben sich als die beiden Grundprobleme aus der Theorie der elliptischen Functionen: die elliptischen Functionen beliebiger Stufe wirklich zu bilden und ihre Beziehungen zu untersuchen.

Unter den elliptischen Functionen erster Stufe ist vor allem die Weierstrass'sche Function $\wp(u;\, \omega_1,\, \omega_2)$ zu nennen, da alle Functionen erster Stufe rational durch $\wp u$, $\wp' u$ und die zugehörigen Modulformen, die Weierstrass'schen „Invarianten" $g_2$ und $g_3$, ausgedrückt werden können. Dagegen braucht man bei der zweiten Stufe, um die rationale Darstellung zu leisten, drei gleich berechtigte Functionen, und kann dafür die Functionen $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$ und $\mathrm{dn}\, u$ der Jacobi'schen Theorie wählen. Aber diese beiden Fälle sind nur die Anfangsglieder einer unendlichen Kette von Functionen, die alle gleichmässige Berücksichtigung verlangen. Für den höheren Standpunkt der allgemeinen Theorie der elliptischen Functionen $n^{ter}$ Stufe wird daher die Alternative, welche jener beiden Theorien, die Weierstrass'sche oder die Jacobi'sche, zu adoptiren sei, gegenstandlos. Die Vorzüge, die der Weierstrass'schen Theorie in vielen Fällen zukommen, beruhen darauf, dass es sich bei ihr um elliptische Functionen der niedrigsten Stufe handelt, mit deren Untersuchung man im allgemeinen beginnen wird, ohne jedoch darum die der höheren Stufen vernachlässigen zu dürfen.

Von den Functionen einer gegebenen Stufe gelangt man zu Functionen höherer Stufe durch die Processe der Teilung und der Transformation. Die Teilung $n^{ter}$ Ordnung, mit der sich der Rest des ersten Capitels beschäftigt, besteht darin, dass neben $f(u;\, \omega_1,\, \omega_2)$ auch

$$f\left(\frac{1}{n}(u+\lambda\omega_1+\mu\omega_2);\ \omega_1,\ \omega_2\right)$$

betrachtet wird; für $u = 0$ hat man die „specielle" Teilung. Ist $f$ eine Modulform erster Stufe, so ergeben sich auf diese Weise Modulformen $n^{ter}$ Stufe. Sie genügen einer im Rationalitätsbereiche

der $g_2$ und $g_3$ irreduciblen algebraischen Gleichung, der „speciellen Teilungsgleichung".

Aehnliche Betrachtungen gelten für die Teilwerte der $\sigma$-Functionen, und es tritt hier der Zusammenhang mit den Arbeiten des Herrn Kiepert hervor.

Weit ausgedehnter gestalten sich die Untersuchungen über die Transformation, von der die drei nächsten Capitel handeln.

Um gleich zur speciellen (eigentlichen) Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung überzugehen, so besteht sie darin, dass mit der Modulform $F = F(\omega_1, \omega_2)$ die Modulform $F' = F\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ zusammengebracht wird. Zwischen $F$ und $F'$ besteht dann eine im Rationalitätsbereiche der $g_2$ und $g_3$ irreducible algebraische Gleichung, die zur Ordnung $n$ gehörige „Transformationsgleichung", deren Grad gleich der bekannten zahlentheoretischen Function $\psi(n)$ ist.

Hat im besonderen die Hauptcongruenzgruppe $q^{\text{ter}}$ Stufe das Geschlecht Null und ist $F$ der zugehörige Hauptmodul, so heisst die Transformationsgleichung eine „Modulargleichung" $n^{\text{ter}}$ Ordnung und $q^{\text{ter}}$ Stufe; dabei muss $n$ relativ prim zu $q$ sein. Ist jedoch das Geschlecht $p$ grösser als Null, und existirt ein volles Modulsystem $M_1, M_2, \ldots$, so tritt in naturgemässer Verallgemeinerung an die Stelle der Modulargleichung die Beziehung zwischen dem Systeme der $M_1, M_2, \ldots$ und dem Systeme der transformirten $M'_1, M'_2, \ldots$, also eine Correspondenz auf einer in einem höheren Raume gelegenen algebraischen Curve des Geschlechtes $p$. Die Erforschung dieser „Modularcorrespondenzen" erfordert jedoch längere Vorbereitungen und wird auf Abschnitt VI verschoben. Von den höheren Stufen wird $q = 5$ und $q = 16$ genauer behandelt; die Jacobi'schen Modulargleichungen für $\varphi(\omega) = \sqrt[4]{k}$ sind Gleichungen 16. Stufe.

Es folgen in den Schlusscapiteln 5 und 6 zahlentheoretische Anwendungen, und zwar handelt es sich hauptsächlich um die Aufstellung von Klassenzahlrelationen für binäre quadratische Formen negativer Determinante. Aus der Modulargleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung und erster Stufe $f(J, J') = 0$ entspringt, indem $J' = J$ gesetzt wird, eine irreducible Gleichung $g_n(J) = 0$ für die singulären

Moduln $n^{ter}$ Ordnung und erster Stufe. Betrachtet man nun die Modulfunction $g_n(J)$, so erhält man als Anzahl ihrer Nullstellen im Fundamentalbereiche durch eine „arithmetische Bestimmungsweise“ eine Summe von Klassenzahlen, während eine „functionentheoretische Bestimmungsweise“, nämlich die Abzählung der Unendlichkeitsstellen, dieselbe Anzahl gleich einer arithmetischen Function von $n$ ergiebt, die in einfachem Zusammenhange mit den Teilern von $n$ steht. Die Vergleichung führt zu der Klassenzahlrelation $n^{ter}$ Ordnung und erster Stufe, einer jener merkwürdigen acht Relationen, die Kronecker aus der Theorie der singulären Moduln gewonnen hat. Einen Beweis für sie hat zuerst Stephen Smith veröffentlicht, dessen nicht immer hinreichend gewürdigte Verdienste um die Theorie der Modulfunctionen an dieser Stelle durch die Einführung der „Smith'schen Curve“ anerkannt werden.

Kronecker hatte gemeint: „Es bleibt möglich, dass ausser jenen acht Formeln überhaupt keine anderen existiren, bei denen nur die einfacheren, aus den Divisoren zusammengesetzten zahlentheoretischen Functionen zur Summation von Klassenanzahlen gebraucht werden“ (Berliner Berichte 1875). Die bahnbrechenden Untersuchungen Gierster's über die Klassenzahlrelationen höherer Stufe (1879) haben die Unrichtigkeit dieser Vermutung erwiesen. Dieselbe Verfahrungsweise, welche von den Modulargleichungen erster Stufe zu den zugehörigen Klassenzahlrelationen führt, erweist sich allgemein bei Modulargleichungen und Modularcorrespondenzen höherer Stufe als wirksam. An dieser Stelle kommen freilich nur die Modulargleichungen in Frage, von denen besonders die Ikosaedermodulargleichungen eingehend behandelt werden; die Untersuchungen des Herrn Hurwitz, die sich auf Modularcorrespondenzen beziehen, kommen erst in Abschnitt VI zur Sprache.

Der Abschnitt V beginnt mit einer Einführung in die Theorie der elliptischen Normalcurven. Es sei $f(u; \omega_1, \omega_2)$ eine elliptische Function erster Stufe und $m^{ten}$ Grades. Bildet man irgend eines ihrer Periodenparallelogramme mittels der Function $f$ auf eine $m$-blättrige Riemann'sche Fläche vom Geschlechte 1 ab, so giebt es nach dem Riemann-Roch'schen Satze genau $n-1$ linear-unabhängige $n$-wertige algebraische Functionen der Fläche, die, abge-

sehen von $n$ gegebenen Stellen, überall endlich sind. Fasst man diese $n-1$ Functionen als Coordinaten eines Punktes in einem höheren Raume $R_{n-1}$ auf, so beschreibt der so definirte Punkt, wenn $u$ ein Periodenparallelogramm überstreicht, die geschlossene elliptische Normalcurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung $C_n$, und zwar giebt es, bei constantem $\omega_1$ und $\omega_2$, in projectivem Sinne nur eine solche Curve; für $n=3$ erhält man die ebene Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt, die als Prototyp für die allgemeine $C_n$ gelten kann.

Aus dieser Definition ergiebt sich als „kanonische Darstellung" der $C_n$ die Wahl solcher homogenen Coordinaten, dass

$$x_1:x_2:x_3:\ldots:x_n = 1:\wp u:\wp' u:\ldots:\wp^{(n-2)}u$$

wird; auch das Coordinatensystem der $x_\alpha$ wird als „kanonisch" bezeichnet. Es giebt $2n^2$ solcher kanonischen Darstellungen, dem Umstande entsprechend, dass die $C_n$ durch $2n^2$ Collineationen des $R_{n-1}$ in sich übergeht.

Die $C_n$ besitzt $n^2$ Hyperosculationspunkte, die den Wendepunkten der $C_3$ entsprechen. Sie stehen in enger Beziehung zu dem Probleme der speciellen Teilung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welches geradezu identisch ist mit der Aufgabe, bei einem kanonischen Coordinatensysteme diese $n^2$ singulären Punkte zu ermitteln.

Aber auch die Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung hat für die $C_n$ eine geometrische Bedeutung. Bei der $C_3$ lassen sich aus den 9 Wendepunkten 4 „Wendedreiecke" bilden, und wird ein solches Dreieck als Beziehungsdreieck benutzt, so erhält man die Curvengleichung in der Hesse'schen Normalform. In Verallgemeinerung dieses Verfahrens wird vermöge der $n^2$ singulären Punkte der $C_n$ ein gewisses Beziehungspolyeder des $R_{n-1}$ gebildet, dem $\psi(n)-1$ „gleichberechtigte" Polyeder zur Seite stehen, und nun wird der Uebergang von dem „kanonischen" Coordinatensysteme der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu einem solchen „singulären" Coordinatensysteme der $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ ein Bild für die Auflösung einer Transformationsgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die ja auch vom Grade $\psi(n)$ war.

Die Functionen $X_\alpha(u;\omega_1,\omega_2)$, die, gleich Null gesetzt, die Seitenflächen der singulären Coordinatenpolyeder definiren, sind es nun, die, gehörig normirt, für das Folgende von der grössten Bedeutung werden, indem die Coefficienten ihrer Entwickelungen nach

Potenzen von $u$ bemerkenswert einfache Modulformen $n^{ter}$ Stufe sind. Hiermit sind wir bereits zu dem zweiten Capitel gelangt, dessen Gegenstand die $X_\alpha$, als Functionen der $\omega_1$ und $\omega_2$ betrachtet, bilden. Ein anderes, wirksames Mittel zur Herstellung von Modulformen besteht, wie das dritte Capitel zeigt, in der Bildung gewisser bilinearer Verbindungen der $X_\alpha$. Verbindungen dieser Art traten übrigens schon im ersten Capitel auf, wo gezeigt wurde, dass $\frac{1}{2}n(n-3)$ linear-unabhängige Relationen zweiten Grades zwischen den $n$ Grössen $X_\alpha$ bestehen. Deutet man sie als $\frac{1}{2}n(n-3)$ Flächen zweiter Ordnung im $R_{n-1}$, so bringen sie die betreffende $C_n$ rein zum Ausschnitt. Von besonderem Interesse ist, dass die Entwickelung der so erhaltenen Moduln nach Potenzen von $r = e^{2\pi i\omega}$ ausserordentlich einfache „Potenzreihen mit arithmetischen Coefficienten" liefert.

Nunmehr sind die Mittel gewonnen, durch welche in den Capiteln 4, 5 und 6 die Untersuchungen des Abschnittes III ergänzt und weitergeführt werden können. Zunächst werden die jetzt erhaltenen Entwickelungen mit den dort gewonnenen verglichen, wobei sich nebenbei eine Reihe von Sätzen über die Darstellung von Zahlen durch quadratische Formen ergiebt. Dann folgen neue Entwickelungen. In Capitel 5 wird der Fall $q = 11$ eingehend behandelt und die zugehörige Resolvente zwölften Grades wirklich hergestellt. Es war dies zwar schon vorher von Herrn Kiepert geschehen; indes bewährt sich gerade hier die formentheoretische Betrachtungsweise, indem sie eine erhebliche Ersparung an Rechnung ermöglicht. Das Schlusscapitel 6, welches im wesentlichen vom Herausgeber herrührt, behandelt die höheren Stufen; über die bezügliche Abhandlung des Herrn Fricke wird S. 434 dieses Bandes berichtet.

Das Ziel des Abschnittes VI ist, die allgemeine Theorie der Modularcorrespondenzen zu entwickeln. Der eigentlichen Untersuchung gehen zwei vorbereitende Capitel voraus. Zunächst handelt es sich um den weiteren Ausbau der in den Capiteln 1 und 2 des Abschnittes III begründeten Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen, und zwar spielen auch hier formentheoretische Betrachtungen eine wesentliche Rolle. An die Stelle der Weierstrass'-

schen Primfunctionen für algebraische Gebilde treten gewisse, durch die Integrale dritter Gattung gelieferte Primformen, die sich bei Periodenwegen um Factoren reproduciren; ist das Geschlecht des Gebildes 1, so kommt man im wesentlichen auf $\vartheta$-Functionen. Diese Primformen leisten nun die Darstellung aller algebraischen Functionen und der Integrale der drei Gattungen, die zu der betreffenden Riemann'schen Fläche gehören. Im Verein mit den Capiteln 1 und 2 des Abschnittes III giebt dieses inhaltreiche Capitel eine ziemlich vollständige Uebersicht darüber, wie sich der Ausbau der Riemann'schen Theorie der algebraischen Functionen auf Grund der neueren Forschungen gestaltet.

Das zweite einleitende Capitel giebt eine sehr klare Darstellung der allgemeinen Theorie der algebraischen Correspondenzen. Die Geometer nannten $(\alpha$-$\beta)$-Correspondenz eine durch eine algebraische Gleichung $\psi(x|y)=0$ gestiftete Beziehung zwischen zwei Punkten $x$ und $y$ einer algebraischen Curve vom Geschlechte $p$, vermöge deren jedem Punkte $x$ der Curve $\alpha$ mit $x$ bewegliche und im allgemeinen von $x$ verschiedene Punkte $y$ entsprechen, während $w$ dieser Punkte $y$ stets mit $x$ zusammenfallen, und umgekehrt jedem Punkte $y$ der Curve $\beta$ mit $y$ bewegliche und im allgemeinen von $y$ verschiedene Punkte, während $w$ dieser Punkte $x$ stets mit $y$ zusammenfallen. Dann kommt es nach der Cayley-Brill'schen Correspondenzformel immer

$$\nu=\alpha+\beta+2pw$$

mal vor, dass zwei entsprechende, im allgemeinen nicht zusammenfallende Punkte $x$ und $y$ coincidiren.

Nun zeigen Beispiele, dass ein solches Entsprechen auch möglich ist, ohne dass es sich durch eine einzige algebraische Gleichung rein darstellen lässt, und es fragt sich, was für eine Correspondenzformel dann Geltung gewinnt. Hier hat nun Herr Hurwitz den entscheidenden Schritt gethan, indem er ganz allgemein die Correspondenzen untersuchte, bei denen ein solches Entsprechen zweier Punkte $x$ und $y$ einer Riemann'schen Fläche vermöge eines analytischen Gesetzes stattfindet. Seine Untersuchungen, welche auf der Einführung der zu der Riemann'schen Fläche gehörigen Inte-

grale erster Gattung beruhen, ergeben, dass man zu unterscheiden hat zwischen Wertigkeitscorrespondenzen, bei denen die Cayley-Brill'sche Formel gilt, sobald man sich entschliesst, auch negative Werte der Wertigkeit $w$ zuzulassen, und singulären Correspondenzen, die nur auf besonderen, singulären Riemann'schen Flächen möglich sind und eine andere, complicirter gebaute Correspondenzformel besitzen. Zu diesen singulären Correspondenzen gehören nun gerade die Modularcorrespondenzen, denen die Betrachtung sich nunmehr zuwendet.

Nachdem im dritten Capitel die Theorie der zu den Congruenzgruppen von Primzahlstufe gehörenden Integrale erster Gattung entwickelt ist, folgt im vierten Capitel die Theorie der Modularcorrespondenzen $n^{\text{ter}}$ Ordnung und beliebiger Stufe. Jede Correspondenz dieser Art wird in transcendenter Form durch die Gleichung $\omega' = n\omega$ dargestellt. Es möge nun auf der geschlossenen Riemann'schen Fläche $F_\mu$, welche in bekannter Weise aus dem zur Congruenzgruppe $\Gamma_\mu$ gehörigen Fundamentalpolygon durch Zusammenbiegung der Ränder entsteht, dem Werte $\omega$ der Punkt $x$, dem Werte $\omega'$ der Punkt $y$ entsprechen. Beschreibt jetzt der Punkt $x$ auf der $F_\mu$ geschlossene Wege, so geht $\omega$ in Werte $v_1(\omega), v_2(\omega), \ldots$ über, die mit $\omega$ bezüglich der $\Gamma_\mu$ äquivalent sind. Daher geht gleichzeitig $y$ in die Punkte über, die den Werten $nv_1(\omega), nv_2(\omega), \ldots$ entsprechen. Es giebt aber nur $\psi(n)$ solcher Werte von $\omega'$, die bezüglich $\Gamma_\mu$ nichtäquivalent sind. Folglich besteht zwischen $x$ und $y$ eine $\psi$-deutige Correspondenz, und das ist eben die Modularcorrespondenz $n^{\text{ter}}$ Ordnung der $\Gamma_\mu$. Zu dieser Correspondenz gehören $\mu - 1$ gleichberechtigte, welche entstehen, wenn man jene $\psi(n)$ Punkte $y$ nicht dem Punkte $x$, sondern einem der $\mu - 1$ auf $F_\mu$ mit $x$ äquivalenten Punkte zuordnet.

Das Problem, bei gegebenem $x$ die $\psi$ correspondirenden Stellen $y$ zu berechnen, ist durchaus analog dem Probleme der Modulargleichungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung; denn der Grad ist beide Male $\psi(n)$, die Monodromiegruppe jenes Problems ist der Gruppe der Modulargleichung holoedrisch isomorph, jene $\mu$ Modularcorrespondenzen sind $(\psi\text{-}\psi)$-deutig und gehen bei Inversion teils in sich selbst über, teils permutiren sie sich zu Paaren. Es stimmen mithin die Mo-

dularcorrespondenzen in allen wesentlichen Punkten mit den Modulargleichungen überein.

Die Aufstellung einer Formel für die Abzählung der Coincidenzen einer Modularcorrespondenz leitet über zum fünften Capitel, in welchem die schon in IV, 6 begonnene Entwickelung von Klassenzahlrelationen höherer Stufe zu Ende geführt wird: die Methode ist dieselbe wie dort, nur dass hier Coincidenzen auf zwei verschiedene Arten, eine arithmetische und eine functionentheoretische, abgezählt und die Ergebnisse verglichen werden.

Im sechsten Capitel wird endlich die explicite algebraische Darstellung der Modularcorrespondenzen in Angriff genommen, und es finden im besonderen die Stufen 7, 8 und 16 mit den zugehörigen $\Gamma_{168}$, $\Gamma_{96}$ und $\Gamma_{384}$ ihre Behandlung. Von besonderer Wichtigkeit ist dabei der Umstand, dass die Aufgabe, die Relation zwischen zwei correspondirenden Punkten der $F_\mu$ aufzustellen, direct zu den irrationalen Modulargleichungen führt, die sich schon bei Legendre und Jacobi finden und in neuerer Zeit Gegenstand zahlreicher, aber methodisch wenig geordneter Untersuchungen geworden sind. Es zeigt sich hier von neuem der hohe Wert der von Herrn Klein entwickelten, oben dargelegten Auffassung der Theorie der elliptischen Functionen; denn die irrationalen Modulargleichungen erscheinen jetzt nicht mehr „als unverstandene Producte einer zufällig geleiteten analytischen Rechnung“, sondern als „Darstellungsformen gewisser Modularcorrespondenzen und damit als notwendige Glieder einer geometrisch-algebraischen Gedankenentwickelung“.

Den Schluss des Werkes, welchem ein weiterer, die Theorie der automorphen Functionen behandelnder Band folgen soll, bildet ein ausführliches Sachregister, welches bei dem grossen Umfange der beiden Bände sehr willkommen ist. St.

N. W. Bugaieff. Der Ausdruck der elliptischen Integrale in endlicher Form. Mosk. Math. Samml. XVI. 259-281. (Russisch.)

Wenn das Integral $\int \frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+r}}$ sich in endlicher Form darstellen lässt, so ist es, wie Abel gezeigt hat, gleich

$\frac{1}{a}\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$, wo $p$ und $q$ ganze Polynome sind; $q$ genügt dann der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$4(x+A)R\frac{d^2q}{dx^2}+2\left[3(x+A)\frac{dR}{dx}-2R\right]\frac{dq}{dx}$$
$$+\left[2(x+A)\frac{d^2R}{dx^2}-2\frac{dR}{dx}-a^2(x+A)^2\right]q=0$$

($R$ bedeutet hier das Polynom $x^4+lx^3+mx^2+nx+r$). Um das Polynom $q$ zu bestimmen, benutzt der Verf. eine Methode, die in seiner Abhandlung: „Die Grundlagen der Rechnung $E\varphi(x)$ bei einer unabhängigen Veränderlichen" (Mosk. Math. Samml. XII, F. d. M. XVIII. 1886. 340-344) für die Auffindung der ganzen Integrale der linearen Differentialgleichungen gegeben ist. Man kann auch zeigen, dass $z=\frac{p}{q}$ der Differentialgleichung

$$2R\frac{dz}{dx}+a(x+A)z^2-\frac{dR}{dx}z=a(x+A)R$$

genügt, und man gelangt so zur Frage nach der Auffindung der rationalen Integrale einer Differentialgleichung, die ebenfalls den Verfasser beschäftigt hat (F. d. M. XXIII. 1891. 313). Wi.

---

N. W. Bugaieff. Die allgemeinen Bedingungen der endlichen Integrirbarkeit des elliptischen Differentials. Petersb. Abh. LXIX. 8. (Russisch.)

Die Abhandlung ist eine Erweiterung der in F. d. M. XXIII. 1891. 460 besprochenen, in welcher der Verfasser gefunden hatte, dass die Bedingung, unter welcher eine Reduction des elliptischen Integrals $\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{R(x)}}$ auf die Form

$$\frac{1}{m}\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$$

($p$ und $q$ ganze rationale Functionen von $x$ ohne gemeinschaftlichen Teiler) möglich ist, in dem Verschwinden einer symmetri-

schen Determinante besteht, welche aus den Coefficienten von

$$R = p_0 x^4 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x + p_4$$

durch einen symbolischen Differentiationsprocess zu gewinnen ist.
Wi.

---

W. Burnside. Note on pseudo-elliptic integrals. Messenger (2) XXII. 83-89.

Jedes Integral, das dem Anscheine nach elliptisch, in der That aber auf einen Logarithmus zurückführbar ist, kann als die Summe einer Anzahl Glieder von der Form

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-b)\sqrt{f_4(x)}}$$

ausgedrückt werden, wo $f_4(x)$ eine ganze rationale Function vierten Grades bezeichnet. Für den Fall, dass die Summe aus einem einzigen Gliede besteht, bestimmt der Verf. dessen allgemeinste Gestalt, indem er sich auf den Boden der Theorie der elliptischen Functionen stellt. Sind $g_2$ und $g_3$ die beiden Invarianten von $f_4(x)$, so kann das Integral stets durch eine lineare Substitution in die Form transformirt werden:

$$\int \frac{(z-\alpha)dz}{(z-\beta)\sqrt{4z^3-g_2 z-g_3}},$$

oder, wenn $z = \wp(u)$ ist, in

$$\int \frac{\wp(u)-\wp(w)}{\wp(u)-\wp(v)}\, du,$$

und es wird gezeigt: Damit das Integral

$$\int \left(\frac{1}{\wp(u)-\wp(v)} + A\right) du,$$

wo $A$ eine Constante ist, ein pseudoelliptisches sei, muss $v$ ein Submultiplum einer Periode sein. Wird $v = \frac{2\omega}{n}$ gesetzt, so ergiebt sich demnach der zugehörige Wert von $A$, und der Verf. betrachtet den allgemeinen Wert des Integrals, indem er die Fälle $n = 3$, $n = 4$ einzeln durchführt. Glr. (Lp.)

---

W. Burnside. On the linear transformation of the elliptic differential. Messenger (2) XXI. 170-176.

Der Gegenstand dieses Aufsatzes ist der, die wichtigeren unter den linearen Transformationen eines elliptischen Integrales erster Gattung in einer möglichst einfachen und systematischen Gestalt darzustellen. Der Differentialausdruck

$$\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}$$

wird 1) in sich selbst transformirt, 2) in die Weierstrass'sche Form:

$$\frac{dy}{\sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}},$$

wo $e_1+e_2+e_3=0$; 3) in die Legendre'sche Form:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

endlich 4) in die Riemann'sche Form:

$$\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)}}.$$

Glr. (Lp.)

W. Burnside. On the application of Abel's theorem to elliptic integrals of the first kind. Messenger (2) XXI. 164-170.

Nimmt man zur Anwendung des Abel'schen Theorems als die feste Curve die folgende von der vierten Ordnung

$$(1) \qquad y^2 = \frac{ax^2+2bx+c}{Ax^2+2Bx+C} = \frac{N}{D}$$

und als die bewegliche Curve die Hyperbel

$$(2) \qquad y = \frac{mx+n}{m'x+n'},$$

so ist, falls $ND = X$ gesetzt wird, also gleich einer allgemeinen ganzen Function vierten Grades:

$$\Sigma_1^4 \frac{dx_r}{\sqrt{X_r}} = 0,$$

wo $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ die Abscissen der Schnittpunkte von (1) und (2) sind, wenn die Constanten $m$, $n$, $m'$, $n'$ beliebig sich ändern. Sind $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ die zugehörigen Ordinaten, so zeigt die Elimination von $m$, $n$, $m'$, $n'$ zwischen den vier Gleichungen

$$y_r = \frac{mx_r + n}{m'x_r + n'} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

dass

$$\frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}$$

ist, und dies ist die Gestalt, in welcher die der Differentialgleichung entsprechende Integralgleichung sich unmittelbar darbietet. Der Verf. bezweckt den Nachweis einiger der Gleichungen, in welche diese Gleichung mit Benutzung von (1) transformirt werden kann. Die Ergebnisse werden dazu verwendet, in einer Mannigfaltigkeit verschiedener Gestalten die Beziehungen zwischen den Jacobi'schen elliptischen Functionen von vier Argumenten, deren Summe $2K$ ist, aufzustellen. Glr. (Lp.)

---

W. Kapteyn. Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation différentielle $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)$. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 35-62.

Bericht auf S. 300 dieses Bandes.

---

F. G. Teixeira. Notas sobre a theoria das funcções ellipticas. Teixeira J. X. 150-184.

Die erste Note enthält einige Ungleichheiten in Bezug auf das Integral

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

In der zweiten Note wird nach der Methode von Lagrange das Additionstheorem für die Function $\wp(u)$ aufgestellt. Die dritte Note erörtert die Convergenz einiger Reihen, die in der Theorie der elliptischen Functionen auftreten. In den drei folgenden Noten

wird die Formel für die Entwickelung von $\wp(u)$ in eine Reihe rationaler Brüche aufgesucht, und aus ihr werden die Eigenschaften dieser Functionen, sodann durch Integration die der Functionen $\zeta(u)$ und $\sigma(u)$ abgeleitet. Tx. (Lp.)

---

F. G. Teixeira. Sur la fonction $\wp(u)$. Darboux Bull. (2) XVI. 76-79.

Aus der Definitionsgleichung der $\wp$-Function:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \Sigma\left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

wird durch Reihenentwickelung hergeleitet, dass $\wp(u)$ erstens der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$$

genügt und zweitens ein algebraisches Additionstheorem der Form

$$(2) \qquad \wp(u+v)(\wp u - \wp v)^2 = \tfrac{1}{4}(\wp' u - \wp' v)^2 - (\wp u + \wp v)(\wp u - \wp v)^2$$

besitzt. St.

---

F. G. Teixeira. Remarques sur l'emploi de la fonction $\wp(u)$ dans la théorie des fonctions elliptiques. Prag. Ber. 1892. 182-184.

Die zwei Bemerkungen beziehen sich auf die Formeln

$$\operatorname{sn} u = u + \frac{1}{k}\sum_w (-1)^s \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

wobei

$$w = 2sK + (2m+1)iK' \qquad (s,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

und

$$\frac{d\operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \,.\, \operatorname{dn} u.$$

Lh.

---

F. G. Teixeira. Sobre la descomposición de las funciones elípticas sn$u$, cn$u$, dn$u$ en serie de fracciones simples. Progreso mat. II. 65-68.

In dieser Note werden aus der Zerlegung von $\wp(u)$ in eine Reihe einfacher Brüche die Entwickelungen von $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ hergeleitet. Tx. (Lp.)

---

F. G. Teixeira. Sobre el desarrollo de $\wp(u)$ en serie de fracciones simples. Progreso mat. II. 207-212.

Beweis der bezüglichen Formel auf anderem Wege als bei Halphen mit den Hülfsmitteln der Functionentheorie.

Tx. (Lp.)

---

P. Günther. Das Additionstheorem der elliptischen Functionen. J. für Math. CIX. 213-221.

Es handelt sich um die Herstellung des allgemeinen Additionstheorems der elliptischen Functionen, das heisst, es soll eine elliptische Function des Argumentes $u_1 + u_2 + \cdots + u_m$ rational durch die Werte derselben elliptischen Function und ihrer Ableitungen für die Argumente $u_1, u_2, \ldots, u_m$ ausgedrückt werden. Dieser Gegenstand war bereits von den Herren Frobenius und Stickelberger (J. für Math. LXXXIII. 175 und LXXXVIII. 155) ausführlich behandelt worden. Der Verfasser, dem diese Untersuchungen entgangen waren, hat ihnen nichts wesentlich Neues hinzugefügt; denn auch er ist der Lösung der fundamentalen Frage nicht näher gekommen, wie das allgemeine Additionstheorem zu fassen ist, damit es ohne Grenzübergang gültig bleibt, wenn einige der $u_a$ einander gleich werden, wie das zum Beispiel bei der Formel

$$\operatorname{sn}(u_1 + u_2) = \frac{\operatorname{sn} u_1 \,.\, \operatorname{sn}' u_1 + \operatorname{sn} u_2 \,.\, \operatorname{sn}' u_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 \,.\, \operatorname{sn}^2 u_2}$$

der Fall ist; vgl. auch Kronecker, Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen, Berl. Ber. 1883. 717 u. 949 (F. d. M. XV. 1883. 390). St.

---

F. Schottky. Ueber das Additionstheorem der Cotangente und der Function $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$. J. für Math. CX. 324-337.

Die Partialbruchzerlegung von $f(u) = \pi \cot \pi u$ leitet man gewöhnlich her, indem man zeigt, dass die Function von $u$:

$$\varphi(u) = f(u) - \frac{1}{u} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{u-m} + \frac{1}{m} \right)$$

für endliche Werte von $u$ niemals unendlich wird oder eine Constante ist. Dass aber das erste nicht eintreten kann, wird leicht durch eine functionentheoretische Schlussweise erkannt. Diese Herleitung ist eine indirecte. Der directe Weg ist, dass man von der Definition der Function $f(u)$ durch die Gleichung

$$f(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{u-m} + \frac{1}{m} \right)$$

ausgeht und durch wirkliche Ausführung der Multiplication die Richtigkeit der Differentialgleichung:

$$f^2(u) + f^2(\tfrac{1}{4}) + f'(u) = 0$$

nachweist. Allgemeiner kann man auch versuchen, auf diese Art das Additionstheorem der Cotangente zu verificiren, welches Herr Schottky auf die elegante Form bringt:

(1) $$f(u)f(v) + f(v)f(w) + f(w)f(v) = f^2(\tfrac{1}{4}) \qquad (u+v+w=0);$$

lässt man nämlich $v$ gegen Null abnehmen, so erhält man die eben angegebene Differentialgleichung für $f(u)$. Bei dieser Beweismethode besteht die Schwierigkeit darin, dass die Ausführung der Multiplication eine Summe rationaler Functionen liefert, in welcher die einzelnen Glieder im allgemeinen zwei Unendlichkeitsstellen besitzen, und dass man sie nun in ein Aggregat von je zwei Functionen mit nur einer Unendlichkeitsstelle so zerlegen muss, dass die Summe unbedingt convergent bleibt.

Entsprechende Betrachtungen gelten bei den doppeltperiodischen Functionen. Die Additionstheoreme dieser Functionen beweist man gewöhnlich mittels des functionentheoretischen Principes, dass eine eindeutige Function, die sich in der ganzen Ebene mit Einschluss des unendlich fernen Punktes regulär verhält, eine Constante sein muss. Aber auch hier muss es möglich sein, diese algebraischen Beziehungen zwischen gegebenen Summen durch blosse Rechnung herzuleiten. Für diesen Zweck empfiehlt es sich,

ein möglichst einfaches Additionstheorem zu wählen. Ein solches haben die Herren Frobenius und Stickelberger (J. für Math. LXXXVIII. 155) gegeben. Setzt man nämlich

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta(u),$$

so ist:

(2) $$(\zeta u+\zeta v+\zeta w)^2+\zeta' u+\zeta' v+\zeta' w = 0 \qquad (u+v+w=0);$$

die Richtigkeit dieser Gleichung, deren Analogie mit dem Additionstheorem (1) der Cotangente hervorgehoben zu werden verdient, ergiebt sich sofort vermöge jener functionentheoretischen Schlussweise. Differentiirt man ferner bei constantem $w$, so folgt wegen $\zeta' u = -\wp u$:

$$\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v = \tfrac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v},$$

und hieraus ergiebt sich durch abermalige Differentiation das Additionstheorem für $\wp u$ selbst. Die Durchführung des rechnenden Beweises für das Additionstheorem (2) gestaltet sich ganz ähnlich wie bei der Cotangente. St.

Ch. Hermite. Sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. Teixeira J. XI. 65-66.

Ist $R(\xi)$ ein Polynom vierten Grades in $\xi$ und $\xi = \varphi(x)$ die durch die Gleichung

$$x = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

definirte Function, so folgert Hr. Hermite aus dem Additionstheorem für die Argumente der Function $\varphi(x)$ die Formeln für die Functionen $\mathrm{sn}(x+y)$, $\mathrm{cn}(x+y)$, $\mathrm{dn}(x+y)$ und $\wp(x+y)$.

Tx. (Lp.)

Ch. Hermite. Sur la transformation des fonctions elliptiques. Rozpravy. I. No. 30 (Mit böhmischer Uebersetzung).

Für eine Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung seien $l$ der transformirte Integralmodul und $L$, $L'$ die an Stelle von $K$ und $K'$ tretenden

Grössen, $M$ der Multiplicator, so dass die Gleichungen gelten

$$\frac{K}{M} = aL + ibL', \quad \frac{iK'}{M} = cL + idL',$$

in welchen die ganzen Zahlen $a, b, c, d$ die Bedingung $ad - bc = n$ erfüllen. Man hat zunächst

$$\mathrm{sn}\left(\frac{x+2K}{M}, l\right) = (-1)^a \mathrm{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right),$$
$$\mathrm{sn}\left(\frac{x+2iK'}{M}, l\right) = (-1)^c \mathrm{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right)$$

und weitere vier, die zwei übrigen Hauptfunctionen betreffende Gleichungen.

Die Untersuchung der Transformationsformeln beruht auf Eigenschaften der Function

$$\Phi(x) = \Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) . e^{\frac{i\pi bx^2}{4KLM}},$$

nämlich:

$$\Phi(x+2K) = (-1)^{(a+1)b}\Phi(x),$$
$$\Phi(x+2iK') = (-1)^{(c+1)d}\Phi(x) e^{-\frac{i n \pi (x+iK')}{K}},$$

welche der Verfasser in sehr schöner und eleganter Weise aus der Darstellung

$$\Phi(x) = \Sigma(-1)^m e^{i\pi\varphi(x,m)}, \quad \varphi(x, m) = \frac{bx^2}{4KLM} + \frac{mx}{LM} + \frac{im^2L'}{L},$$

ableitet.

Setzt man nun

$$\mathrm{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}, \quad \mathrm{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)}, \quad \mathrm{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)},$$

so befriedigen die ganzen Transcendenten $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Phi_1(x)$ analoge Gleichungen, und hieraus lässt sich das periodische Verhalten der vier Quotienten

$$P(x) = \frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)}, \quad Q(x) = \frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)}, \quad R(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$S(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)}$$

bestimmen; man erhält so acht wichtige Gleichungen, von denen wir wieder nur das eine Paar hersetzen:

$$P(x+2K)=(-1)^{ab+a+b}P(x), \quad P(x+2iK')=(-1)^{cd+c+d+n}P(x).$$

Diese vier Grössen sollen noch mit einem zuvörderst unbestimmten constanten Factor behaftet sein. Durch Anwendung der vier Weierstrass'schen Functionen

$$\mathrm{Al}(x)=\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}e^{-\frac{Jx^2}{2K}}, \quad \mathrm{Al}(x)_1, \quad \mathrm{Al}(x)_2, \quad \mathrm{Al}(x)_3$$

ergiebt sich die Darstellung

$$S(x)=\frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},l\right)}{\mathrm{Al}^n(x)}e^{\frac{Nx^2}{2}}, \quad P(x)=\frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},l\right)_1}{\mathrm{Al}^n(x)}e^{\frac{Nx^2}{2}},$$

$$Q(x)=\frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},l\right)_2}{\mathrm{Al}^n(x)}e^{\frac{Nx^2}{2}}, \quad R(x)=\frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},l\right)_3}{\mathrm{Al}^n(x)}e^{\frac{Nx^2}{2}},$$

wobei die Grösse $N$ durch die Formel

$$N=\frac{J_1}{LM^2}-\frac{nJ}{K}+\frac{i\pi b}{2KLM},$$

$$J=\int_0^K k^2\,\mathrm{sn}^2x\,dx, \quad J_1=\int_0^L l^2\,\mathrm{sn}^2x\,dx$$

erklärt wird. Diese Grösse $N$ scheint in der Transformationstheorie eine wichtige Rolle zu spielen; zu den algebraischen Gleichungen zwischen $k$ und $l$, und zwischen $k$ und $M$ treten die neuen zwischen $k$ und $N$ stattfindenden algebraischen Beziehungen hinzu.

Zwischen den beiden transformirten halben Perioden der zweiten Art $J_1$ und $J_1'$ finden die Relationen

$$\frac{aJ_1+ibJ_1'}{M}=nJ+KN, \quad \frac{cJ_1+idJ_1'}{M}=inJ'+iK'N$$

statt, aus welchen sich die neue Formel

$$\frac{\pi}{2}N=\frac{1}{M}\left[aJ'J_1-dJJ_1'+i(bJ'J_1'-cJJ_1)\right]$$

ergiebt.

Setzt man ferner

$$U=aL_1+ibL', \quad V=aJ_1+ibJ_1',$$

so bestehen die Gleichungen

$$ll'^2 \frac{dU}{dl} = l^2 U - V, \quad ll'^2 \frac{dV}{dl} = l^2 (U - V).$$

Differentiirt man die Gleichung $K = MU$ nach $k$ und benutzt die eben bemerkten Relationen, so folgt, nachdem $U$ und $V$ durch $\frac{K}{M}$ und $M(nJ + KN)$ ersetzt worden sind, die lineare homogene Beziehung zwischen $J$ und $K$:

$$(k^2 K - J) \frac{dk}{kk'^2} = \frac{K dM}{M} + [l^2 K - M^2 (nJ + KN)] \frac{dl}{ll'^2}.$$

Dieselbe Gleichung besteht zwischen $J'$ und $K'$, sodass man die Gleichungen hat:

$$\frac{dk}{kk'^2} = nM^2 \frac{dl}{ll'^2}, \quad \frac{kdk}{k'^2} = \frac{dM}{M} + \frac{ldl}{l'^2} - M^2 N \frac{dl}{ll'^2},$$

deren erste man Jacobi verdankt; dieselbe ermöglicht, der zweiten Gleichung die Form

$$\frac{kdk}{k'^2} = \frac{dM}{M} + \frac{ldl}{l'^2} - \frac{Ndk}{nkk'^2}$$

zu erteilen und somit eines der Hauptresultate der Arbeit, nämlich die Darstellung von $N$ als algebraische Function von $k$:

$$N = nkk'^2 D_k \log \frac{Mk'}{l'},$$

zu erschliessen. Es folgen die Anwendungen für den Fall $n = 2$ und $n = 3$. Lh.

---

Ch. Hermite. Sur la transformation des fonctions elliptiques. Toulouse Ann. VI. L. 1-12.

F. Brioschi. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Toulouse Ann. VI. 12-13.

1. Hermite's Transformationstheorie beruht auf den Eigenschaften der Function

$$\Phi(x) = \Theta\left(\frac{x}{M}, l\right) e^{\frac{i\pi bx^2}{4KLM}},$$

welche in den Relationen bestehen:

$$\Phi(x+2K) = (-1)^{(a+1)b}\,\Phi(x),$$

$$\Phi(x+2Ki) = (-1)^{(c+1)d}\,\Phi(x)e^{-\frac{i n\pi(x+iK')}{K}}.$$

Für diese Relationen wird ein neuer, einfacher Beweis gegeben.

2. Die Functionen $P$, $Q$, $R$ und $S$ von $x$, welche Herr Hermite früher mittels $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$ ausgedrückt hatte, werden jetzt durch die Weierstrass'schen Functionen Al ausgedrückt. Es ergiebt sich:

$$P(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},\, l\right)_1}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{1}{2}Nx^2},$$

$$Q(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},\, l\right)_2}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{1}{2}Nx^2},$$

$$R(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},\, l\right)_3}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{1}{2}Nx^2},$$

$$S(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{M},\, l\right)}{\mathrm{Al}^n(x)}\, e^{\frac{1}{2}Nx^2}.$$

Dabei ist

$$N = \frac{J_1}{LM^2} - \frac{nJ}{K} + \frac{i\pi b}{2KLM};$$

$J$ und $J_1$ sind die vollständigen Integrale zweiter Gattung.

3. Die Grösse $N$ ist in Wirklichkeit eine algebraische Function des Moduls $k$, man hat nämlich:

$$N = nkk'^2\,\frac{d}{dk}\log\frac{Mk'}{l'}.$$

Den Modulargleichungen zwischen $l$ und $k$ und den Multiplicatorgleichungen zwischen $M$ und $k$ sind also die neuen Gleichungen zwischen $N$ und $k$ an die Seite zu stellen.

Für $n=3$ kommt zum Beispiel:

$$(\tfrac{1}{2}N)^4 - 6k^2(\tfrac{1}{2}N)^2 - (4k^2+4k^4)\tfrac{1}{2}N - 3k^4 = 0.$$

4. Hierzu bemerkt Herr Brioschi, dass er bereits (Math. Ann. XIII. 111, F. d. M. IX. 1877. 236) die Gleichungen, denen

$$\nu = \tfrac{1}{2}\frac{N}{k}$$

genügt, betrachtet und für $n = 3$ und $n = 5$ auch wirklich aufgestellt habe. Er giebt ferner die allgemeine Formel:

$$N = -2k^2 \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \mathrm{sn}^2\left(\frac{2s}{n}(mK + m'iK'),\ k\right),$$

die Herr Hermite für den besonderen Fall $n = 3$ gefunden hatte.

St.

---

R. Fricke. Neue Beiträge zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen. Math. Ann. XL. 469-502.

Im Anschluss an die Arbeiten der Herren Klein, Gierster und Kiepert beschäftigt sich Herr Fricke mit den Modulargleichungen erster Stufe, die sich bekanntlich dadurch auszeichnen, dass die durch sie definirten algebraischen Gebilde gegenüber denen, welche bei den Modulargleichungen höherer Stufe auftreten, besonders einfach ausfallen. Während die Herren Klein und Gierster sich auf die Fälle beschränkten, wo das algebraische Gebilde vom Geschlechte Null ist, hat Herr Kiepert analytische Hülfsmittel gefunden, die es ihm ermöglichten, die Untersuchung weit über diese Anfangsfälle fortzusetzen; er hat dabei vorzugsweise zusammengesetzte Transformationsgrade betrachtet.

In zweifacher Weise werden die früheren Untersuchungen durch die vorliegende Abhandlung ergänzt.

Erstens legt Herr Fricke durchweg einen Primzahlgrad $n$ zu Grunde und behandelt, abgesehen von dem wiederholt untersuchten Falle $n = 11$, die Fälle $n = 19$, 23, 31, 47 und, wenigstens in den Grundzügen, auch den Fall $n = 71$; das Geschlecht der zugehörigen Riemann'schen Fläche $F_{n+1}$ ist der Reihe nach: 1, 1, 2, 2, 4, 6.

Zweitens sind seine analytischen Hülfsmittel anderer Art. Denn einmal wird nach dem Vorgange des Herrn Klein consequent eine formentheoretische Schlussweise angewandt, indem nicht die zu den Untergruppen der Modulgruppe gehörigen Modulfunctionen,

sondern die zugehörigen Modulformen herangezogen werden, und dann tritt eine Reihe wichtiger, bisher noch nicht benutzter Modulformen auf, die in enger Beziehung zu den binären quadratischen Formen mit ganzzahligen Coefficienten stehen, deren Determinante gleich $-n$ ist, wenn $n$ den Transformationsgrad bedeutet; zur Einführung dieser Modulformen ist Herr Fricke durch eine Arbeit des Herrn Hurwitz (Math. Ann. XXVII) veranlasst worden.

Die weiteren Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind reproducirt im sechsten Capitel des Abschnittes V des Werkes: Felix Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, herausgegeben von Dr. R. Fricke, Bd. 2, Leipzig 1892, wo auch der Fall $n = 35$ behandelt wird (vgl. das Referat oben S. 418).

St.

---

B. Igel. Versuch, einige Sätze in der Theorie der Modulargleichungen rein algebraisch abzuleiten. Monatsh. f. Math. III. 349-364.

Jacobi hat auf transcendentem Wege bewiesen, dass die Modulargleichung für eine Transformation vom Primzahlgrade $n$ den Grad $n+1$ hat, und dass sie unverändert bleibt, sowohl wenn man $k$ und $l$ vertauscht, als auch wenn man $k$ und $l$ beziehungsweise durch $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{l}$ ersetzt. Der Verfasser setzt aus der Theorie der elliptischen Functionen nur das Princip der doppelten Periodicität voraus und zeigt, wie man alsdann auf rein algebraischem Wege jene Sätze Jacobi's ableiten kann. Zum Schluss geht er auf die Frage ein, wie weit sich auf rein algebraischem Wege etwas über die Gestalt der Modulargleichungen feststellen lässt, und behandelt die Fälle $n = 7$ und $n = 11$; es gelingt ihm jedoch nicht, bis zu den numerischen Werten der Coefficienten vorzudringen.

St.

---

J. Griffiths. Note on the algebraic theory of elliptic transformation. Lond. M. S. Proc. XXIII. 275-281.

Der Zweck der Abhandlung ist, in möglichst einfacher Weise

die bekannte partielle Differentialgleichung herzuleiten, welcher gleichzeitig der Zähler und der Nenner der Transformationsformel

$$y = \frac{P(x,k)}{Q(x,k)}$$

Genüge leisten. St.

---

W. Burnside. On the division of the periods of elliptic functions by 9. Messenger (2) XXII. 89-96.

Die Gleichung zur Bestimmung von $\wp(3u)$ in Gliedern mit $\wp(u)$ ist (vgl. Enneper-Müller, Ellipt. Funct. S. 497):

$$(\wp^4 - \tfrac{1}{2}g_2\wp^2 - g_3\wp - \tfrac{1}{48}g_2^2)^2\wp(3u) = \wp^9 + 3g_2\wp^7 + 24g_3\wp^6 + \tfrac{15}{8}g_2^2\wp^5 - \tfrac{9}{2}g_2g_3\wp^4$$
$$+ (3g_3^2 - \tfrac{9}{16}g_2^3)\wp^3 - \tfrac{3}{4}g_2^2g_3\wp^2 + (\tfrac{9}{256}g_2^4 - \tfrac{3}{2}g_2g_3^2)\wp + \tfrac{1}{32}g_2^3g_3 - g_3^3 = 0,$$

wo $\wp$ für $\wp(u)$ gesetzt ist. Ist nun $\wp(u) = \wp(3u_0)$, so sind die neun Wurzeln der Gleichung:

$$\wp(u_0),\ \wp(u_0 + \tfrac{2}{3}\omega),\ \ldots,\ \wp(u_0 + \tfrac{4}{3}\omega' + \tfrac{4}{3}\omega),$$

wo $2\omega$, $2\omega'$ ein beliebiges Paar primitiver Perioden der elliptischen Function bilden; wenn mithin $\wp(3u_0)$ und $\wp(\tfrac{2}{3}\omega)$ beide als bekannte Grössen angesehen werden, so kann

$$\wp(u_0) + \wp(u_0 + \tfrac{2}{3}\omega) + \wp(u_0 + \tfrac{4}{3}\omega)$$

nur drei verschiedene Werte annehmen, oder mit anderen Worten: die obige Gleichung neunten Grades hat eine Resolvente dritten Grades, deren Coefficienten in $g_2$, $g_3$, $\wp(3u)$ und $\wp(\tfrac{2}{3}\omega)$ rational sind. Die directe Berechnung dieser Resolvente erheischt ziemlich mühsame Rechnungen; der Verf. bestimmt sie jedoch indirect durch Auffindung zweier kubischen Transformationen, deren auf einander folgende Durchführung zu der obigen Gleichung hinleitet. Es werde nämlich $a$ gegeben durch

$$a^4 - \tfrac{1}{2}g_2a^2 - g_3a - \tfrac{1}{48}g_2^2 = 0$$

und

$$y = \frac{1}{(x-a)^2}\left[x^3 - 2x^2a + (7a^2 - \tfrac{1}{2}g_2)x - 2a^3 - \tfrac{1}{2}g_2a - g_3\right],$$

$$z = \frac{1}{(y+3a)^2}\left[y^3 + 6ay^2 + (3a^2 + \tfrac{9}{2}g_2)y - 46a^3 + \tfrac{57}{2}ag_2 + 27g_3\right];$$

für $z$ substituire man der Reihe nach die vier Werte von $9\wp(\tfrac{2}{3}\bar{\omega})$:

dann sind die 36 sich ergebenden Werte von $x$ die Werte von $\wp\left(\frac{2n\omega+2n'\omega'}{9}\right)$, entsprechend allen Wertepaaren von $n$, $n'$ mit Ausnahme von (0, 0), (0, 3), (3, 0), (3, 3), (3, 6).

Diese Gleichungen werden in Sonderheit auf den Fall $g_2 = 0$ angewandt, wo

$$\omega_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3-4}}, \qquad \omega_2' = i\omega_2\sqrt{3}$$

ist und $2\omega = \omega_2+\omega_2'$, $2\omega' = \omega_2-\omega_2'$ ein Paar primitiver Perioden sind; dabei wird gefunden:

$$\wp(\tfrac{2}{3}\omega') = -2^{-\frac{1}{3}}\sec\tfrac{1}{9}\pi,$$

$$\wp(\tfrac{2}{3}\omega_2) = -2^{\frac{2}{3}} + 12^{\frac{1}{3}}\frac{2+3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}-2\cos\frac{1}{9}\pi}{1-2\cos\frac{1}{9}\pi+4\cos^2\frac{1}{9}\pi},$$

u. s. w. Glr. (Lp.)

---

K. Schwering. Zerfällung der lemniskatischen Teilungsgleichung in vier Factoren. J. für Math. CX. 42-72.

Herr Schwering hatte sich bereits in einer früheren Arbeit (F. d. M. XXIII. 1891. 476) mit der Theorie der lemniskatischen Functionen beschäftigt und Methoden angegeben, welche es gestatteten, die Formeln für die complexe Multiplication dieser Functionen wirklich aufzustellen. Nachdem er in § 1 der vorliegenden Arbeit die letzte der dort gegebenen Methoden auf eine neue Art entwickelt hat, wendet er sich zu der von Eisenstein entdeckten Zerfällung der lemniskatischen Teilungsgleichung $\varphi(x^4) = 0$ in vier Factoren, um in § 2 die Theorie dieser Zerlegung auseinanderzusetzen und die Richtigkeit eines von Eisenstein ohne Beweis aufgestellten Satzes nachzuweisen, während die Absicht des § 3 auf die wirkliche Ausführung dieser Zerfällung geht; hierbei ergiebt sich zugleich die Lösung der verallgemeinerten Pell'schen Gleichung:

$$T^2-\eta U^2 = 1,$$

wo $\eta = a+ib$ eine ganze complexe Zahl bedeutet.

In beiden Fällen wird mit Erfolg ein Gedanke benutzt, den chon Legendre für die entsprechende Aufgabe der Kreisteilung

zu verwerten versucht hatte. Um nämlich in der Identität:

$$4\frac{x^n-1}{x-1} = Y^2 \pm nZ^2$$

$Y$ zu bestimmen, entwickelt er $2(x-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ und nimmt statt der Coefficienten ihre kleinsten Reste (mod. $n$). Dass dieses Verfahren fehlerhaft ist, hat schon Jacobi bemerkt. Es lässt sich jedoch so abändern, dass es nicht nur für die Kreisteilungsgleichungen, sondern auch für die viel schwierigeren lemniskatischen Teilungsgleichungen vollkommen ausreicht, bei denen die entsprechende Identität:

$$\varphi(x^4) = Y^2 - \eta Z^2 \qquad (\eta = a + ib)$$

lautet.

Den Schluss bildet die Zusammenstellung einiger Beispiele, bei denen die numerische Rechnung vollständig durchgeführt ist.

St.

---

J. W. L. Glaisher. Note on Mr. Kleiber's functions $K_i$ and $G_i$. Messenger (2) XXII. 71-82.

Definirt man $K_i$ durch die Gleichung:

$$\frac{2K_i}{\pi} = 1 - \frac{i^2-\frac{1}{4}}{1^2}k^2 + \frac{(i^2-\frac{1}{4})(i^2-\frac{9}{4})}{1^2.2^2}k^4 - \frac{(i^2-\frac{1}{4})(i^2-\frac{9}{4})(i^2-\frac{25}{4})}{1^2.2^2.3^2}k^6 + \cdots,$$

so wird gezeigt, dass $K_i = a_i A_i + b_i B_i$ ist, wo

$$A_i = 1 - \frac{i^2-\frac{1}{4}}{2!}\lambda^2 + \frac{(i^2-\frac{1}{4})(i^2-\frac{9}{4})}{4!}\lambda^4 - \cdots,$$

$$B_i = \lambda - \frac{i^2-\frac{9}{4}}{3!}\lambda^3 + \frac{(i^2-\frac{9}{4})(i^2-\frac{49}{4})}{5!}\lambda^5 - \cdots,$$

wenn $\lambda$ für $k'^2 - k^2$ gesetzt wird, und

$$\frac{2a_i}{\pi} = 1 - \frac{i^2-\frac{1}{4}}{1^2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(i^2-\frac{1}{4})(i^2-\frac{9}{4})}{1^2.2^2}\frac{1}{2^2} - \cdots,$$

$$\frac{2b_i}{\pi} = \frac{i^2-\frac{1}{4}}{1^2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{(i^2-\frac{1}{4})(i^2-\frac{9}{4})}{1^2.2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{(i^2-\frac{1}{4})(i^2-\frac{9}{4})(i^2-\frac{25}{4})}{1^2.2^2.3}\frac{1}{2^2} - \cdots.$$

---

Aehnliche Formeln werden für $G_i$ gegeben, das definirt wird durch:

$$\frac{2G_i}{\pi} = -(i-\tfrac{1}{2})\left\{k^2 - \frac{i^2-\frac{1}{4}}{1^2.2}k^4 + \frac{(i^2-\frac{1}{4})(i^2-\frac{9}{4})}{1^2.2^2.3}k^6 - \cdots\right\}.$$

Betrachtung verschiedener besonderer Fälle. Glr. (Lp.)

---

J. W. L. Glaisher. On certain series and definite integrals. Messenger (2) XXII. 97-109.

Es wird gezeigt, dass das bestimmte Integral:

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u^2-v^2-2xuv}u^\alpha v^\beta\,du\,dv$$

gleich der Reihe

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\left\{1+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2!}x^2 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+3)}{4!}x^4+\cdots\right\} - \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\times$$
$$\left\{\alpha\beta x + \frac{\alpha(\alpha+2)\beta(\beta+2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)\beta(\beta+2)(\beta+4)}{5!}x^5+\cdots\right\}$$

ist, wo $\alpha$ und $\beta$ beide grösser als $-1$ sind, und $x$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt.

Das Integral kann in mannigfacher Weise ausgedrückt werden; unter anderem ist eine Gestalt:

$$\frac{1}{2^{\alpha+\beta}}\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)\int_0^{2K}\frac{\operatorname{sn}u(1-\operatorname{cn}u)^\alpha(1+\operatorname{cn}u)^\beta}{(\operatorname{dn}u)^{\alpha+\beta+1}}du,$$

wo das Quadrat des Moduls gleich $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x$ ist.

Die Abhandlung berücksichtigt namentlich verschiedene besondere Fälle dieses Satzes. Die in Betracht gezogenen Fälle sind: 1) $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$; 2) $\alpha=i-\frac{1}{2}$, $\beta=-i-\frac{1}{2}$; 3) $\alpha=\beta$; 4) $\alpha=-\beta$; 5) $\alpha=1$, $\beta=2$. In einigen derselben ist die Reihe summirbar. Glr. (Lp.)

---

J. W. L. Glaisher. Developments in powers of $k'^2-k^2$. Messenger (2) XXII. 109-144.

Das zum Ausgangspunkte genommene Theorem ist eins von den in dem vorangehenden Referate erwähnten, nämlich

$$16\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s^4-t^4-2\lambda s^n t^n}\,ds\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2^{n-2}}\int_0^K(\mathrm{sd}\,u)^n du$$

$$=\Gamma^2\left(\frac{n+1}{4}\right)\left\{1+\frac{(n+1)^2}{2.4}\lambda^2+\frac{(n+1)^2(n+5)^2}{2.4.6.8}\lambda^4+\cdots\right\}$$

$$-4\Gamma^2\left(\frac{n+3}{4}\right)\left\{\tfrac{1}{2}\lambda+\frac{(n+3)^2}{2.4.6}\lambda^3+\frac{(n+3)^2(n+7)^2}{2.4\ldots10}\lambda^5+\cdots\right\},$$

wo $\lambda=k'^2-k^2$ und $n$ jeden ganzen oder gebrochenen Wert über $-1$ haben kann. Setzt man

$$P_n=\int_0^K(\mathrm{sd}\,u)^n du,$$

so ist, wie bewiesen wird:

$$\frac{dP_n}{dh}=\frac{n+1}{2}P_{n+2},$$

wo $h=k^2$; ausserdem ergeben sich noch andere Reductionsformeln für $P_n$. Mehrere bestimmte Integrale, welche elliptische Functionen einschliessen, werden durch Reihen ausgewertet, die zuweilen summirbar sind. Beispielsweise wird gefunden:

$$\int_0^{2K}\mathrm{sd}\,u\left(\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}\right)^i du=\frac{\pi}{kk'}\frac{\sin 2i\gamma}{\sin i\pi},$$

wo $\gamma$ der Modularwinkel ist und $i$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt; ferner:

$$\int_0^K\frac{(\mathrm{sn}\,u)^{n-1}}{(\mathrm{dn}\,u)^n}du=2^{\frac{1}{2}n-2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\frac{1}{k'^n},$$

wo $n$ eine beliebige Grösse über $-\frac{1}{2}$ ist. Die Werte mehrerer Integrale werden weiter für besondere Werte des Moduls gefunden. Der letzte Teil der Abhandlung bezieht sich hauptsächlich auf Integrale, in denen $\sqrt{x^2-\lambda^2}$ im Nenner vorkommt. Zum Beispiel:

$$\int_{-x}^{x}\int_{0}^{K} \frac{(\mathrm{sd}\,u)^{2n-1}\,du\,d\lambda}{\sqrt{x^2-\lambda^2}} = 2^{2n-3}\pi\,\frac{\Gamma^2(\frac{1}{2}n)}{\Gamma(n)}$$

$$\times\left\{1+\frac{n^2}{2^2}x^2+\frac{n^2(n+2)^2}{2^2.4^2}x^4+\frac{n^2(n+2)^2(n+4)^2}{2^2.4^2.6^2}x^6+\cdots\right\}$$

und

$$\int_{-x}^{x}\frac{P_{4r+1}\,d\lambda}{\sqrt{x^2-\lambda^2}} = \frac{2^{2r}\pi}{(2r)!}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\,x\,\frac{d}{dx}\right)^r K,$$

$$\int_{-x}^{x}\frac{P_{4r+3}\,d\lambda}{\sqrt{x^2-\lambda^2}} = \frac{2^{2r+1}\pi}{(2r+1)!}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\,x\,\frac{d}{dx}\right)^r \frac{1}{1-x^2}.$$

Unter den besonderen Fällen möge hervorgehoben werden:

$$\int_0^K K d\gamma = (K^0)^2, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} G d\gamma = 4(G^0)^2,$$

wo $K^0$, $G^0$ die Werte von $K$ und $G$ bezeichnen, wenn der Modul $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

Glr. (Lp.)

---

T. Craig. A fundamental theorem of the $\theta$ functions. Johns Hopkins Univ. Circ. XI. 42.

Vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 475. St.

---

K. Fritzsch. Das elliptische Integral dritter Gattung für verschiedene Werte von Argument und Parameter. Pr. (Nr. 316) Gymn. Stade. 84 S. 4°.

Die ungewöhnlich lange Programmabhandlung enthält nichts Neues. Ihr liegen die Abschnitte des bekannten Werkes von Durège zu Grunde, welche sich auf die elliptischen Integrale dritter Gattung beziehen; nur ist dieses Material etwas umgeordnet, und es sind die von Durège nur angedeuteten Rechnungen in breiter Weise ausgeführt worden. Abweichend von Durège wird (S. 30-51) die Entwickelung von sn$u$, cn$u$ und dn$u$ in unendliche Producte und Reihen behandelt, indem hier diejenige Darstellung der Arbeiten von Heine und Somoff benutzt ist, die sich bei Enneper-Müller, Elliptische Functionen, S. 78-84 findet.

Der Verfasser hat es nicht für nötig gehalten, dieser von ihm benutzten und an manchen Stellen fast wörtlich ausgeschriebenen Quellen [vergl. z. B. Durège, 3. Auflage S. 64, 258 und 286 mit S. 17, 57 und 23] Erwähnung zu thun. St.

---

Ed. Weyr. Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce. Rozpravy I. Nr. 6. (Böhmisch und französisch.)

In der Jacobi'schen Formel

$$\int \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} dx = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$$

ist der Ausdruck rechts vieldeutig; er wurde in zwei Fällen, wo die Integrationsgrenzen $(0, K)$, resp. $(K, K+iK')$ und die Integrationswege geradlinig sind, von Herrn Hermite (C. R. XCIV, F. d. M. XIV. 1882. 382) präcisirt.

Herr Weyr leitet die beiden Hermite'schen Resultate ab, indem er die Productdarstellung der $\Theta$-Function benutzt und mit Zuhülfenahme geometrischer Betrachtungen die Anzahl der Factoren von $\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$ bestimmt, deren Logarithmen sich auf dem Integrationswege nicht reproduciren. Auch wird vorausgesetzt, dass der Integralmodul $k$ ein reeller echter Bruch ist. Lh.

---

M. Lerch. Bemerkungen zur Theorie der elliptischen Functionen. Rozpravy I. Nr. 24. (Böhmisch.)

Diese Note beschäftigt sich mit der elliptischen Elementarfunction dritter Art, deren Kenntnis man Herrn Hermite verdankt. Den Ausgangspunkt bildet die Reihe

$$R(u, w \mid \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1-q^{2n} e^{2w\pi i}}, \qquad (q = e^{\tau\pi i}, \ |q| < 1).$$

Setzt man

$$f(u) = R(u, u+v \mid \tau), \quad F(u) = \frac{f(u)}{\vartheta_3(u)},$$

so findet man

$$4\pi i\vartheta_3(v)[F(u)-F(0)] = -\frac{\wp'u-\wp'v}{\wp u-\wp v} + \frac{\wp'u}{\wp u - \wp\frac{1+\tau}{2}},$$

wenn die $\wp$-Function auf Grund der Perioden 1 und $\tau$ bestimmt wird.

Drückt man die rechte Seite durch $\vartheta$-Functionen aus, so folgt

$$\vartheta_3 R(u, w) - \vartheta_3(u) R(0, w-u) = \frac{\vartheta'_1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(u)\vartheta_3(w)}{\vartheta_1(w)\vartheta_1(w-u)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$R(0, v) = A_v\vartheta_3 - \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\vartheta'_1}{\vartheta_1(v)}\int_0^1 \frac{\vartheta_1(u)\vartheta_3(u+v)}{\vartheta_1(u+v)}\,du,$$

wobei $A_v$ den Wert 1 annimmt, wenn der imaginäre Teil von $v$ zwischen Null und dem imaginären Teil von $\tau$ liegt.

Die Periodicitätseigenschaften von $R(u, w)$ ermöglichen es, den Satz abzuleiten:

$$R(u, w) = i\frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_1(w)}\,e^{\pi i(2u-w-\frac{1}{4}\tau)}.R\left(w+\frac{1+\tau}{2},\quad u-\frac{1+\tau}{2}\right),$$

der sich schon im wesentlichen bei Herrn Hermite findet.

Durch Specialisirung von $w$ ergeben sich die bekannten trigonometrischen Entwickelungen der Ausdrücke

$$\frac{\vartheta_0(u)\vartheta_1(u)}{\vartheta_3(u)} \quad \text{etc.}$$

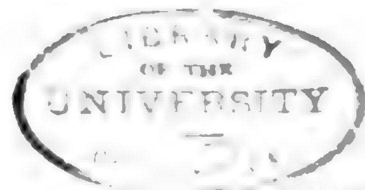
Um Mittel zur Uebersicht der sich hier darbietenden Formeln zu verschaffen, wird weiterhin gesetzt:

$$f_1(u, v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}},$$

$$f_2(u, v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)u\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}},$$

$$f_3(u, v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}},$$

$$f_0(u, v|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} e^{2nu\pi i}}{1-q^{2n}e^{2\pi i(u+v)}}.$$



Wird nun der Kürze wegen

$$F_a(u, v|\tau) = \frac{f_a(u, v|\tau)}{\vartheta_a(u|\tau)}$$

geschrieben, so erhält man die Formel

$$F_a(u, v) - F_a(w, v) = \frac{\vartheta_1' V_a}{2\pi i} \frac{\vartheta_1(u-w)\vartheta_a(u+v+w)}{\vartheta_a(u)\vartheta_a(w)\vartheta_1(u+v)\vartheta_1(w+v)},$$

in welcher

$$V_1 = V_2 = qe^{-v\pi i}, \quad V_3 = V_0 = 1.$$

Im Falle $a = 3$ wird hieraus gefolgert, dass die Grösse

$$\Phi(v, \tau) = F_3\left(\frac{u}{\tau}, \frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) - i\sqrt{\frac{\tau}{i}}\, F_3(u, v|\tau) e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}$$

von $u$ unabhängig ist; wird beiderseits mit $\vartheta_3(u)du$ multiplicirt und zwischen 0 und 1 integrirt, so ergiebt eine einfache Rechnung das Resultat

$$\Phi(v, \tau)\sqrt{\frac{\tau}{i}} + \tau e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} = \frac{\tau}{i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau\pi i\left(x+\frac{i}{2}-\frac{vi}{\tau}\right)^2} \frac{dx}{1+e^{2\pi x}},$$

welches ein neues Integral mit der Theorie der Hermite'schen Transcendenten auf merkwürdige Weise in Verbindung setzt. Aus der vorletzten Gleichung ergeben sich noch die zwei Formeln:

$$\Phi(v, \tau).\vartheta_3.\sqrt{\frac{\tau}{i}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2\pi i}{\tau}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{\tau}(v-n)}} - \tau\Sigma \frac{e^{n^2\tau\pi i-\frac{v^2\pi i}{\tau}}}{1-e^{2\pi i(v+n\tau)}},$$

und

$$\Phi(v, \tau)\vartheta_3(v).\sqrt{\frac{\tau}{i}} = \left(\tfrac{1}{2} - v - \frac{\tau}{2}\right)e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2}}{1-e^{-\frac{2n\pi i}{\tau}}}$$
$$- \tau e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{(n^2\tau-2nv)\pi i}}{1-e^{2n\tau\pi i}},$$

wobei in den Summen $\Sigma'$ die Werte $n = 0$ ausgenommen werden müssen.

Zum Schluss wird die von Herrn Appell verallgemeinerte Function

$$A(u, v|\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{q^{n\nu^2}e^{2\nu n u\pi i}}{1-q^{2\nu}e^{2\pi i(u+v)}}$$

untersucht. Sind z. B. $\Theta_1(u), \Theta_2(u), \ldots, \Theta_n(u)$ linear unabhängige Thetafunctionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Charakteristik (00), so findet sich die Determinantenformel

$$\begin{vmatrix} A(w_0) & A(w_1) & \ldots & A(w_n) \\ \Theta_1(w_0) & \Theta_1(w_1) & \ldots & \Theta_1(w_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Theta_n(w_0) & \Theta_n(w_1) & \ldots & \Theta_n(w_n) \end{vmatrix} = \frac{\gamma\vartheta'_1}{2\pi i} \frac{\vartheta_3(v+\sum\limits^{\alpha} w_\alpha)\prod\limits^{\alpha,\beta}\vartheta_1(w_\alpha-w_\beta)}{\prod\limits_{\alpha}\vartheta_1(v+w_\alpha)},$$

die Summation und Multiplication bezogen auf die Indices

$$\alpha=0, 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \beta=0, 1, \ldots, n \qquad (\alpha<\beta).$$

Gestützt auf den bekannten Satz

$$R_n(u, w+\tau|\tau) = R_n(u, w|\tau)e^{n\pi i(2w-2u+\tau)} + \sum_{s=0}^{n-1} e^{2s\pi i(w+\tau)}\vartheta_3(nu+s\tau|n\tau),$$

mit Benutzung der Bezeichnung

$$R_n(u, w) = A(u, w-u),$$

leitet der Verf. endlich folgende Verallgemeinerung des Hermite'schen Satzes ab:

$$R_n(u, w)\vartheta_1(nu|n\tau).q^{2n-\frac{1}{4}}e^{\pi i(nw-2nu)}$$
$$= i\sum_{s=0}^{n-1} q^{2s}e^{2sw\pi i}\vartheta_3(nu+s\tau|n\tau)R_1\left(nw+\frac{n+n\tau}{2}, nu+s\tau-\frac{n+n\tau}{2}\Big|n\tau\right).$$

Lh.

---

M. Lerch. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen, unendlicher Reihen und bestimmter Integrale. (Fortsetzung.) Rozpravy I. Nr. 25. (Böhmisch.)

Eine Verwandlung der unendlichen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n(a+bq^{2n}+cq^{4n})^\sigma$$

in das Integral

$$\tfrac{1}{2}i\vartheta_2\vartheta_3\int_0^1 \frac{\vartheta_0(x-\alpha)}{\vartheta_1(x-\alpha)} e^{\pi i(\alpha-x)}(a+be^{2\pi i(\alpha-x)}+ce^{4\pi i(\alpha-x)})^\sigma dx,$$

wobei der imaginäre Teil der sonst beliebigen Grösse $\alpha$ zwischen Null und dem imaginären Teile von $\tau$ vorausgesetzt wird. Für den Fall $\sigma=-\frac{1}{2}$ hat Herr Mehler ein analoges Resultat geliefert, welches von Heine verificirt worden ist. Lh.

M. Lerch. Grundzüge der Theorie der Malmstén'schen Reihen. Rozpravy I. Nr. 27. (Böhmisch.)

In dieser Preisschrift hat der Verf. versucht, die Resultate, welche über eine Klasse von unendlichen Reihen von Malmstén (J. für Math. XXXVIII), Schlömilch (1849), Lipschitz (J. für Math. LIV u. CV), Riemann (Berl. Monatsber. 1859), Hurwitz (Schlömilch Z. XXVII), Stieltjes (Akad. Amsterd. 1886), Appell (Journ. de Math. 1886) und von ihm selbst (Prager Ber. 1886, Acta Math. XI, Toulouse Ann. III) erhalten worden sind, aus einer allgemeineren Quelle elementar abzuleiten und sie für die Theorie derjenigen Reihen zu verwerten, welche von Kronecker (Berl. Ber. 1883, 1886 u. 1889) mit so schönem Erfolge studirt und nachher von Herrn Weber (Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, oder auch Math. Ann. XXXIII) aufs neue behandelt worden sind. Es möge hier die Inhaltsangabe nach einzelnen Paragraphen geordnet werden.

§ 1. Eine elementare Ableitung der Riemann'schen Reciprocität

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{\frac{s-1}{2}}\zeta(1-s),$$

zu welcher man direct gelangt, indem man zwei verschiedene Integraldarstellungen von $\zeta(s)$, nämlich

$$\zeta(s)=(2\pi)^{s-1}\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)x^{-s}dx$$

und

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

in überall convergirende Ausdrücke verwandelt und die Resultate vergleicht.

§ 2. Für die Malmstén'sche Reihe (nach der Bezeichnung des Verf.):

$$\mathrm{Ml}(v,w,u,s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nv\pi i}}{[(w+n)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}}$$

wird die Integraldarstellung (unter Anwendung der Bezeichnung $v' = 1 - v$)

$$\mathrm{Ml}(v, w, u, s)$$
$$= 2 \sin \frac{s\pi}{2} \cdot e^{-2vw\pi i} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{2\pi(wi + v'\sqrt{u^2+x^2})}}{e^{2\pi(wi+\sqrt{u^2+x^2})} - 1} + \frac{e^{2\pi v\sqrt{u^2+x^2}}}{e^{2\pi(-wi+\sqrt{u^2+x^2})} - 1} \right\} \frac{x^{1-s}}{\sqrt{u^2+x^2}} dx$$

abgeleitet. Für die trigonometrische Entwickelung

$$e^{2vw\pi i} \mathrm{Ml}(v, w, u, s) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{2nw\pi i}$$

ergeben sich hieraus die Coefficienten in der Form

$$A_n = 2 \sin \frac{s\pi}{2} \int_0^\infty e^{-2\pi|n-v| \cdot \sqrt{u^2+x^2}} \frac{x^{1-s} dx}{\sqrt{u^2+x^2}},$$

und diese Integrale werden mit Hülfe der Bessel'schen Function

$$E(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m! \, \Gamma(s+m+1)}$$

ausgedrückt.

§ 3. Geht man in der Integraldarstellung der Malmstén'schen Reihe zur Grenze für $u = 0$ über, so erhält man zuerst eine Integraldarstellung der Function

$$Z(v, w, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{\{w+n\}^s} \qquad (0 < w < 1,\ 0 < v < 1),$$

wobei $\{w+n\}$ den positiven Wert $\pm(w+n)$ bezeichnet, und dann die Reciprocität

$$e^{2vw\pi i} Z(v, w, s) = (2\pi)^{s-1} 2 \sin \frac{s\pi}{2} \Gamma(1-s) \,.\, Z(1-w, v, 1-s).$$

Eine Analyse jener Integraldarstellung liefert die Formel des Herrn Lipschitz:

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \mathfrak{K}(w, x, 1-s) = e^{\pi i(\frac{1}{2}s - 2wx)} \mathfrak{K}(x, 1-w, s) + e^{\pi i(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x))} \mathfrak{K}(1-x, w, s),$$

in welcher

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s}$$

gesetzt wird.

Es wird gezeigt, dass $\mathfrak{K}$ eine ganze transcendente Function von $s$ ist, ebenso wird ihre Fortsetzung in Bezug auf die zwei übrigen Veränderlichen mit Hülfe der Integraldarstellungen untersucht.

§ 4. Ein neuer Beweis der Fundamentalformel Malmstén's unter Benutzung des Integralsatzes von Cauchy. Neue Integraldarstellungen von $\mathfrak{K}(w, x, s)$, wie z. B.:

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = -e^{-\pi i\left(\frac{s}{2}+2wx\right)} \frac{(2\pi)^s}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x(z-ai)}(z-ai)^{-s}dz}{1-e^{-2w\pi i-z+ai}},$$

worin $a$ eine beliebige, hinreichend kleine, positive Constante bedeutet.

§ 5. Die Lipschitz'sche Formel wird direct dadurch abgeleitet, dass man $e^{2wx\pi i}\mathfrak{K}(w, x, 1-s) = f(w)$ in eine trigonometrische Reihe entwickelt. Aus der sich in dieser Art ergebenden Formel erschliesst man die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+n)^{s-1} e^{2u\pi i(w+n)}}{e^{2\omega\pi(w+n)-2v\pi i}-1} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\mu v+\nu w)}}{(-ui+\mu\omega+i\nu)},$$

welche für ganze Werte von $s$ auf Formeln führt, die in die Theorie der elliptischen Functionen gehören, und die sich aus Kronecker's Ser$(\xi, \eta, u, v, w)$ durch Differentiation nach $u$ ergeben.

§ 6. Die Function Ml$(v, w, u, s) . e^{2vw\pi i}$ von $w$ verhält sich innerhalb eines die reelle Axe enthaltenden Streifens analytisch regulär und besitzt die Periode 1; die Anwendung des Laurent'schen Satzes liefert unmittelbar die Entwickelung

$$e^{2vw\pi i}\text{Ml}(v, w, u, s) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{2nw\pi i}, \quad A_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x(v-n)\pi i}\,dx}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

§ 7. Enthält verschiedene Darstellungen der Bessel'schen Transcendenten, die zumeist mit Hülfe des Cauchy'schen Integralsatzes abgeleitet werden, behufs Erkenntnis der Beschaffenheit von $A_n$.

§ 8. Die in § 7 gefundenen neuen Formen von $A_n$ liefern die für die Anwendung sehr wichtige Gleichung:

$$e^{2\sigma w\pi i}\mathrm{Ml}(v, w, u, s) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nw\pi i}\int_0^\infty e^{-u^2x-\frac{\pi^2(v-n)^2}{x}}x^{\frac{s-3}{2}}dx,$$

und es wird bewiesen, dass $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ Ml $(v, w, u, s)$ eine ganze transcendente Function von $s$ ist, so lange $v$ keine ganze Zahl ist.

Ausserdem wird die Formel abgeleitet

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{Ml}(0, w, u, s) = \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,.\,u^{1-s}$$
$$+2\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nw\pi\int_0^\infty e^{-u^2x-\frac{n^2\pi^2}{x}}x^{\frac{s-3}{2}}dx,$$

welche der Verf. früher (Toulouse Ann.) mit Hülfe der elliptischen Transcendenten erhalten hatte.

§ 9. Es wird die Kronecker'sche Reihe

$$\mathrm{K}(a, b, c;\ \sigma, \tau;\ s) = \sum_{m,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{(am^2+2bmn+cn^2)^s},$$
$$(m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

in welcher $(a, b, c)$ eine positive reelle quadratische Form der Determinante $-\Delta = b^2-ac$ bezeichnet (der Fall complexer Coefficienten braucht infolge der analytischen Natur unserer Function nicht besonders untersucht zu werden), als Function der complexen Variable $s$ aufgefasst. Die Formeln des § 8 liefern eine Darstellung von K, aus der sich schliessen lässt, dass $\mathrm{K}(a, b, c;\ \sigma, \tau;\ s)$ eine ganze transcendente Function von $s$ definirt, so lange wenigstens eine der reellen Grössen $\sigma$, $\tau$ keine ganze Zahl ist. Ist $s_0$ eine von $a, b, c, \sigma, \tau$ unabhängige Constante, so sind die Coefficienten der Potenzentwickelung

$$\mathrm{K}(a, b, c;\ \sigma, \tau;\ s) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\mathrm{K}_\nu(a, b, c;\ \sigma, \tau;\ s_0)(s-s_0)^\nu$$

Functionen von $a, b, c, \sigma, \tau$, welche in dem von Kronecker festgestellten Sinne Invarianten der mit $(a, b, c;\ \sigma, \tau)$ äquivalenten Systeme sind.

Die Darstellung gestattet sogar, das Kronecker'sche Resultat

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\mathrm{K}(a, b, c;\ \sigma, \tau;\ 1) = -\log\mathcal{A}(\sigma, \tau\,|\,w_1, w_2)$$

direct und verhältnismässig einfach zu berechnen.

Nachdem dies ausgeführt, wird der Coefficient von $s$ in der Maclaurin'schen Entwickelung von $K(a, b, c; \sigma, \tau; s)$, d. h. die Invariante $K_1(a, b, c; \sigma, \tau; 0)$ bestimmt, und zwar in der Form

$$-2\log 2\pi + 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\tau)}{\Gamma(\tau)} - \frac{\Gamma'(1-\tau)}{\Gamma(1-\tau)} + \log c$$
$$+ \Phi(\sigma, \tau, w_1) + \Phi(-\sigma, \tau, w_2),$$

wobei der Kürze wegen

$$\Phi(\sigma, \tau, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau+n}\left(\frac{1}{e^{-2\pi i(n+\tau)w - 2\sigma\pi i} - 1} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(n+\frac{1}{2})}{2}\right)$$

gesetzt und mit $w_1$, $-w_2$ die beiden Wurzeln von

$$a + 2bw + cw^2 = 0$$

bezeichnet werden. Damit ist eine neue Invariante der Systeme $(a, b, c; \sigma, \tau)$ gefunden, welche sich wesentlich verallgemeinern lässt und in der verallgemeinerten Gestalt auf das Kronecker'sche $\log \overline{\text{atr}}$. führt.

Für die Function $\Phi$ wird schliesslich die Darstellung

$$\Phi(\sigma, \tau, w) = \frac{1}{1 - e^{2\tau\pi i}} \int_0^1 \left\{\frac{\vartheta_1' \vartheta_1(x + \sigma + \tau w)}{\vartheta_1(\sigma + \tau w)\vartheta_1(x)} + \frac{2\pi i}{1 - e^{2x\pi i}}\right\} e^{2\tau x\pi i}\, dx$$

abgeleitet.

§ 10. Es wird die Reihe für den Fall $\tau = 0$ in doppelter Weise ausgedrückt; man findet so, dass sich die Grösse $K_1(a, b, c; \sigma, 0; 0)$ einerseits nach dem letzterwähnten Resultat des § 9 durch die $\Phi$, andererseits in der Form

$$-2\log 2\pi - 2\log\left\{\frac{1}{\sqrt{c}} H(w_1, \sigma) H(w_2, \sigma)\right\}$$

darstellen lässt, wobei $H(w, \sigma)$ die Hermite'sche Function (nach des Verf. Bezeichnung):

$$H(w, \sigma) = e^{\frac{w\pi i}{4\sin^2\sigma\pi}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2mw\pi i})^{\cos 2m\sigma\pi}$$

bedeutet. Wählt man insbesondere $b = 0$ und vergleicht die beiden Ausdrücke von $K_1$, so kommt die Beziehung:

$$-4\log\left(\sqrt{\frac{w}{i}}\, H(w, \sigma)\right) = 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} - \frac{\Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)}$$
$$+ 2\Phi\left(0, \sigma, -\frac{1}{w}\right).$$

§ 11. Die Reihe $K(a, b, c; 0, 0; s) = K'(a, b, c; s)$ verdient besondere Aufmerksamkeit. Sie verliert den Charakter der ganzen Function, aber es bleibt die Differenz $K'(a, b, c; s) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \frac{1}{s-1}$ eine ganze transcendente Function von $s$. Eine für sämtliche $s$ existirende Darstellung dieser Function ergiebt den directen Beweis des berühmten Kronecker'schen Resultates, welches auch von Herrn Weber bewiesen wurde.

§ 12. Die allgemeinere Reihe

$$\sum_{m,n} \left( \frac{2\sqrt{\Delta}}{u + am^2 + 2bmn + cn^2} \right)^s, \quad \Delta = ac - b^2 > 0,$$

giebt analog zur Bildung neuer Invarianten der aequivalenten quadratischen Formen Anlass. Die zwei ersten Glieder der nach wachsenden Potenzen von $s-1$ fortschreitenden Entwickelung dieser Function lauten folgendermassen:

$$\frac{2\pi}{s-1} + 2\pi \log \frac{2\sqrt{\Delta}}{u} + \left\{ 8\pi \int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\cos\text{hyp}\, z} - 1} \right.$$
$$\left. + 4\pi\sqrt{\Delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{cu + \Delta m^2}\,\left(e^{\frac{2\pi}{c}\sqrt{cu + \Delta m^2} + \frac{2mb\pi i}{c}} - 1\right)} \right\},$$

sodass die eingeklammerte Grösse eine Invariante der äquivalenten Formen $(a, b, c)$ ist.

Ausserdem ergiebt sich für den Coefficienten von $s$ in der Maclaurin'schen Entwickelung der Function eine Darstellung, aus welcher die Invarianz der Grösse

$$e^{-J} \prod_{m=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{c}(mb + i\sqrt{cu + \Delta m^2})}\right),$$

wo

$$J = \frac{2\pi u}{\sqrt{\Delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\text{hyp}\, z\, dz}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\cos\text{hyp}\, z} - 1}$$

gesetzt ist, sich erschliessen lässt.

Im § 13 wird schliesslich eine Verallgemeinerung der Resultate von Malmstén und Lipschitz angedeutet, indem die Function

$$\sum_{n_1, \dots, n_p} \frac{e^{2\pi i(n_1 v_1 + \dots + n_p v_p)}}{[c_1(w_1 + n_1)^2 + \dots + c_p(w_p + n_p)^2 + u]^s},$$

in eine trigonometrische Reihe nach den $w$ entwickelt wird. Der Fall $u = 0$ liefert wieder eine Reciprocität, jedoch wird in diesem Falle auf die sonst wichtigen Convergenzbetrachtungen nicht eingegangen. Lh.

M. Krause. Ueber die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind. Leipz. Ber. XLIV. 15-42, 238-268.

Herr Krause hatte in einer Reihe von Arbeiten (F. d. M. XXII. 1890. 468, XXIII. 1891. 470) untersucht, wann die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten wieder eindeutige doppeltperiodische Functionen sind. Jetzt wendet er sich zur Untersuchung linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten doppeltperiodische Functionen sind, bei denen jedoch nicht sämtliche Integrale doppeltperiodische Functionen sein sollen, und stellt zunächst im Abschnitte I eine Reihe notwendiger Bedingungen dafür auf, dass das allgemeine Integral einer solchen Differentialgleichung eine eindeutige Function ist.

Damit wird zugleich eine Lücke ausgefüllt, die, wie Herr Krause schon damals bemerkt hatte, bei seinen früheren Untersuchungen geblieben war. Er hatte nämlich nur Typen von Differentialgleichungen angegeben, deren Integrale sämtlich doppeltperiodisch sind, falls nicht etwa die beiden particulären Integrale in eins zusammenfallen. Es handelt sich nun in der gegenwärtigen Abhandlung darum, festzustellen, wann dieser Ausnahmefall eintritt, und wie alsdann das allgemeine Integral der Differentialgleichung aussieht. In dieser Hinsicht werden im besonderen die Lamé'sche und die Picard'sche Differentialgleichung untersucht, und es wird die Discussion der Ausnahmefälle in voller Allgemeinheit durchgeführt.

Im Abschnitte II bringt Herr Krause seine Untersuchungen über Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu einem gewissen Abschluss, indem er die Ausnahmefälle zunächst bei den Gleichungen betrachtet, deren Integrale einen einfachen Unendlichkeitspunkt haben, während die Coefficienten noch einen weiteren oder zwei

weitere Unendlichkeitspunkte besitzen, und darauf wird der Fall erledigt, dass den Integralen ein zweifacher Unendlichkeitspunkt und den Coefficienten noch ein weiterer zukommt. St.

---

G. F. Lipps. Ueber Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen. Leipz. Ber. XLIV. 340-384, 473-530.

Ist für die Function:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{a\left(m+\frac{\alpha}{r}\right)^2 + 2\left(m+\frac{\alpha}{r}\right)\left(u+\frac{\alpha'}{r}\pi i\right)},$$

bei der $\alpha, \alpha'$ ganze Zahlen bezeichnen, die Nennerzahl $r$ gerade, $r = 2\varrho$, so bilden die vier Functionen:

$$\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(u),\quad \vartheta\begin{bmatrix}\alpha+\varrho\\ \alpha'\end{bmatrix}(u),\quad \vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'+\varrho\end{bmatrix}(u),\quad \vartheta\begin{bmatrix}\alpha+\varrho\\ \alpha'+\varrho\end{bmatrix}(u)$$

eine viergliedrige Untergruppe in der Gruppe der $r^2$ verschiedenen Functionen $\vartheta\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}(u)$ $(\alpha, \alpha' = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$, für welche, wie unmittelbar ersichtlich ist, die gleichen Relationen wie für die vier speciellen, den Werten $\alpha = \alpha' = 0$ entsprechenden Jacobi'schen Thetafunctionen bestehen. Im ersten Teile der vorliegenden Abhandlung wird, anschliessend an die Arbeit des Herrn Scheibner „Ueber den Zusammenhang der Thetareihen mit den elliptischen Integralen" (Leipz. Ber. XLI. 86-109, 245-276, Math. Ann. XXXIV. 494-543, F. d. M. XXI. 1889. 459), der Zusammenhang solcher vier Thetafunctionen mit den elliptischen Integralen behandelt. Dabei dient als Grundlage der Untersuchung die Riemann'sche Thetaformel, zu deren Gewinnung der Verf. sich des Jacobi'schen Verfahrens bedient.

Im zweiten Teile der Abhandlung wird in analoger Weise der Zusammenhang der Thetafunctionen zweier Variabeln mit gewissen Doppelintegralen untersucht, ein Zusammenhang, auf den zuerst wohl Herr Brioschi „Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di primo ordine" (Annali di Mat. (2) XIV. 255, F. d. M. XVIII. 1886. 416) aufmerksam gemacht hat. Kr.

---

Th. Lohnstein. Notiz über eine Methode zur numerischen Umkehrung gewisser Transcendenten. Acta Math. XVI. 141-142.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass es eine alte, auf die Benutzung der Stirling'schen Interpolationsreihe hinauskommende Methode ist, die Herr C. Runge (Acta Math. XV) zur numerischen Umkehrung der Exponential-, Kreis- und elliptischen Functionen entwickelt. Auf die elliptischen Integrale hat dieselbe zuerst Schellbach in seinem Werke „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen" (Berlin 1864) angewandt, ohne allerdings, wie Herr Runge, den Grad der erlangten Annäherung allgemein festzustellen. Hz.

---

W. Krimphoff. Neue geometrische Darstellung der lemniskatischen Function. J. für Math. CX. 73-77.

Die Abhandlung enthält die Resultate der Inauguraldissertation des Verfassers, die F. d. M. XXII. 1890. 750 zwar erwähnt, jedoch nicht besprochen worden ist (es muss dort statt Marburg 1890 heissen Münster 1890).

Die Lemniskate giebt, wie Herr Krimphoff mit Recht bemerkt, über den functionentheoretischen Charakter der Function $\mathrm{sn}(u, \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ höchst ungenügenden Aufschluss. Zahlentheoretische Untersuchungen führen nun zu einer Methode, „welche mit den tieferliegenden Eigenschaften dieser Function in innigstem Zusammenhange steht und dieselben in überraschend einfacher Weise kenntlich macht." Es handelt sich um das Studium der Curven, die durch die Gleichungen:

$$x \pm iy = \mathrm{sn}[(m \pm ni)u, \sqrt{\tfrac{1}{2}}]$$

definirt werden, wo $m$ und $n$ ganze Zahlen bedeuten; $x$ und $y$ ergeben sich hieraus als rationale Functionen von $\mathrm{sn}\,u$. Das Verhalten der Doppelpunkte dieser Curven giebt unmittelbar die Periodenteilung der lemniskatischen Function.

Der Umstand, dass $x$ und $y$ Functionen von $u$ mit der Periode $4K$ sind, veranlasst den Verfasser zu der Bemerkung: „Es tritt hier der eigentümliche Fall ein, dass eine algebraische Curve in sich

selbst periodisch zurückläuft." In Wahrheit liegt hier eine Verwechselung vor zwischen den Eigenschaften der betrachteten Curve und den Eigenschaften der zufällig gewählten Darstellung der Curve. Diese Art des periodischen Verhaltens zeigt schon der Kreis, wenn man ihn durch

$$x = \cos u, \quad y = \sin u$$

darstellt. Wählt man aber die Darstellung:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2},$$

so findet eine solche Periodicität nicht statt. Dasselbe gilt für die Krimphoff'schen Curven, wenn man statt $u$ als Parameter $t = \operatorname{sn} u$ einführt. St.

---

C. Juel. En geometrisk Indledning i de elliptiske Functioners Theori. Naturforskermöde 1892. 344-346.

Die Punkte einer Curve dritter Ordnung können nach Clebsch mittels elliptischer Functionen individualisirt werden. Derselbe Gedanke kann umgekehrt dazu verwendet werden, eine independente und rein geometrische Einleitung in die Lehre dieser Functionen zu geben. Die Grundlage dieser Theorie wird entwickelt.

Da aber nur ein Auszug vorliegt, so muss die nähere Besprechung aufgespart werden, bis die Veröffentlichung des ganzen, auf der Naturforscherversammlung in Kopenhagen gehaltenen Vortrags vorliegt. V.

---

J. H. Boyd. An application of elliptic functions to a problem in geometry. Annals of Math. VI. 93-97, 163-165.

In eine der Sicheln, welche zwei sich schneidende Grundkreise bilden, werde ein Kreis eingeschrieben, der beide Grundkreise berührt. Darauf werde ein zweiter Kreis construirt, der ebenfalls in der Sichel liegt und sowohl die Grundkreise wie den ersten Kreis berührt. So fortfahrend, erhält man eine Schar von unendlich vielen Kreisen. Es soll die Summe $S_r$ ihrer Radien und die Summe $S_A$ ihrer Flächenräume ermittelt werden.

Einfache Ueberlegungen ergeben die gesuchten Grössen in der Form:

$$S_r = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg}^2\alpha \,.\, h^{2n}z^2}{(h^{2n}z^2 - z_1^2)(h^{2n}z^2 - z_2^2)},$$

$$S_A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi \operatorname{tg}^4\alpha\, h^{4n}z^4}{(h^{2n}z^2 - z_1^2)^2(h^{2n}z^2 - z_2^2)^2},$$

und es wird nun die Summation dieser unendlichen Reihen mittels der Weierstrass'schen $\sigma$-Function ausgeführt. St.

---

J. H. Boyd. An expression for the surface of an ellipsoid in terms of Weierstrass' elliptic functions. Annals of Math. VII. 1-10.

Vereinfachung der Herleitung der von Herrn Weierstrass in seinen Vorlesungen gegebenen Formel für die Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoides. St.

---

J. Marchand. Sur la rectification des arcs des courbes dites limaçons de Pascal. Progreso mat. II. 68-74.

E. Lampe. Nota matematica. Progreso mat. II. 269-270.

Hr. Marchand drückt den Umfang der Pascal'schen Schnecke durch elliptische Integrale zweiter Gattung, geometrisch durch den Umfang einer Ellipse aus. Als eine Folge seiner Formeln ergiebt sich ihm das Wallis'sche Product für die Zahl $\frac{1}{2}\pi$. Hr. Lampe weist in seiner Note darauf hin, dass die von Hrn. Marchand erörterte Eigenschaft bekannt sei und allen Epitrochoiden und Hypotrochoiden des Kreises in gleicher Weise zukomme. Tx. (Lp.)

---

E. Lampe. Soluzione della questione VII. Rivista di Mat. II. 81-82.

F. Castellano. Soluzione della questione VII. Rivista di Mat. II. 82-84.

Herleitung einer von Hrn. Reuleaux angegebenen Formel für den Umfang einer Ellipse. St.

---

R. GUIMARÃES. Sur un arc d'ellipse de longueur déterminée. Batt. G. XXX. 156-158.

Der Verf. zeigt mit Benutzung eines bekannten Satzes von Legendre über Ellipsenbogen (Traité des fonctions elliptiques, I, 45 u. 49), dass das elliptische Integral zweiter Gattung

$$\int_{\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{a+b}}}^{\arcsin\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \tfrac{1}{2}(a-b)$$

ist. Wbg.

R. GUIMARÃES. Sobre una fórmula geométrica. Progreso mat. II. 349-351.

Berechnung des Winkels desjenigen Sectors, welcher aus der Abwickelung des Mantels eines Kegels mit elliptischer Basis entsteht. Tx. (Lp.)

## Weitere Litteratur.

A. BERGER. Déduction des propriétés générales de la fonction elliptique générale du second ordre. Upsala Nova Acta Soc. Sc. 50 S. (1891).

A. SÖDERBLOM. De la convergence du développement analytique de la fonction elliptique $\wp(u)$ et du calcul de la valeur de l'argument $u$, la valeur de la fonction $\wp(u)$ étant donnée. Upsala Nova Acta Soc. Sc. 67 S. (1891.)

G. KNOCHE. Ueber die aus der complexen Multiplication der elliptischen Functionen entspringenden algebraischen Gleichungen. Diss. Marburg. 8°.

E. PENZOLD. Bestimmung der Lichtmenge, welche ein Ellipsoid von einem leuchtenden Punkte empfängt, wenn es teilweise von einem anderen Ellipsoide beschattet wird. Diss. Jena. 8°.

## C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

W. Burnside. On the form of hyperelliptic integrals of the first order, which are expressible as the sum of two elliptic integrals. Lond. M. S. Proc. XXIII. 173-185.

Enthält nichts Neues. St.

E. Oekinghaus. Zur Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Integrale. Hoppe Arch. (2) XI. 132-175.

Der Verfasser setzt die Untersuchungen fort, über die F. d. M. XVI. 1884. 403, XVII. 1885. 465 und XVIII. 1886. 406 von anderer Seite berichtet worden ist. St.

---

O. Biermann. Beitrag zur Lehre von den Abel'schen Integralen. Monatsh. f. Math. III. 21-30.

In einer früheren Arbeit (Sitzb. d. Wiener Ak. LXXXVII. 1883. 934-992; vgl. F. d. M. XV. 1883. 427) hat der Verfasser gezeigt, wie die Weierstrass'schen Primfunctionen, welche dem hyperelliptischen Gebilde

$$y^2 = A.\prod_{\lambda=1}^{2p+1}(x-a_\lambda)$$

zugehören, zu ändern und einzuführen sind, wenn das Gebilde durch die Gleichung

$$y^n = A.\prod_{\lambda=1}^{l}(x-a_\lambda)^{n_\lambda}$$

definirt ist. Auf Grund jener Entwickelung wird auseinandergesetzt, wie man im Falle eines beliebigen irreducibeln algebraischen Gebildes vom Geschlechte $p$, das zu einer Gleichung $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ gehört, zu den Primfunctionen gelangen kann. Hierauf gestützt, bestimmt der Verfasser dann die constanten Wertdifferenzen der elementaren Abel'schen Integrale dritter Gattung durch die Perioden

von $p$ linearen unabhängigen Integralen erster Gattung und $p$ Integralen zweiter Gattung, deren Grenzen mit den logarithmischen Unstetigkeitsstellen des Integrales dritter Gattung übereinstimmen. Hierbei ergiebt sich auch für dieses letztere Integral eine einfache Darstellung.

Endlich wird auf Grund der Eigenschaften derselben Primfunctionen für jene Functionen, welche an den Riemann'schen Querschnitten Multiplicatoren besitzen (vgl. Appell, Acta Math. XIII, F. d. M. XXII. 1890. 412), das dem Abel'schen analoge Theorem aufgestellt. Bm.

F. Franklin. Bemerkung über einen Punkt in Riemann's „Theorie der Abel'schen Functionen". Math. Ann. XLI. 308.

In Riemann's „Theorie der Abel'schen Functionen" I. Abt. § 4 wird die Ableitung der Integrale zweiter Gattung aus denen dritter Gattung mit den Worten erwähnt: „Wenn man dann $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ so nach $z_1$ differentiirt, dass die reellen Teile der Periodicitätsmoduln und der Wert von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ für einen beliebigen Punkt der Fläche $T$ constant bleiben, so erhält man eine Function $t(\varepsilon_1)$, die in $\varepsilon_1$ unstetig wie $\frac{1}{z-z_1}$ wird." Der Verfasser weist die Unrichtigkeit dieses Satzes nach. Bm.

W. Wirtinger. Untersuchungen über Abel'sche Functionen vom Geschlechte 3. Math. Ann. XL. 261-312.

Die vorliegende Abhandlung umfasst die ausführliche Darlegung und Begründung der 1891 in den Monatsh. f. Math. II. 55-60 entwickelten Gedanken (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 492). Anschliessend an die Gesichtspunkte, die Herr F. Klein teils in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen" (Math. Ann. XXXVI, F. d. M. XXII. 1890. 498), teils in einer im Sommer 1889 gehaltenen Vorlesung dargelegt hat, verfolgt die Arbeit hauptsächlich den Zweck, eine neue Lösung des Umkehrproblems für $p=3$ zu geben, indem sie sich solcher Jacobi'schen Functionen

bedient, deren Entwickelung nach Potenzen von viergliedrigen Integralsummen nach ganzen rationalen Covarianten derjenigen $C_4$ fortschreitet, welche das algebraische Gebilde definirt.

Von den zwei Teilen, in welche die Abhandlung zerfällt, beschäftigt sich der erste mit geometrisch algebraischen Untersuchungen über Scharen corresidualer Quadrupel, der zweite aber behandelt die Abhängigkeit der eingeführten Gebilde von den transcendenten Argumenten, wodurch die expliciten Formeln für das Umkehrproblem auf bedeutend einfachere Weise als bisher erhalten werden. Ausserdem ergeben sich durch diese Behandlung die 28 ungeraden Sigmafunctionen des Herrn Klein, sowie die Theta- resp. Sigmafunctionen des Herrn Frobenius (J. für Math. CV, vgl. F. d. M. XXI. 1889. 499) als Specialfälle einer und derselben Sigmafunction, welche unmittelbare geometrische Bedeutung hat. Bm.

E. Goursat. Sur l'inversion des intégrales abéliennes. C. R. CXV. 787-790.

Die vorliegende Note behandelt das sogenannte „erweiterte Umkehrproblem" (vergl. Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen § 43 und 44), und zwar in der allgemeinen Formulirung, dass zu $p$ Summen von je $p+q$ Integralen erster Gattung $q$ Summen von je $p+q$ beliebigen Integralen hinzugenommen werden, die nur der Bedingung zu genügen haben, dass zwischen ihnen und den $p$ Integralen erster Gattung keine lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehe. Kr.

A. Krazer. Ueber ein specielles Problem der Transformation der Thetafunctionen. J. für Math. CXI. 64-86. (1893.)

Im zweiten Teile der Abhandlung: Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen (Leipzig 1892, Teubner, F. d. M. XXIII. 1891. 492) ist das allgemeine Transformationsproblem der Thetafunctionen gelöst, und man erhält aus den dort mitgeteilten Resultaten die Lösung eines jeden speciellen Transformationsproblems, entweder, indem man in der allgemeinen

Transformationsformel (Formel A, Seite 128) an Stelle der darin vorkommenden Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die gegebenen speciellen Zahlenwerte einführt, oder, indem man die vorliegende specielle Transformation nach den angegebenen Regeln aus einfachen zusammensetzt, die diesen einfachen Transformationen entsprechenden Thetaformeln der aufgestellten Formelsammlung entnimmt und in der im sechsten Abschnitte entwickelten Weise zu einer einzigen Formel vereinigt. Diesen letzteren Weg hat der Verf. in der vorliegenden Abhandlung eingeschlagen, um den Zusammenhang einer Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ mit solchen Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((u))_b$ zu untersuchen, für welche

$$b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} + \frac{e_{\nu\nu'}}{n}\pi i \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, wo $e_{\nu\nu'} = e_{\nu'\nu}$ gegebene ganze Zahlen bezeichnen. Die mitgeteilte Behandlung des gewählten Beispieles sollte einmal als Vorbild für die Durchführung einer solchen Aufgabe dienen, dann aber wurde sie auch deshalb unternommen, weil sie die Veranlassung giebt, mehrfache Gauss'sche Summen in allgemeinster Gestalt zu untersuchen. In Bezug auf diese wurden zwei Resultate gewonnen, die sich folgendermassen aussprechen lassen:

1. Bezeichnet man mit $G$ die Summe:

$$G = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0, 1, \ldots, n-1} e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu + \frac{1}{2}n e_{\mu\mu})\varrho_\mu \pi i},$$

bei der $n$ eine positive ganze Zahl, $e_{\mu\mu'}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ $p^2$ ganze Zahlen, welche den $\frac{1}{2}p(p-1)$ Bedingungen $e_{\mu\mu'} = e_{\mu'\mu} (\mu > \mu')$ genügen, $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ endlich $p$ beliebige ganze Zahlen bezeichnen, so sind diejenigen Systeme ganzer Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, für welche $G$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, identisch mit jenen Systemen ganzer Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$, welche den Gleichungen:

$$\text{(E)} \qquad e^{\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_\mu^{(i)}\varrho_{\mu'}^{(i)}\pi i + \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu + \frac{1}{2}n e_{\mu\mu})\varrho_\mu^{(i)}\pi i} = 1$$

$$(i = 1, 2, \ldots, s)$$

genügen, in denen $\varrho_1^{(i)}, \ldots, \varrho_p^{(i)} (i = 1, 2, \ldots, s)$ die sämtlichen Nor-

mallösungen des Congruenzsystems:

$$\text{(C)} \qquad \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'}\varrho_{\mu'} \equiv 0 (\text{mod.}\, n)$$

sind, mit $s$ also deren Anzahl bezeichnet ist. Diese Zahlensysteme $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ werden sämtlich durch das Gleichungensystem:

$$\sigma_\mu = \overset{0}{\sigma}_\mu + \sum_{\mu'} e_{\mu\mu'} x_{\mu'} + n\lambda_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

geliefert, wenn man darin unter $\overset{0}{\sigma}_1, \ldots, \overset{0}{\sigma}_p$ irgend eine Lösung der Gleichungen (E) versteht, für die $x$, $\lambda$ aber der Reihe nach alle möglichen Systeme von je $2p$ ganzen Zahlen setzt.

2. Bezeichnet man ferner mit $\overline{G}$ die Summe:

$$\overline{G} = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0, 1, \ldots, n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\mu\mu'}\sum e_{\mu\mu'}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_{\mu}(\sigma_\mu + \frac{1}{2} n e_{\mu\mu})\varrho_\mu \pi i},$$

so ist $\overline{G}$ stets gleichzeitig mit $G$ von Null verschieden oder gleich Null, und in dem ersteren Falle gilt die Gleichung:

$$G\overline{G} = s n^p,$$

wenn man unter $s$ wieder die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems (C) versteht. Dieses Resultat ist für die einfachen Gauss'schen Summen auf anderem Wege von Gauss selbst im 35. Art. seiner Abhandlung: „Summatio quarumdam serierum singularium" bewiesen worden. Kr.

---

E. Jahnke. Ueber eine neue Methode zur Entwickelung der Theorie der Sigmafunctionen mehrerer Argumente. Schlömilch Z. XXXVII. 178-185.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich ausschliesslich mit den Sigmafunctionen einer Veränderlichen und leitet für diese, veranlasst durch die einschlägigen Arbeiten des Herrn Caspary, folgendes Resultat ab:

Bezeichnen $a_{mn}$ $(m, n = 1, 2, 3)$ die neun Coefficienten einer orthogonalen Substitution von der Determinante $+1$, $p_h$, $v_h$ $(h = 1, 2, 3)$ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}da_{1l} + a_{2k}da_{2l} + a_{3k}da_{3l}), \\ v_h &= \phantom{-(} a_{k1}da_{l1} + a_{k2}da_{l2} + a_{k3}da_{l3}, \end{aligned} \qquad (hkl = 1\,2\,3;\ 2\,3\,1;\ 3\,1\,2)$$

so ist, wenn $u$, $v$ zwei beliebige Argumente, $e$ die positive oder

negative Einheit, $G$ eine beliebige Function, $\lambda\mu\nu$ eine gerade Permutation von 1 2 3 bezeichnet:

$$a_{1h} \pm i a_{2h} = -e_h\, G^{\pm 1}\, \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_s}\, \frac{\sigma_k(u \pm v)}{\sigma_s u\, \sigma_s v}, \qquad (e_2 = e_1,\ e_3 = e e_1),$$

$$a_{3h} = e'_h\, i \qquad \frac{\varepsilon_{s_h}}{\varepsilon_s}\, \frac{\sigma_{s_h} u\, \sigma_{s_h} v}{\sigma_s u\, \sigma_s v}, \qquad p_h = -i a_{3h} m_{s_h},$$

$$v_1 \pm i v_2 = \frac{e\bar{e}}{\varepsilon_s}\, G^{\pm 1}\, \frac{\sigma(u \pm v)}{\sigma_s u\, \sigma_s v}(du \pm dv), \qquad v_3 = -i m_s,$$

wo für $h = 1$ $k = \lambda$, für $h = 2$ $k = \mu$, für $h = 3$ $k = \nu$ zu setzen ist, und die Einheiten $e$, $e'$, $\bar{e}$ sowie die Indices $s$, $s_h$ sich aus der Tabelle:

| | $e_1$ | $e'_1$ | $e'_2$ | $e'_3$ | $\bar{e}$ | $s$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | $i$ | $-e$ | $-e$ | $1$ | $\pm i$ | $\mu$ | $\nu$ | $0$ | $\lambda$ |
| II | $1$ | $e$ | $e$ | $1$ | $1$ | $0$ | $\lambda$ | $\mu$ | $\nu$ |
| III | $i$ | $e$ | $-e$ | $-1$ | $\pm i$ | $\nu$ | $\mu$ | $\lambda$ | $0$ |
| IV | $-1$ | $-e$ | $e$ | $-1$ | $-1$ | $\lambda$ | $0$ | $\nu$ | $\mu$ |

ergeben; dabei ist ferner $\varepsilon_0 = 1$, $\sigma_0 = \sigma$ und:

$$m_\varkappa = \frac{\sigma'_\varkappa v}{\sigma_\varkappa v}\, du + \frac{\sigma'_\varkappa u}{\sigma_\varkappa u}\, dv + d\log G \qquad (\varkappa = 0,\ s_1,\ s_2,\ s_3)$$

zu setzen. Das zweite System ist das einfachste; für $e = 1$, $\lambda = 2$ geht es in das von Herrn Caspary (Journ. de Math. (4) VI. 367-404, F. d. M. XXII. 1890. 479) mitgeteilte über. Kr.

---

E. Wiltheiss. Ueber die Differentialgleichungen der hyperelliptischen Thetafunctionen. Deutsche Math. Ver. I. 72-75.

Ist:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E}},$$

so ist:

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{\partial^2 \log \theta}{\partial u^2}\right)^2 = -\begin{vmatrix} A & B & C + 2\Phi \\ B & C - \Phi & D \\ C + 2\Phi & D & E \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung

$$\Phi = \frac{\partial^2 \log \theta}{\partial u^2}$$

gesetzt ist, und:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^4 \log \theta}{\partial u^4} = -6\left(\frac{\partial^2 \log \theta}{\partial u^2}\right)^2 + \tfrac{1}{2} g_2,$$

wo

$$g_2 = (AE - C^2) - 4(BD - C^2)$$

ist. Zwischen den hyperelliptischen Thetafunctionen bestehen, wenn die Thetafunctionen die durch Herrn Klein eingeführten Invarianteneigenschaften haben, partielle Differentialgleichungen von einer den Gleichungen (A) und (B) ganz analogen Form; diese mitzuteilen, ist der Inhalt der vorliegenden Note. Kr.

---

J. Schröder. Zur Bestimmung des nur von den Constanten des algebraischen Gebildes abhängigen Teiles der hyperelliptischen $\vartheta$-Functionen. Hamb. Mitt. III. 73-86.

In Artikel I werden einige Entwickelungen, welche das zweite Glied der zu $\mu = 1$ gehörigen $\sigma$-Reihe betreffen, angestellt. In Artikel II wird sodann die Differentialgleichung für die Constanten $C_{q\,q'}$, welche den Zusammenhang zwischen den hyperelliptischen $\sigma$- und $\vartheta$-Functionen vermitteln, allgemein angegeben. In Artikel III wird endlich diese Differentialgleichung für den besonderen Fall $p = 2$, $\mu = 1$ integrirt. Kr.

---

A. Gutzmer. Bemerkung über die Jacobi'sche Thetaformel. J. für Math. CX 177-179.

Betrachtet man $\zeta_0$ als unabhängige Veränderliche, so sind:

$$\Theta_1 = \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_1)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_1), \quad \Theta_2 = \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_2)\vartheta(\zeta_0-\zeta_2),$$
$$\Theta_3 = \vartheta_1(\zeta_0+\zeta_3)\vartheta_1(\zeta_0-\zeta_3)$$

drei Thetafunctionen zweiter Ordnung, zwischen denen folglich eine lineare Relation von der Gestalt:

$$\text{(L)} \qquad c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2 + c_3\Theta_3 = 0$$

besteht. Bestimmt man die Coefficienten $c_1$, $c_2$, $c_3$, indem man

z. B. zuerst $\zeta_0 = \zeta_1$ und hierauf $\zeta_0 = \zeta_2$ setzt, und führt die gefundenen Werte in die Gleichung (L) ein, so geht dieselbe in die bekannte dreigliedrige Weierstrass'sche Formel über. Kr.

---

G. F. Lipps. Ueber Thetareihen und ihren Zusammenhang mit den Doppelintegralen. Leipz. Ber. XLIV. 340-384, 473-530.

Bericht auf S. 453 dieses Bandes.

---

H. Burkhardt. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. III. Math. Ann. XLI. 313-343.

Der Zweck des vorliegenden dritten Teiles dieser Untersuchungen (vgl. die Referate über Teil I: F. d. M. XXII. 1890. 488 und Teil II: XXIII. 1891. 490) ist die Entwickelung der Beziehungen zwischen dem Problem der Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen und dem der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. Die Abhandlung umfasst die Ausführung und Begründung der in der Note: „Zur Reduction des Problemes der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen $p = 2$" (Gött. Nachr. 1892. 1-5) gegebenen Resultate (vgl. F. d. M. dieser Jahrg. S. 468).

Bereits aus den Untersuchungen des Herrn C. Jordan (C. R. 1869 oder Traité des substitutions, 316ff., 365) ist es bekannt, dass beide Probleme isomorphe Gruppen besitzen; ferner hat Herr F. Klein die Reduction der beiden Probleme auf einander angedeutet. (Journ. de Math. (4) IV. 169ff. 1887, vgl. F. d. M. XX. 1888. 816.) Daher bestand die Aufgabe des Verfassers darin, die dort gegebenen Andeutungen mit expliciten Formeln durchzuführen, wozu die Weiterführung der von Herrn Witting (Math. Ann. XXIX, F. d. M. XIX. 1887. 501) begonnenen geometrischen Untersuchungen der „Configuration im Raume der $Z$" mit Benutzung liniengeometrischer Mittel diente. Geben wir, wie in den Referaten über die beiden ersten Teile, auch hier eine kurze Inhaltsangabe der sechs neuen Abschnitte.

Der XIII. Abschnitt giebt im Anschlusse an den VIII. des zweiten Teiles, wo die allgemeine Theorie der hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ entwickelt wurde, die Formeln für die Vermehrung der Argumente der $X_{\alpha\beta}$ um $(2n)^{\text{tel}}$ Perioden an und enthält den Beweis für die Unabhängigkeit der „Gruppe der $X_{\alpha\beta}$“ von der Charakteristik.

Im XIV. Abschnitte wird die Untersuchung Witting's durch Einführung der Liniencoordinaten vervollständigt. Bei den linearen Transformationen der Perioden, welche die Charakteristik der vier für $n=3$ vorhandenen hyperelliptischen Functionen $Z_{\alpha\beta}(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)$ fest lassen, erfahren diese Functionen, wie bekannt, eine Gruppe $G$ von 51840 linearen Substitutionen, die aus vier Operationen erzeugt werden. Bildet man nun aus zwei Reihen cogredienter Veränderlicher $Z$ und $\bar{Z}$ die zweireihigen Determinanten

$$a_{ik} = Z_i \bar{Z}_k - Z_k \bar{Z}_i,$$

so erfahren diese eine Gruppe von 25920 Substitutionen, die aus sechs Operationen erzeugt werden kann. Deutet man die $Z$ als Punktcoordinaten, die $a_{ik}$ als Liniencoordinaten des gewöhnlichen Raumes, so wird durch diese Substitutionen die erwähnte Configuration von Witting festgelegt. Zu den bereits bekannten Resultaten ergeben sich dann noch folgende: Durch jedes der 45 Paare von Hauptgeraden Witting's ist eine Strahlencongruenz bestimmt, und es giebt 27 ausgezeichnete Fünfen von solchen Paaren oder Strahlencongruenzen; die fünf Congruenzen, welche durch die Paare einer der genannten Fünfen bestimmt sind, gehören jedesmal einem und demselben linearen Complex an, so dass man 27 lineare Complexe erhält, deren Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\lambda} a_{12} - \varepsilon^{\mu} a_{13} - \varepsilon^{-\lambda} a_{34} + \varepsilon^{-\mu} a_{42} &= 0, \\ \varepsilon^{\lambda} a_{13} - \varepsilon^{\mu} a_{14} - \varepsilon^{-\lambda} a_{42} + \varepsilon^{-\mu} a_{23} &= 0, \\ \varepsilon^{\lambda} a_{14} - \varepsilon^{\mu} a_{12} - \varepsilon^{-\lambda} a_{23} + \varepsilon^{-\mu} a_{34} &= 0. \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \lambda, \mu = 0, 1, 2 \\ \varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen werden bei den Operationen unserer Gruppe ohne hinzutretende Factoren unter sich vertauscht. Es ist auf 72 Arten möglich, je sechs von diesen linearen Complexen erster Art $\xi_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$ so auszuwählen, dass die 30 in ihnen enthaltenen Congruenzen der genannten Art alle von

einander verschieden sind. Aber ausserdem lassen sich dieselben 30 Hauptcongruenzen auch noch auf eine andere Art in sechs Fünfen anordnen, welche sechs Complexen $\eta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$ entsprechen. Also ordnen sich die 72 Sechsen von linearen Complexen zu 36 „Doppelsechsen" zusammen. Für jede derselben ist

$$\sum_{i=1}^{6} \xi_i \equiv -\sum_{i=1}^{6} \eta_i,$$

und der gemeinsame Wert dieser Summen, gleich 0 gesetzt, liefert einen neuen Complex zweiter Art, so dass also den 36 Doppelsechsen von linearen Complexen erster Art 36 lineare Complexe zweiter Art entsprechen, von denen jeder durch 720 Substitutionen unserer Gruppe ungeändert bleibt.

Im XV. Abschnitte werden die Invarianten der Gruppe der $Z$ berechnet. Setzt man nämlich in den $Z_{\alpha\beta}$ ungerader Charakteristik, welche gerade Functionen ihrer Argumente sind, letztere gleich 0, so gehen sie in Modulformen $z_{\alpha\beta}$ über. Die von Herrn Maschke (Math. Ann. XXXIII. 333, 337; F. d. M. XX. 1888. 139) angegebenen Invarianten der Gruppe der $Z$ gehen dabei über in Modulformen zweiter Stufe und drücken sich im speciellen rational aus durch die Coefficienten der der Charakteristik zugehörigen Weierstrass'schen Normalform des hyperelliptischen Gebildes.

Abschnitt XVI handelt von den Invarianten der Gruppe der $a_{ik}$, von welcher die wichtigsten aufgestellt werden, und Abschnitt XVII berührt einige algebraische Fragen.

Abschnitt XVIII endlich schliesst die Untersuchung ab, indem er die Reduction der Gleichung 27. Grades, deren Gruppe mit der des Problemes der $a_{ik}$ isomorph ist, auf dieses Problem durchführt. Wenn nämlich irgend eine Gleichung 27. Grades vorgelegt ist, deren Gruppe zu der der $a_{ik}$ holoedrisch isomorph ist, so zerfallen nach Adjunction einer Wurzel die übrigen 26 in 10+16, von denen die ersteren zur genannten Wurzel conjugirt, die letzteren nicht conjugirt heissen.

Ist $x_i$ eine Wurzel der vorgelegten Gleichung, $C_i$ die Summe der zu ihr conjugirten und $N_i$ die Summe der nicht conjugirten Wurzeln, so sind

$$\xi_i = 4x_i - 2C_i + N_i$$

lineare Functionen von der Art, dass jedes $x_i$ rational durch das entsprechende $\xi_i$ und die genannten Grössen ausdrückbar ist. Damit ist die Lösung jeder solchen Gleichung auf das Problem der $a_{ik}$ oder der $Z$ zurückgeführt. Insbesondere gilt dies von derjenigen Gleichung, von welcher die Bestimmung der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung abhängt. Zwei Lösungen der letzteren sind dabei conjugirt, oder nicht conjugirt, je nachdem sie sich schneidenden oder nicht schneidenden Geraden der Fläche entsprechen. Bm.

H. Burkhardt. Zur Reduction des Problems der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen $p = 2$. Gött. Nachr. 1892. 1-5.

Vorliegende Note schliesst sich an zwei in denselben Nachrichten erschienene Noten des Verfassers an („Ueber eine hyperelliptische Modulargleichung“ 1889 und „Zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen 40. Grades“ 1890, vgl. F. d. M. XXI. 1889. 496. u. XXII. 1890. 177). Die hier behandelten Fragen hat der Verfasser dann eingehend begründet in der Abhandlung: „Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen III.“ Math. Ann. XLI. 313-343, vgl. das vorangehende Referat.

Bm.

E. Pascal. Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di quarto ordine. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 385-390.

Bericht in Abschnitt IX, Capitel 2, D.

E. Pascal. Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni. Annali di Mat. (2) XX. 163-226.

E. Pascal. Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi. (Memoria 2ª.) Annali di Mat. (2) XX. 269-332.

Der Zweck dieser beiden Abhandlungen ist es, die bekannten von Weber, Noether und Frobenius gefundenen Thatsachen aus der

Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte $p=3$ und $p=4$ geometrisch zu verwerten. Hierbei sind für den Verfasser wesentlich diejenigen Methoden und Gesichtspunkte massgebend, welche Hr. F. Klein in seiner Abhandlung zur Theorie der Abel'schen Functionen (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 498) entwickelt hat.

Die erstere Abhandlung beginnt mit einer kurzen Auseinandersetzung des Abel'schen Theorems, des Umkehrungssatzes und der Anwendung dieser Sätze auf die Theorie der Berührungscurven. Nachdem dann der Begriff der Charakteristik, insbesondere der von F. Klein eingeführte Begriff der Elementar- und der Primcharakteristik definirt ist, wird die „Monodromie" der Riemann'schen Fläche vom Geschlecht $p=3$ näher studirt. Hierunter versteht der Verfasser die Aenderung, welche die kanonischen Querschnittsysteme der Riemann'schen Fläche erfahren, wenn man die Coefficienten der algebraischen Gleichung, von irgend welchen Anfangswerten beginnend, durch stetige Variation wieder zu diesen Anfangswerten zurückführt. Der Verfasser bestimmt im Falle $p=3$ den Einfluss dieser Monodromie auf die Charakteristiken und die Systeme von Berührungscurven, insbesondere auf das System der 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung. Nachdem der Verfasser auseinandergesetzt hat, wie Geiser und Hesse die ebene Curve vierter Ordnung mit der Fläche dritter Ordnung und mit dem Netze quadratischer Flächen in Beziehung gesetzt haben, werden die Paare und die Tripel von Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung hinsichtlich ihrer gruppentheoretischen Besonderheiten behandelt. Die letzte Hälfte der Arbeit führt die entsprechende Untersuchung für den Fall des Geschlechtes $p=4$ durch.

Die zweite Abhandlung nimmt die schon in der ersteren begonnene Untersuchung der Fläche dritter Ordnung nach den nämlichen Methoden wieder auf und giebt insbesondere eine ausführliche Darstellung der gruppentheoretischen Eigenschaften des Systems der auf jener Fläche gelegenen 27 Geraden. Ht.

---

F. Klein. Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abel'schen Functionen. Gött. Nachr. 1892. 310-312.

Die Realitätsverhältnisse der ebenen Curven vierter Ordnung und ihrer Doppeltangenten hat Hr. Zeuthen (Math. Ann. VII, F. d. M. VI. 1874. 367) dargelegt; hier geschieht das Entsprechende für die im $R_{p-1}$ gelegene „Normalcurve der $\varphi$“ von der $(2p-2)^{\text{ten}}$ Ordnung und ihre „überall berührenden Ebenen $\Phi$“. Es werden zunächst diasymmetrische Curven mit $\lambda = p, p-1, p-2, \ldots, 1, 0$ und orthosymmetrische Curven mit $\lambda = p+1, p-1, p-3, \ldots$ reellen Zügen unterschieden. Für jeden dieser Fälle wird die Anzahl der reellen $\Phi$ bestimmt und angegeben, wie viele von diesen jedesmal $\mu$ bestimmte Züge je in einer ungeraden Anzahl von Punkten berühren. Ausführliche Darstellung in Math. Ann. XLII. 1. 1893.

Bdt.

---

Albert Wagner. Reihenentwickelung der hyperelliptischen Thetafunctionen, welche zu $f(x) = x^6 + 2Ax^3 + 1$ gehören. Diss. Halle. 8°.

---

## D. Kugel- und verwandte Functionen.

F. W. Dyson. A note on spherical harmonics. Quart. J. XXVI. 30-32.

Ist $U_n$ eine beliebig gegebene ganze homogene Function von $x, y, z$ vom Grade $n$, so kann man in der Reihe

$$V = U_n + r^2 U_{n-2} + r^4 U_{n-4} + \cdots$$
$$(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

die Coefficienten $U_{n-2}$, $U_{n-4}$ etc. stets so bestimmen, dass $V$ der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta^2 V = 0$ genügt. Der Satz wird bewiesen und an Beispielen erläutert.

Wn.

---

G. v. Escherich. Bemerkung zu den Kugelfunctionen. Monatsh. f. Math. III. 198.

Ist $f(x)$ eine reelle Function, die nicht nur selbst zwischen $-1$ und $+1$ integrabel ist, sondern zugleich auch deren Quadrat,

so ist

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt{2n+1} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx = 0.$$

Dieser Satz lässt sich folgendermassen verallgemeinern. Wenn

$$\int_a^b M_k(x) M_n(x) dx$$

für $k \gtrless n$ verschwindet, dagegen für $k = n$ den Wert $\alpha_n$ hat, so ist

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt{\alpha_n} \int_a^b f(x) M_n(x) dx = 0,$$

vorausgesetzt, dass $f(x)$ zwischen den Grenzen $a$ und $b$ die oben erwähnten Eigenschaften besitzt. Wn.

---

F. Caspary. Sur l'application des fonctions sphériques aux nombres de Segner. Belg. Mém. S. É. LII. 15 S.

P. Mansion. Rapport. Belg. Bull. (3) XXIV. 15-20.

Die Segner'sche Zahl

$$T_n = \frac{1.2.3\ldots 2n}{(1.2.3\ldots n)^2} \cdot \frac{1}{n+1},$$

welche angiebt, auf wie viele Arten man ein convexes Polygon von $n+2$ Seiten durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen kann, besitzt merkwürdige Eigenschaften, die von Euler, Lamé, Rodrigues, Binet, Catalan erforscht sind. Der letzte hat Beziehungen zwischen den Zahlen $T_n$ und gewissen Polynomen $P_n(x)$ gefunden. Hr. Caspary hat ermittelt, dass das erste und das letzte Glied von $P_n(x)$ leicht mit Hülfe der Zahlen $T_n$ auszudrücken ist. Vermöge dieser Bemerkung und der F. Neumann'schen Formel

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(u) du}{x-u}$$

über die Kugelfunctionen zweiter Art findet er eine grosse Zahl von Ergebnissen wieder, die ehedem von den oben angeführten Schriftstellern gewonnen waren. Auch neue erhält er, vornehmlich über die Coefficienten von $Q(x)$. Beispiels halber setzen wir eine ziemlich einfache Formel zwischen den Quadraten der Segner'schen

Zahlen her:

$$\sum_{r=0}^{r=n}(4r+1)\frac{(r+1)^2 T_r^2}{4^{2r}} = \left\{\frac{(n+1)(n+2)T_{n+1}}{2^{2n+1}}\right\}^2.$$

Mn. (Lp.)

J. Kleiber. On a class of functions derivable from the complete elliptic integrals, and connected with Legendre's functions. Messenger (2) XXII. 1-44.

In der Differentialgleichung der Legendre'schen Functionen

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}-2x\frac{dP_n}{dx}+n(n+1)P_n=0$$

setze man $x=1-2k^2$ und $n=-\frac{1}{2}$, so erhält man, wie bewiesen wird, die Gleichung, der $K$ genügt, so dass also $K$ als ein besonderer Fall der Legendre'schen Function $P_n$, dem Falle $n=-\frac{1}{2}$ entsprechend, angesehen werden kann. Der Verf. wird so dazu geführt, eine verallgemeinerte Form von $K$ zu betrachten, die der Legendre'schen Gleichung in ihrer allgemeinen Form genügt, und er beschäftigt sich weiter mit den entsprechenden Verallgemeinerungen anderer Grössen aus den elliptischen Functionen, nämlich $G=E-k'^2K$, $I=E-K$, $W=\frac{1}{2}(I+E)$, $H=Ek^2-Ik'^2$, u. a. m. Die Entwickelungen dieser verallgemeinerten Functionen nach Potenzen von $k^2$ und $k'^2-k^2$ werden ermittelt, ebenso die Beziehungen zwischen ihnen, die Differentialgleichungen, denen sie genügen, und andere sie betreffende Resultate. Glr. (Lp.)

E. Catalan. Lettres à quelques mathématiciens. Liège Mém. (2) XVII. 22 S.

Die inhaltsreichsten dieser Briefe, an Hrn. Hermite gerichtet, enthalten Formeln bezüglich der Legendre'schen Polynome $X_n$.

Mn. (Lp.)

E. W. Hobson. The harmonic functions for the elliptic cone. London M. S. Proc. XXIII. 231-240.

Die „Functionen des elliptischen Kegels", deren Untersuchung

in der vorliegenden Arbeit angebahnt wird, sind nichts anderes als Lamé'sche Functionen mit complexem Index. Wie man die eigentlichen Lamé'schen Functionen als Erweiterungen der Kugelfunctionen ansehen kann, so bilden die hier betrachteten Functionen eine Verallgemeinerung der von Mehler (cf. F. d. M. II. 1869 - 1870. 263) eingeführten Kegelfunctionen, die ja ihrerseits Kugelfunctionen mit complexem Index sind.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden die Potentialaufgaben für den elliptischen Kegel. Zur Behandlung derselben führt man an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ elliptische Kugelcoordinaten ein; d. h. man drückt $x$, $y$, $z$ aus durch die Parameter $\mu$, $\nu$ zweier Scharen von confocalen Kegeln zweiten Grades und den Abstand $r$ des betreffenden Punktes von dem gemeinsamen Scheitel jener Kegel. Die auf die neuen Variabeln transformirte Laplace'sche Gleichung $\Delta V = 0$ hat ein particuläres Integral von der Form:

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\sin}{\cos}(p \log r)\, A_p(\mu) B_p(\nu),$$

während $A_p(\mu)$ der Gleichung

$$(2) \qquad (\mu^2-b^2)(\mu^2-c^2)\frac{d^2A}{d\mu^2} + \mu\,(2\mu^2-b^2-c^2)\frac{dA}{d\mu} + [(b^2+c^2)a+(p^2+\tfrac{1}{4})\mu^2]A = 0,$$

$B_p(\nu)$ derselben Gleichung mit $\nu$ als unabhängiger Variable genügt. $b$ und $c$ sind dabei gegebene, $a$ und $p$ weiterhin zu bestimmende Constanten. $A_p(\mu)$ und $B_p(\nu)$ sind die Functionen des elliptischen Kegels; sie können als Lamé'sche Functionen mit dem Index $-\frac{1}{2}+p\sqrt{-1}$ angesehen werden.

Zur Integration der Gleichung (2) wird an Stelle von $\mu$ eine neue Variable $\varphi$ durch die Gleichung

$$(3) \qquad \mu = \sqrt{b^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}$$

eingeführt und das Integral nach Sinus, resp. Cosinus der Vielfachen von $\varphi$ entwickelt. Solche Entwickelungen giebt es, entsprechend den vier Klassen von Lamé'schen Functionen, vier, nämlich nach den Cosinus oder den Sinus der geraden oder der un-

geraden Vielfachen von $\varphi$. Während aber die Reihen für die Lamé'schen Functionen abbrechen, sind die hier auftretenden Reihen unendliche. Damit dieselben convergiren, muss

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} a_n = 0$$

sein, wenn $a_n$ den Coefficienten des $n^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet. Das giebt eine transcendente Gleichung zur Bestimmung der Coefficienten $a$, und zwar hat diese Gleichung unendlich viele, von einander verschiedene reelle Wurzeln, wie sich aus der zwischen je drei auf einander folgenden $a_n$ bestehenden Recursionsformel ergiebt. Ob die Bedingung (4) für die Convergenz auch hinreicht, wird nicht untersucht. Auch die Darstellung der Functionen $A$ durch die Reihen kann als eine befriedigende nicht angesehen werden. Für den Rotationskegel, für den $b = c$ ist, gehen die Functionen $A_p(\mu)$ in die Sinus und Cosinus der Vielfachen von $\varphi$ über.

Die Function $B_p(\nu)$ genügt derselben Differentialgleichung wie $A$, nur liegt $\nu^2$ zwischen 0 und $b^2$, während $\mu^2$ zwischen $b^2$ und $c^2 (> b^2)$ lag. Das Integral der Gleichung für $B$ lässt sich daher in eine nach Potenzen von $\frac{\nu}{b}$ fortschreitende Reihe entwickeln. Diese Reihe, die nicht näher untersucht wird, geht für den Fall eines Rotationskegels in die Mehler'sche Kegelfunction über.

Zum Schluss wird gezeigt, wie man bei der Entwickelung einer Function $f(\mu)$ in eine nach den Functionen $A$ fortschreitende Reihe die Coefficienten bestimmt. Unter welchen Bedingungen die Entwickelung möglich ist, wird nicht erörtert. Endlich wird die Reihe aufgestellt, in welche sich das Potential für den Aussen- und Innenraum eines Kegels entwickeln lässt.

Eine genauere Untersuchung der Functionen des elliptischen Kegels bleibt erwünscht; die Arbeit des Herrn Hobson hat diese Untersuchung nur angebahnt. Wn.

---

de Ball. Ableitung einiger Formeln aus der Theorie der Bessel'schen Functionen. Astron. Nachr. CXXVIII. Nr. 3049. 1-4.

Es werden die Bessel'schen Functionen durch die Formel:

$$J_i(x) = \frac{(\frac{1}{2}x)^i}{1.2\ldots i} F\left[k, k+i, i+1, -\left(\frac{x}{2k}\right)^2\right] \quad \text{für} \quad k = \infty$$

definirt und als Grenzfälle der Laplace'schen Coefficienten betrachtet, welche durch die Formel:

$$\tfrac{1}{2}P_s^i(\alpha) = \frac{s.(s+1)\ldots(s+i-1)}{1.2\ldots i}\alpha^i F(s, s+i, i+1, \alpha^2)$$

gegeben sind. Man hat nämlich in der letzten Gleichung $k$ nur an Stelle von $s$ und dann $\sqrt{-1}\cdot\frac{x}{2k}$ an Stelle von $\alpha$ zu setzen, dann $\lim k = \infty$ zu nehmen, um sofort die Gleichung

$$J_i(x) = \frac{1}{2(\sqrt{-1})^i}\cdot P_s^i(\alpha)$$

zu ermitteln. Deshalb ergeben sich, wie weiter gezeigt wird, die Haupteigenschaften der Bessel'schen Functionen auch leicht aus den entsprechenden Eigenschaften der Laplace'schen Coefficienten.

Dz.

---

G. v. Escherich. Ueber eine Näherungsformel. Monatsh. f. Math. III. 234.

Die bekannte, für grosse Werte von $x$ geltende Näherungsformel

$$J_0(x) = \frac{A\sin x + B\cos x}{\sqrt{x}}$$

lässt sich aus dem Bessel'schen Integral für $J_0(x)$ durch Einführung einer neuen Integrationsvariable ableiten. Diese Ableitung ist nicht neu; vgl. z. B. Lommel, Studien über Bessel'sche Functionen S. 59 ff.

Wn.

---

M. Bôcher. On Bessel's functions of the second kind. Annals of Math. VI. 85-90.

Der Verfasser reproducirt zunächst ein von Hankel (Math. Ann. I, cf. F. d. M. II. 1869-1870. 257) abgeleitetes Resultat, das er für wenig bekannt hält, in modificirter Darstellung. Er zeigt

nämlich, dass man für ganzzahlige Werte des Index $n$, für welche $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ist, ein von $J_n(x)$ unabhängiges particuläres Integral der Bessel'schen Differentialgleichung durch Betrachtung der Function

$$K_n(x) = \lim_{\Delta n = 0} \frac{(-1)^n J_{-n+\Delta n}(x) - J_{n-\Delta n}(x)}{2\Delta n}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial J_n(x)}{\partial n} + (-1)^{n+1}\frac{\partial J_{-n}(x)}{\partial n}\right]$$

erhält. Die daraus folgende Reihe für $K_n(x)$ stimmt mit der Hankel'schen Reihe für $Y_n(x)$ bis auf den Factor $\frac{1}{2}$ überein. Letzterer war hier hinzuzufügen, da nach Hankels Definition $Y_n(x) = 2K_n(x)$ ist.

Weiter wird die Convergenz der Reihe für $K_n(x)$ untersucht und gezeigt, dass aus der obigen Definition sich für $K_n(x)$ dieselben Recursionsformeln (relationes inter functiones contiguas) ergeben, die für die $J_n(x)$ gelten.

Ferner wird noch die Reihe für die Function

$$[K_n(x)] = K_n(x) + J_n(x)[-\lg 2 + \psi(1)]$$

aufgestellt, wo $\psi(x)$ die logarithmische Ableitung von $\Gamma(x)$ bezeichnet. Endlich wird die C. Neumann'sche Reihe für $K_n(x) - J_n(x)\log x$, die nach Bessel'schen Functionen $J_p(x)$ mit variablem $p$ fortschreitet, kurz erwähnt. Wn.

---

E. Meissel. Ueber die absoluten Maxima der Bessel'schen Functionen. Pr. (No. 289) Oberrealsch. Kiel. 11 S. 4°.

Der Verfasser entwickelt die Bessel'sche Function $J_n(n)$, bei der das Argument gleich dem Index $n$, letzterer aber ganzzahlig ist, in eine nach fallenden Potenzen von $n$ fortschreitende Reihe. Die Reihe, welche nur ungerade Potenzen von $n^{-\frac{1}{3}}$ enthält und weiterhin kurz mit $u_n$ bezeichnet wird, ergiebt sich, wenn man in dem Bessel'schen Integral

$$J_n(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\varphi - n\sin\varphi)\,d\varphi$$

für $\varphi - \sin\varphi$ eine neue Integrationsvariable einführt. In analoger

Weise lässt sich $J_{n-1}(n) - J_n(n)$ in eine Reihe $v_n$ entwickeln, die nach geraden Potenzen von $n^{-\frac{1}{3}}$ fortschreitet. Aus den genannten Reihen kann man dann mittels der bekannten Recursionsformel der Bessel'schen Functionen eine Reihe für $J_{n-s}(n)$ ableiten, wo $s$ eine beliebige ganze Zahl ist.

In der so erhaltenen Reihe wird nun $s = \mu\sqrt[3]{n}$ gesetzt. Dann nimmt dieselbe die Form an:

$$(1) \qquad J_h(n) = u_n[f(\mu) + f_2(\mu)n^{-\frac{2}{3}} + f_3(\mu)n^{-\frac{4}{3}} + \cdots] \\ + v_n\sqrt[3]{n}[\varphi(\mu) + \varphi_2(\mu)n^{-\frac{2}{3}} + \varphi_3(\mu)n^{-\frac{4}{3}} + \cdots], \\ (h = n - \mu\sqrt[3]{n});$$

und es lässt sich zeigen, dass alle Coefficienten $f_m(\mu)$, $\varphi_m(\mu)$ sich durch $f(\mu)$, $\varphi(\mu)$ und deren erste Ableitungen darstellen lassen. Mit Hülfe dieser Darstellung lässt sich die Gleichung (1) bei Beschränkung auf die drei ersten Hauptglieder in folgende Form bringen:

$$(2) \qquad \sqrt[3]{n}\,J_h(n) = (1 + \tfrac{2}{15}\mu n^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{13}{315}\mu^2 n^{-\frac{4}{3}})\,[Af(v) + B\varphi(v)], \\ (h = n - \mu\sqrt[3]{n}).$$

Darin ist

$$(3) \qquad v = \mu + \tfrac{1}{30}\mu^2 n^{-\frac{2}{3}} + (\tfrac{8}{1575}\mu^3 - \tfrac{1}{70})n^{-\frac{4}{3}} + \cdots;$$

$f(v)$ und $\varphi(v)$ sind gewisse, nach steigenden Potenzen von $v$ fortschreitende Reihen, $A$ und $B$ numerische Coefficienten.

Die Reihe (2), die ihrer Ableitung nach nur für den Fall gilt, dass $n$ sowohl als $\mu\sqrt[3]{n}$ ganze Zahlen sind, wendet der Verfasser ohne irgend welche Begründung auf beliebige Werte von $\mu$ an. Er sucht die kleinste Wurzel der Gleichung

$$Af(v) + B\varphi(v) = 0,$$

bestimmt mittels der Formel (3) den zugehörigen Wert $\mu_0$ von $\mu$ und schliesst dann: „Daher geht die Bessel'sche Function $J_h(n)$ bei abnehmendem[*]) $h$ zum letzten Male für $h = n - \mu_0\sqrt[3]{n}$ vom Ne-

*) Im Texte steht fälschlich „wachsendem" statt „abnehmendem" $h$.

gativen zum Positiven durch die Nullgrenze, wächst dann bis zum absoluten Maximum und nimmt später immer schneller ab, ohne jemals wieder negativ zu werden." Referent kann diesen Schluss nicht als berechtigt anerkennen, weil dabei auf die beschränkende Voraussetzung, unter der die Formel (2) bewiesen ist, keine Rücksicht genommen ist. Derselbe Einwand lässt sich gegen die dann folgende Berechnung der Grösse des absoluten Maximums der Function $J_h(n)$ für $h = n - \mu\sqrt[3]{n}$ erheben. Die hohe Bedeutung, welche der Verfasser den in (2) auftretenden Functionen $f(v)$, $\varphi(v)$ für die Theorie der Bessel'schen Functionen beimisst, vermag Referent nach dem Gesagten vorläufig nicht anzuerkennen.

Erwähnt werden mag noch, dass der Verfasser nicht die im vorstehenden Referate angewandte, jetzt allgemein übliche Bezeichnung der Bessel'schen Functionen, sondern die ursprüngliche Bessel'sche Schreibweise benutzt. Wn.

---

W. Kapteyn. Nouvelles formules pour représenter la fonction $J_{n-\frac{1}{2}}(x)$ de Bessel. Darboux Bull. (2) XVI. 41-44.

Die neuen Formeln, in denen $n$ eine ganze Zahl $>0$ vorstellt, sind:

$$(1)\qquad J_{n-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2+\frac{x^2}{4\alpha^2}}\frac{d\alpha}{\alpha^{2n}},$$

$$(2)\qquad J_{n-\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \cos x.$$

Die Formel (1) wird durch Entwickelung des darin auftretenden Integrals nach Potenzen von $x$ abgeleitet, die Coefficienten dieser Entwickelung sind Integrale von der Form

$$(3)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2}\frac{d\alpha}{\alpha^{2n}} = \frac{(-1)^n\pi}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}.$$

Dabei hat der Verfasser übersehen, dass das auf der linken Seite von (3) stehende Integral [dasselbe ist das Integral für $\Gamma(-n+\frac{1}{2})$] keinen Sinn hat, wenigstens bei reellem Integrationswege. Dasselbe gilt von dem Integral der Formel (1). Eine der-

artige Darstellung von $J_{n-\frac{1}{2}}(x)$ kann daher nicht als legitim angesehen werden. Die zweite Formel wird mit Hülfe der Differentialgleichung abgeleitet, der $J_{n-\frac{1}{2}}(x) : x^{n-\frac{1}{2}}$ genügt. Es lässt sich nämlich zeigen, dass das allgemeine Integral dieser Gleichung die Form hat:

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n (A \cos x + B \sin x);$$

und es bleibt nur übrig, die Constanten $A$ und $B$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck (4) gerade $J_{n-\frac{1}{2}}(x) : x^{n-\frac{1}{2}}$ darstellt. Die Formel (2) geht nach Ausführung der angedeuteten Operationen in eine von Lommel aufgestellte Formel über (vgl. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, Leipzig 1868, S. 54). Wn.

---

M. Bôcher. On some applications of Bessel's functions with pure imaginary index. Annals of Math. VI. 137-160.

Die allgemeinste Aufgabe der Potentialtheorie, bei der Bessel'sche Functionen auftreten, ist die folgende: Ein Raum sei begrenzt durch zwei coaxiale Rotationscylinder $r = r_1$, $r = r_2$, zwei durch die Rotationsaxe gelegte Ebenen $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$, endlich durch zwei zu jener Axe senkrechte Ebenen $z = 0$, $z = z_0$ ($r$, $\varphi$, $z$ sind cylindrische Coordinaten). Gesucht wird eine Function $V$, die innerhalb jenes Raumes der Laplace'schen Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, die ferner nebst ihren Ableitungen endlich, continuirlich und eindeutig ist, und die an der Oberfläche jenes Raumes beliebig gegebene Werte annehmen soll. Die Aufgabe zerfällt in sechs andere, nämlich in die Bestimmung solcher Functionen $V$, die nur an je einer der Grenzflächen beliebig gegebene Werte annehmen, an den fünf anderen Flächen aber verschwinden. Offenbar sind je zwei dieser sechs Teilaufgaben wesentlich identisch; es handelt sich daher um folgende drei verschiedene Aufgaben:

1) Die Ausnahmefläche (d. i. die, an der $V$ nicht verschwindet) ist $z = z_0$,

2) die Ausnahmefläche ist $r = r_2$,

3) jene Fläche ist $\varphi = \varphi_0$.

Die erste dieser Aufgaben führt, wie bekannt ist, auf folgende,

aus Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art zusammengesetzte Function:

$$(1) \qquad E_n(kr) = J_{-n}(kr_1) J_n(kr) - J_n(kr_1) J_{-n}(kr).$$

Dabei ist der Index $n = \frac{\nu\pi}{\varphi_0}$, $\nu$ eine ganze Zahl, $k$ eine Wurzel der transcendenten Gleichung $E_n(kr_2) = 0$. Ist $n$ selbst eine ganze Zahl, so tritt an Stelle von $J_{-n}(kr)$ die Function $K_n(kr)$.

Bei der zweiten Aufgabe ist der Index der Bessel'schen Function genau derselbe wie bei der ersten $n = \left(\frac{\nu\pi}{\varphi_0}\right)$, nur das Argument ist rein imaginär; d. h. in (1) ist an Stelle von $kr$ zu setzen $\frac{ik\pi}{z_0} r$, wo $k$ eine ganze Zahl ist.

Die dritte der obigen Aufgaben endlich, die für den Fall voller cylindrischer Röhren oder voller Cylinder (d. h. für $\varphi_0 = 2\pi$) fortfällt, führt auf Bessel'sche Functionen, bei denen Argument und Index rein imaginär sind. Es ist hier nicht zweckmässig, die Functionen $J_n$ und $J_{-n}$ zu betrachten, sondern die linearen Verbindungen

$$(2) \quad H_n(x) = \tfrac{1}{2}[\{J_n(x)\} + \{J_{-n}(x)\}], \; I_n(x) = \frac{1}{2i}[\{J_n(x)\} - \{J_{-n}(x)\}],$$

wo $\{J_n(x)\}$ und $\{J_{-n}(x)\}$ aus $J_n(x)$, resp. $J_{-n}(x)$ dadurch hervorgehen, dass man den constanten Factor fortlässt, der niedrigsten Potenz also den Factor 1 giebt. Erteilt man in den durch (2) definirten Functionen sowohl dem Index $n$, als dem Argumente $k$ rein imaginäre Werte, so lassen sie sich folgendermassen darstellen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \overline{H}_{i\nu}(iz) = \cos(\nu \log z) \,.\, S_1(iz) + \sin(\nu \log z) \,.\, S_2(iz), \\ \overline{I}_{i\nu}(iz) = -\cos(\nu \log z) \,.\, S_2(iz) + \sin(\nu \log z) \,.\, S_1(iz). \end{cases}$$

Darin sind $S_1$ und $S_2$ gewisse, nach steigenden Potenzen von $z^2$ fortschreitende Reihen, deren Mitteilung hier zu weit führen würde.

Bei der Potentialaufgabe tritt nun folgende Verbindung der beiden Functionen $\overline{H}$ und $\overline{I}$ auf:

$$(4) \qquad E_{i\nu}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0} r\right) = \overline{I}_{i\nu}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0} r_1\right) \overline{H}_{i\nu}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0} r\right) - \overline{H}_{i\nu}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0} r_1\right) \overline{I}_{i\nu}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0} r\right).$$

Darin ist $\varkappa$ eine ganze Zahl, während $\nu$ eine Wurzel der transcendenten Gleichung

$$(5)\qquad E_{i\nu}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0}r_2\right)=0$$

ist. Bezeichnet man die Wurzeln dieser Gleichung, die, wie weiterhin gezeigt wird, sämtlich reell sind, und deren unendlich viele existiren, mit $\nu_{\varkappa 1}, \nu_{\varkappa 2}, \ldots$, so wird bei der dritten Teilaufgabe die Function $V$ durch folgende Reihe dargestellt, in der sinh den hyperbolischen Sinus bezeichnet:

$$(6)\qquad V=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}C_{\varkappa\mu}\sinh(\nu_{\varkappa\mu}\varphi)\sin\left(\frac{\varkappa\pi z}{z_0}\right)E_{i\nu_{\varkappa\mu}}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0}r\right).$$

Zur vollständigen Lösung jener Aufgabe ist noch erforderlich, eine gegebene Function $f(r,z)$ in eine Reihe der Form

$$(7)\qquad f(r,z)=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}A_{\varkappa\mu}\sin\left(\frac{\pi\varkappa z}{z_0}\right)E_{i\nu_{\varkappa\mu}}\left(\frac{i\varkappa\pi}{z_0}r\right)$$

zu entwickeln. Die Entwickelung gelingt mittels eines Integralsatzes, der, wenn man

$$\frac{\varkappa\pi}{z_0}r=x,\quad \frac{\varkappa\pi}{z_0}r_1=x_1,\quad \frac{\varkappa\pi}{z_0}r_2=x_2$$

setzt, lautet: Es ist

$$(8)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{x}E_{i\nu_p}(i-x)E_{i\nu_q}(i-x)dx=0,$$

falls $\nu_p$ und $\nu_q$ verschiedene Wurzeln der Gleichung $E_{i\nu}(ix_2)=0$ sind. Die Convergenz der auftretenden Reihen wird nicht untersucht. Bemerkt werden mag noch, dass die Ableitung des vorher erwähnten Satzes über die Wurzeln der Gleichung $E_{i\nu}(ix_2)=0$ sich auf die Betrachtung der Fläche

$$y=E_{i\nu}(ix)$$

stützt, wobei $\nu$ und $x$ als unabhängige Variabeln anzusehen sind.

Der Fall $r_1=0$, in dem die innere Cylinderfläche in die Axe übergeht, bildet einen Ausnahmefall. Während nämlich für $r_1>0$ die Function $E_{i\nu}\left(\frac{i\pi\varkappa}{z_0}r\right)$ die Eigenschaft hatte, für $r=r_1$ von selbst zu verschwinden, ist es nicht mehr möglich, $r$ so zu bestimmen, dass $E_{i\nu}(ix)$ für $x=0$ verschwindet. Aber das Verschwinden von $E_{i\nu}(ix)$ für $x=0$ ist in dem in Rede stehenden

Falle auch nicht nötig, da $x = 0$ keine Fläche, sondern nur eine Linie darstellt. Es ist daher nur erforderlich, dass $E_{i\nu}(ix)$ eine solche Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung ist, die für $x = 0$ nicht unendlich wird. Dieser Bedingung aber genügen alle reellen Werte von $\nu$. Somit verwandelt sich in diesem Falle die innere Summation in (6) in eine Integration nach $\nu$ mit den Grenzen 0 und $\infty$. Aehnliches tritt bei der ersten Teilaufgabe ein, wenn der Radius $r_2$ unendlich gross wird.

Zum Schluss wird noch der Fall betrachtet, in dem der Index der Bessel'schen Function rein imaginär, das Argument aber reell ist. Derartige Functionen $E_{i\nu}(x)$ treten bei folgender Aufgabe der mathematischen Physik auf: Gegeben ist eine ebene Fläche, begrenzt von zwei concentrischen Kreisen und von zwei Radien dieser Kreise. Es soll eine Function $u$ bestimmt werden, die innerhalb jener Fläche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

genügt, die ferner endlich, continuirlich und einwertig ist, und die endlich an den Grenzen jener Fläche gegebene Werte annimmt. Von der Function $E_{i\nu}(x)$ gelten ähnliche Sätze, wie sie oben von $E_{i\nu}(ix)$ angeführt sind. Wn.

# Achter Abschnitt.

## Reine, elementare und synthetische Geometrie.

### Capitel 1.

### Principien der Geometrie.

G. Veronese. Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più spezie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Padova. Tipografia del seminario. XLVIII + 628 S. (1891.)

G. Veronese. Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Mit Genehmigung des Verfassers und nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von A. Schepp. Leipzig. B. G. Teubner. (1894.) XLVI + 710 S.

G. Peano. Lettera aperta al Prof. G. Veronese. Rivista di Mat. I. 267-269.

G. Veronese. A proposito di una lettera aperta del prof. Peano. Palermo Rend. VI. 42-47.

G. Peano. Breve replica al prof. Veronese. Palermo Rend. VI. 160.

Das Veronese'sche Buch zerfällt in eine seine grössere Hälfte in Anspruch nehmende Einleitung und in zwei Teile. In ersterer behandelt der Verfasser die Fundamentalsätze über die abstracten

mathematischen Formen; im ersten Teile werden die Gerade, die Ebene und der Raum von drei Dimensionen im allgemeinen Raum behandelt, im zweiten Teil der Raum von vier und $n$ Dimensionen im allgemeinen Raum. In einem beigefügten Anhang befinden sich historisch-kritische Untersuchungen über die Principien der Geometrie und Noten über das Projiciren und Schneiden im Raume von $n$ Dimensionen, die Bewegung ohne Deformation, die Definition des Winkels und das actual Unendlichgrosse und -kleine.

Allen bisherigen geometrischen Systemen ist wohl das eine gemeinsam, dass der Begriff des Parallelismus den der Ebene voraussetzt. Bei dem hier vorliegenden Buche ist dies nicht der Fall; es wird der Satz von der Ebene und ihren $\infty^2$ sich paarweise schneidenden Geraden aus Sätzen über parallele Geraden abgeleitet. Freilich ist wohl die Zahl der Mathematiker eine sehr geringe, welche die Existenz des actual Unendlichgrossen und -kleinen anerkennen, und gerade in der ausgiebigen Benutzung eines derartigen Hülfsmittels besteht die Besonderheit der von Herrn Veronese befolgten Methode. Zu der Annahme unendlich kleiner Grössen hat ihn die Wahrnehmung geführt, dass der Teilung, z. B. eines feinen Striches, der ein Geradenstück mit grösserer oder geringerer Genauigkeit veranschaulicht, eine Grenze gesetzt ist, wie fein wir auch die Teilungsinstrumente gestalten. Demnach muss es auf der Geraden, allerdings jenseits des praktisch Wahrnehmbaren ein Unteilbares geben, das aber nicht durch den Punkt repräsentirt ist, der vielmehr nur als Grenzmarke zweier Segmente zu deuten ist. Zur mathematischen Auffassung derartiger Betrachtungen setzt der Verfasser die Existenz einer „Grundform“ voraus. Dieselbe ist ein „in der Position seiner Teile identisches System erster Dimension“. (Hyp. I und II § 71). Unter Form im allgemeinen ist hierbei eine aus einem Grundelement nach bestimmten Gesetzen abgeleitete geordnete Gruppe von Elementen zu verstehen. Eine durch eine beliebige Reihe von Elementen und die umgekehrte Reihe gegebene Form heisst ein System von der ersten Dimension, wenn die Ordnung der Elemente von einem bestimmten an ein gegebenes Merkmal der Form ist. Ein Segment eines Systems erster Dimension besteht aus zwei Elementen $A$, $B$ und

den zwischengeordneten Elementen; es heisst unteilbar, wenn es nur $A$ und $B$ selbst enthält. In jedem System sind zwei Richtungen durch das Constructionsgesetz, nach welchem man aus einem Element das folgende ableitet, und durch die Umkehrung dieses Gesetzes gegeben. Das System ist in einer Richtung „homogen“, wenn zu jedem in dieser Richtung liegenden Segment $AB$ zwei Segmente derselben Richtung identisch sind, von denen bei einem beliebig gegebenen Element das eine endet, das andere anfängt. Das System ist dann auch in der anderen Richtung homogen. Es kann entweder geschlossen oder offen sein. Im ersten Fall können alle Elemente in ein Segment eingeordnet werden, das bei einem beliebigen Element anfängt und endet. Im letzteren Fall ist das System nach beiden Seiten unbegrenzt. Endlich heisst das System in der Position seiner Teile identisch, wenn es homogen ist und jedem Segment ein ihm identisches in der entgegengesetzten Richtung entspricht, das ein beliebiges Anfangselement besitzt. Hieraus folgt keineswegs, dass ein Segment $(A \dots A^{(s)})$ mit dem entgegengesetzten $(A^{(s)} \dots A)$ identisch ist. Zunächst gilt dies nur für die Segmente, die in eine endliche Anzahl unteilbarer Segmente zerfallen. Erst später wird das Gesetz aus Hyp. VI und VIII abgeleitet. Für die Identität wird hier nur ganz im allgemeinen gefordert, dass die beiden zu vergleichenden Dinge demselben Begriffe entsprechen. Bei der durch Hyp. I als bestehend vorausgesetzten Grundform soll ohne weiteres feststehen, was unter identischen Segmenten zu verstehen sei, bei anderen Formen sind Vergleichungen aus ihrer Beziehung zur Grundform zu entnehmen.

Trifft man die Uebereinkunft, dass die Elemente zweier angrenzenden Segmente sich zu einer Gesamt-Vorstellung in der Art zusammenfassen lassen, dass das gemeinsame Element nur einmal aufgenommen wird, so hat man den Begriff der Summe zweier Segmente mit den Gesetzen, die für die Addition der Strecken auf der Geraden gelten, und im Zusammenhang damit die Definitionen für die Begriffe grösser und kleiner.

Ferner erhält man auf Grund einer derartigen Uebereinkunft das Gebiet einer „Scala“ mit dem Anfangselement $A_1$ und einer

zu dem beliebigen Segment $AB$ identischen Einheit, wenn man die Elemente der mit $AB$ identischen und in derselben Richtung liegenden Segmente $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$ etc. zu einer Gesamtvorstellung vereinigt. Die Gebiete zweier Scalen sind gleich, wenn für ihre Einheiten $AB$ und $CD$ das von Stolz sogenannte Axiom V des Archimedes gilt, nämlich entweder

$$AB < CD, \qquad mAB > CD$$

oder

$$AB > CD, \qquad AB < mCD$$

ist, wobei $m$ eine ganze Zahl bedeutet. Haben nämlich die Scalen den Anfangspunkt gemeinsam, so liegt jedes Element des einen Scalengebietes auch im Gebiete der anderen Scala. Andererseits müssen Scalengebiete mit verschiedenen Anfangselementen, aber identischen Einheiten als identisch betrachtet werden. Allerdings ist nur durch die Annahme, dass gegen das Scalengebiet jedes ihm angehörige Segment $AC$ zu „vernachlässigen“ sei, der Widerspruch zu beseitigen, dass zwei Scalengebiete gleich sein können, während das eine ein Teil des anderen ist, nämlich seinen Anfangspunkt im ersten Scalengebiet hat. Für die Mehrzahl der Mathematiker wird wohl ein derartiger Widerspruch nicht entstehen, weil sie das Scalengebiet als unbegrenzt und mithin den Regeln der Vergleichung entzogen betrachten werden. Der Verfasser aber hält dasselbe für begrenzt und nimmt (Hyp. III, § 82) ferner an, dass es auf der Grundform unendlich ferne Elemente $B_\infty$ ausserhalb des Scalengebiets gebe. Das von $B_\infty$ aus mit der Einheit $A_2A_1$, also in negativer Richtung, construirte Scalengebiet hat kein Element mit dem Gebiet der ersten Scala gemein. In Hypothese IV wird angenommen, dass zwischen beiden Gebieten andere Elemente $X$ sich befinden, sodass für solche Elemente sowohl $AX$ als $XB_\infty$ unendlich gross gegen die Einheit der Scala sind. Alle diese Segmente $AX$ sollen aber gegen einander endlich sein, d. h. dem Axiom V des Archimedes unterliegen. Ordnet man den Punkten der Scala die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... zu, so sind hiermit selbstverständlich unendlich grosse Zahlen als bestehend vorausgesetzt. Bezeichnet man eines der unendlich grossen

Segmente $AX$ mit $\infty_1$, so ist genau bestimmt, was man unter $\infty_1+1$, $\infty_1+2$, $\infty_1+3, \ldots, 2\infty_1$, $2\infty_1+1, \ldots, 3\infty_1$, $3\infty_1+1, \ldots$ zu verstehen hat. In Bezug auf die endliche Einheit der Scala sind alle Segmente $AX$ einander gleich, nämlich unendlich gross, und es ist, falls $\beta$ eine unendlich grosse, $\gamma$ eine endliche Zahl ist, sowohl $\beta+\gamma$ als auch $\gamma+\beta$ gleich $\beta$. Hierin unterscheidet sich Herrn Veronese's Theorie von derjenigen des Herrn Cantor. Bei Herrn Cantor ist bekanntlich für eine transfinite Zahl $(\omega)$ $1+\omega=\omega$, hingegen $\omega+1$ von $\omega$ verschieden. Auf diese Differenz geht Herr Veronese näher im Abschnitte VI, 3 der Einleitung ein.

Ausserhalb des Gebiets der Scala mit der Einheit $AX$ findet man nun in analoger Weise unendlich grosse Segmente zweiter Ordnung. Hat man durch eines von ihnen die Zahl $\infty_1^2$ fixirt, so erhält man ein ganz bestimmtes Segment für jede Zahl von der Form

$$n_2\infty_1^2+n_1\infty_1+n,$$

wobei $n$, $n_1$, $n_2$ beliebige ganze Zahlen sind. Dies Verfahren kann man beliebig oft wiederholen, auch, wie wenigstens Herr Veronese in Hypothese V voraussetzt, so oft als eine schon gebildete unendlich grosse Zahl angiebt. Man kommt dann nach den Zahlen $\infty^n$ zunächst auf unendlich grosse Zahlen von der Einheit $\infty^{\infty^n}$, $\infty^{\infty^{\infty^n}}$ etc. In Bezug auf eine Einheit sind zwei Segmente, bezw. Zahlen einander gleich, wenn sie beide unendlich gross oder unendlich klein gegen sie sind; sind sie gegen die Einheit endlich, so muss ihre Differenz gegen dieselbe unendlich klein sein. Im absoluten Sinne einander gleich sind sie nur dann, wenn ihre Differenz in Bezug auf jede Einheit, das heisst absolut unendlich klein ist. Die Gesetze, denen die unendlich grossen Zahlen unterworfen sind, werden im Abschnitte VI, 5 der Einleitung untersucht.

Ein Segment wird in Bezug auf eine Einheit unbegrenzt klein, wenn es kleiner wird, als jedes endliche Segment; das unbegrenzt kleine ist aber von dem unendlich kleinen zu unterscheiden. Die Hypothese VI drückt aus, dass jedes „endliche“ Segment, dessen Enden stets in entgegengesetzten Richtungen variiren, und welches unbegrenzt klein wird, ein von seinen Enden verschiedenes Ele-

ment enthält. Die Grundform heisst nun in Bezug auf die endliche Einheit stetig. Wer sich auf den Standpunkt des actual Unendlichkleinen nicht zu stellen vermag, wird hierin nicht mehr und nicht weniger erblicken können als die Einführung des Cantor'schen Axioms von dem Grenzpunkt, welches bei der Begründung der analytischen Geometrie vom projectivischen Gesichtspunkt aus von so grosser Wichtigkeit wird. Herr Veronese folgert aus seiner Hypothese, dass jedes endliche Segment in eine gegebene endliche Anzahl in Bezug auf die Einheit gleicher Segmente zerlegt werden kann. Jedes Element eines endlichen Segmentes kann auf eine Art als Grenzpunkt eines veränderlichen Segments

$$AB\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{4}+\frac{\alpha_3}{8}+\cdots\right),$$

wo die $\alpha_i$ 0 oder 1 sind, in Bezug auf die Einheit dargestellt werden. Daraus folgt, dass in Bezug auf die vorliegende Einheit stets $AB = - BA$ ist. Dass das absolut Unendlichkleine durch eine endliche Zahl von Operationen nicht zu erreichen ist, drückt die Hypothese VII aus, nach der jedes Segment $AB$ Unendlichkleines von derselben Ordnung enthält, wie irgend ein grösseres Segment.

Ein Segment wird im absoluten Sinne unbegrenzt klein, wenn es kleiner wird als ein gegen eine beliebige Einheit endliches Segment. Variiren seine Enden in entgegengesetzten Richtungen, so enthält es nach Hypothese VIII ein von seinen Elementen verschiedenes Element. Mit Hülfe dieser Hypothese wird nun die Teilung eines Segmentes in eine beliebige endliche oder unendlich grosse Anzahl gleicher Teile vorgenommen und jedes Element des Segments $AB$ auf eine Art in der Form

$$AB\left\{\left(\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{4}+\frac{\alpha_3}{8}+\cdots\right)+\frac{1}{\infty_1}\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{4}+\frac{\beta_3}{8}+\cdots\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\infty_1^2}\left(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{4}+\frac{\gamma_3}{8}+\cdots\right)+\cdots\right\}$$

dargestellt, wo die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ 0 oder 1 sind. Nachdem im Anschluss hieran die absoluten und relativen, d. h. gebrochenen, positiven und negativen Zahlen behandelt sind, wird noch (Hypothese IX)

gefordert, dass die Grundform ein in der Position seiner Teile identisches System erster Dimension sein soll, welches durch die geringste Anzahl Elemente bestimmt ist.

Bei dem Axiom I: „Es giebt verschiedene Punkte, alle Punkte sind identisch", mit welchem das erste Buch beginnt, denkt der Verfasser nur im rein abstracten Sinne an Grundelemente, die unter einander identisch sind. Das Ende eines feinen Fadens oder Strichs, ein feiner Bleistifttupf bieten uns mit grosser Annäherung die Punkte der Anschauungswelt und vermitteln uns das Bewusstsein von ihrer Identität. Aus diesen Beobachtungen sind wir berechtigt, das Axiom zu abstrahiren. Figur heisst eine Form, deren Constructionselement der Punkt ist. „Der allgemeine Raum (Def. II, § 2) ist durch ein System von Punkten gegeben, derart, dass wenn eine beliebige seiner Figuren von $n$ Dimensionen in ihm gegeben oder construirt ist, es wenigstens einen anderen Punkt ausserhalb dieser Figur giebt." „Seine nicht beweisbaren Eigenschaften werden teils aus der äusseren Beobachtung, teils aus abstracten Principien abgeleitet, die den Eigenschaften der unserer äusseren Umgebung entsprechenden Figur nicht widersprechen". Eine Figur $n^{\text{ter}}$ Dimension entsteht, wenn man ein System $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension bildet, dessen Constructionselement ein System erster Dimension ist, und alsdann auf das Constructionselement der letzteren zurückgeht.

Dass es für den allgemeinen Raum eines Axioms nicht bedarf, hat nach Herrn Veronese seinen Grund in der Freiheit unseres Gedankens und in der Möglichkeit, jeden neuen Punkt denselben Axiomen und Hypothesen wie die übrigen Punkte zu unterwerfen. Das Axiom II des Verfassers stellt bloss die Existenz des Raumes zweiter Dimension fest, ohne die Existenz der Räume von drei und mehr Dimensionen auszuschliessen. Später bedarf es eines „praktischen" Axioms, um die Zahl der Dimensionen des Anschauungsraums festzustellen. Das Axiom II lautet folgendermassen: IIa. „Es giebt ein in der Position seiner Teile identisches Punktsystem einer Dimension, welches durch zwei seiner Punkte, die verschieden sind, bestimmt wird und stetig ist; dieses Gebilde heisst Gerade". IIb. „Es giebt Punkte ausserhalb jeder Geraden. Jeder

Punkt, welcher nicht der Geraden angehört, bestimmt mit jedem Punkte derselben eine Gerade". Nach Axiom III ist, wenn zwei Gerade den Punkt $A$ gemeinsam haben, zu jedem Segment $AB$ der einen ein Segment $AB'$ der anderen identisch, zu jedem Vielfachen von $AB$ ein Vielfaches von $AB'$. Nach Axiom IV wird, wenn eine Seite eines Dreiecks sich unbegrenzt verkleinert, auch die Differenz der beiden anderen unbegrenzt klein. Aus dem Axiom IIb folgt, dass, sobald ein Punktepaar die Eigenschaft besitzt, eine Gerade nicht zu bestimmen, zu jedem Punkte $A$ wenigstens ein Punkt $B$ dieser Art gehört. Jede von $A$ ausgehende Gerade enthält dann alle Punkte $B$ dieser Art. Sobald daher drei Punkte nicht in einer Geraden liegen, bestimmen je zwei von ihnen eine Gerade, und es entstehen drei geradlinige Segmente, aus denen das Dreieck des Axioms IV besteht.

Eine Gerade kann offen oder geschlossen sein. Nur im letzteren Falle können Punktepaare auftreten, die eine Gerade nicht bestimmen. Es können dies aber nur die entgegengesetzten Punkte der Geraden sein, welche sie in zwei gleiche Segmente zerlegen. Lassen sich durch irgend zwei entgegengesetzte Punkte unendlich viele Geraden legen, so sind alle Geraden geschlossen und identisch; irgend zwei entgegengesetzte Punkte sind unendlich vielen Geraden gemeinsam. Sind zwei Figuren so bezogen, dass irgend zwei Punkte der einen und die entsprechenden der anderen identische Segmente begrenzen, so heissen die Figuren identisch. Axiom V: „Wenn man in zwei beliebigen Strahlenpaaren $AB$, $AC$; $A'B'$, $A'C'$ zwei Punktepaare $B$ und $C$, $B'$ und $C'$ derart auswählt, dass $AB \equiv A'B'$ und $AC \equiv A'C'$ ist, und wenn dann das Segment $BC \equiv B'C'$ ist, so sind die beiden Strahlenpaare identisch". Aus dem Axiom V folgert der Verfasser, dass die Figur, welche $m$ von einem Punkte ausgehende Strahlen bilden, zu der Figur identisch sein müsse, welche die $m$ zugehörigen Scheitelstrahlen bilden. Wir können dem an dieser Stelle nicht beistimmen. Aus den Hypothesen V und VI erst lassen sich unserer Meinung nach Beweise für diesen Satz folgern.

Das Bisherige galt stillschweigend für nur eine Einheit. Die Einführung unendlich kleiner Einheiten geschieht auf Grund der

Hypothese I. Die Gerade ist ein in der Position seiner Teile identisches, stetiges, absolutes und durch zwei verschiedene seiner Punkte bestimmtes Punktsystem einer Dimension. Nach Hypothese II fallen zwei Gerade im absoluten Sinne zusammen, wenn sie das Gebiet bezüglich einer Einheit von einem jeden Punkte als Anfang aus gemeinsam haben.

Trägt man auf allen von einem Punkte $S$ ausgehenden Geraden das Gebiet einer bestimmten Einheit auf, so erhält man das Gebiet der Einheit um den Punkt $S$ im allgemeinen Raum. Nach Hypothese III sollen im endlichen, aus der wahrnehmbaren Einheit entstehenden Gebiet die Axiome IIb, III, IV und V gelten. Ist eine Seite eines Dreiecks unendlich klein gegen die beiden anderen, so sagt man, dass letztere hinsichtlich einer gegen sie endlichen Einheit zusammenfallen. Nach Hypothese IV sind zwei von einem Punkte $S$ ausgehende Geraden hinsichtlich jeder Einheit von einander verschieden, wenn sie in dem endlichen Gebiet um $S$ von einander verschieden sind. Nach der Hypothese V und VI sind die Geraden des allgemeinen Raumes geschlossen, und je zwei entgegengesetzte Punkte sind mit jedem anderen Punkte durch eine Gerade zu verbinden. Alle vollständigen Geraden sind dann im absoluten Sinne einander gleich. Hiermit entscheidet sich also der Verfasser für das positive Krümmungsmass seines allgemeinen Raumes. Indem er ferner die endliche, d. h. wahrnehmbare Einheit als unendlich klein von der ersten Ordnung gegen das Gesamt-Segment der geschlossenen Geraden nimmt, gelangt er für das endliche Gebiet eines Punktes $A$ zu der euklidischen Raumanschauung. Auf einer Geraden sind die endlichen Gebiete um zwei entgegengesetzte Punkte von einander verschieden. Eine Gerade, die zwei entgegengesetzte, in dem verbleibenden Grenzgebiete liegende Punkte $Z_\infty$ und $Z'_\infty$ einer gegebenen Geraden mit einem Punkte $S$ des endlichen Gebietes verbindet, heisst parallel zu der gegebenen Geraden; wenn die beiden Segmente $AZ_\infty$ und $AZ'_\infty$ im absoluten Sinne einander gleich, sogenannte rechte Segmente sind, so heisst die Gerade die absolute Parallele hinsichtlich $A$. Alle Parallelen, die durch einen Punkt zu einer Geraden sich legen lassen, fallen hinsichtlich der unendlich grossen Einheit und nach

Hypothese IV auch hinsichtlich der endlichen Einheit zusammen. In diesem Sinne gilt das Axiom XI des Euklid im endlichen Gebiet.

Die Geraden, die einen festen Punkt $R$ mit den Punkten einer Geraden verbinden, ergeben den Strahlenbüschel $Rr$ und die Punkte einer vollständigen Ebene, die im endlichen Gebiete um $R$ liegenden Punkte, die euklidische Ebene, vorausgesetzt, dass $r$ diesem Gebiet zum Teil angehört. Es besteht nun im letzteren Fall der Satz: Trägt man auf jeder der Geraden, die $R$ mit Punkten $A, B, C, \ldots$ von $r$ verbinden, das betreffende Segment $RA$, $RB$, $RC$, ... nach der entgegengesetzten Seite auf, bis $A'$, $B'$, $C'$, ..., so liegen die erhaltenen Punkte auf einer Parallele zu $r$, und es ist $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ etc. Zieht man zu jeder von zwei sich schneidenden Geraden Parallelen durch die Punkte der anderen, so muss also jede Gerade des einen Systems jede Gerade des andern Systems treffen. Hiermit ist der Begriff des Parallelogramms gegeben. Die gegenüberliegenden Seiten sind in Bezug auf die endliche Einheit einander gleich. Seine Diagonalen und die Verbindungslinien der Mitten gegenüberliegender Seiten treffen sich in einem Punkte. Hieraus folgt, allerdings nur unter Anwendung eines Grenzübergangs, dass eine Gerade, welche zu einer Seite eines Dreiecks im euklidischen Gebiet parallel ist und einen Punkt einer zweiten Seite enthält, auch die dritte Seite trifft. Zieht man durch einen Punkt der euklidischen Ebene Parallelen zu den Geraden des Büschels $Rr$, so liegen sie also völlig in derselben und schneiden die Strahlen des ersten Büschels. Irgend zwei Punkte der Ebene bestimmen mithin eine in ihr liegende Gerade; zwei von diesen Geraden begegnen sich in einem Punkte, der im Absoluten liegt, wenn sie parallel sind. Aus Sätzen über die gleichschenkligen Dreiecke und die „absoluten Grenzsegmente“ (dieselben werden bei zwei Geraden $a, b$ der euklidischen Ebene durch ihre absoluten Grenzpunkte $A_\infty$, $B_\infty$ hinsichtlich ihres Schnittpunkts bestimmt) wird abgeleitet, dass jeder Strahlenbüschel $Rr$ und jeder Parallel-Strahlenbüschel der euklidischen Ebene in der Position seiner Teile identisch ist. Irgend zwei euklidische Ebenen sind mit einander identisch.

Die Geometrie der euklidischen Ebene wird bis zur Kreislehre

verfolgt. Zur vollständigen Ebene geht Herr Veronese auf Grund der Hypothese VI über: Die geradlinige Figur, welche durch zwei beliebige durch den Punkt $S$ gehende Geraden in jedem endlichen Gebiet um $S$ bestimmt wird, bleibt bezüglich der Einheit dieses Gebietes dieselbe, auch wenn man die Punkte in den im Unendlichgrossen oder Unendlichkleinen liegenden Gebieten um denselben Punkt $S$ auf den beiden Geraden in Betracht zieht. Aus dieser Hypothese folgert Herr Veronese zunächst, dass die absoluten Grenzpunkte eines Büschels der euklidischen Ebene hinsichtlich des Centrums eine vollständige Gerade bilden, und ferner, dass zwei Punkte der vollständigen Ebene, die nicht entgegengesetzt sind, eine Gerade der Ebene bestimmen. Wir gestehen, dass wir diesen Schluss nicht für völlig überzeugend halten können. Die Geometrie auf der vollständigen Ebene läuft nun durchaus der sphärischen Trigonometrie parallel. Auch sie ist in sich identisch. Die Lobatschefsky'sche Raumanschauung knüpft (Cap. 3) an die Anschauung an, dass die vollständigen Geraden offen sind. Auch hier muss natürlich in einem unendlich kleinen Gebiete das Axiom XI des Euklid gelten. Eine Ebene und ein Punkt $R$ ausserhalb ergeben nun zunächst den Strahlenbündel oder Stern und, je nachdem man sich auf das endliche Gebiet beschränkt oder nicht, den euklidischen oder den vollständigen Raum. Im ersteren ist das absolute Grenzgebiet hinsichtlich eines beliebigen Punktes eine vollständige Ebene. Zwei, bezw. drei Punkte bestimmen jedenfalls eine Gerade bezw. eine Ebene, die dem Raum angehört. Der Ebenenbüschel ist in jedem Fall ein in der Position seiner Teile identisches System, alle Strahlenbündel des Raumes und folglich alle Räume unter sich sind identisch.

Ganz analoger Weise geschieht dann im Buch II der Uebergang zum Raum vierter und $n^{\text{ter}}$ Dimension. Für das Projiciren und Schneiden folgt als Hauptgesetz, dass zwei vollständige, bezw. euklidische Räume, wenn sie gemeinsame Punkte haben, einen vollständigen, bezw. euklidischen Raum gemeinsam haben, der mindestens von der Dimension $(r_1 + r_2 - r)$ ist, wenn die gegebenen Räume von der $r_1^{\text{ten}}$ bezw. $r_2^{\text{ten}}$ Dimension sind und einem Raume $r^{\text{ter}}$ Dimension angehören.

Um nun aus der abstracten Geometrie des allgemeinen Raumes in den Anschauungsraum zu gelangen, bedarf es zunächst des praktischen Axioms (III), dass der Raum drei Dimensionen hat; ferner setzt das praktische Axiom II, dass im Anschauungsraum Bewegung ohne Deformation möglich ist, einen Identitätszusammenhang voraus, wie wir ihn im vollständigen und euklidischen Raum finden. Machen wir noch das praktische Axiom I, dass in unserem Anschauungsraum mit grosser Annäherung nur eine Parallele (definirt als Grenze) zu einer Geraden sich legen lasse, so kommen wir auf den euklidischen Raum dritter Dimension als den, welcher der Anschauungswelt entspricht.

Die Uebersetzung, die wir auf ausdrücklichen Wunsch des Verfassers der Besprechung mit zu Grunde gelegt haben, haben wir bei dieser Gelegenheit als sorgfältig erkannt. Einige Ausdrücke erschienen uns nicht ganz glücklich gewählt, z. B. Stern und Keil, da wo wir Bündel und Büschel gewünscht hätten. Auch hätte die Bezeichnung „in der Position seiner Teile identisch" wohl besser in der Lage seiner Teile identisch gelautet.

Bekanntlich gestaltet sich die Untersuchung mancher räumlichen Figuren besonders einfach, wenn man sie als Projectionen einer Figur im Raume $n^{\text{ter}}$ Dimension betrachtet. Gegen dies Princip hat Herr Peano anlässlich einer Abhandlung des Herrn Segre protestirt. Herr Veronese, der dieses Princip zuerst durchgreifend angewandt hat, behauptet in einer Note zu Seite 613, dass die Begründung dieses Princips und die Beseitigung der Peano'schen Einwürfe leicht sei. In seiner lettera aperta bittet Herr Peano um genauere Aufklärung sowohl hinsichtlich dieses Punktes, als auch mehrerer abfälliger Bemerkungen, die Herr Veronese über seine Principii della geometria logicamente esposti und Principii dell' aritmetica logicamente esposti in dem besprochenen Buch gemacht hat. In der Entgegnung geht Herr Veronese nur auf den ersteren Punkt näher ein. Er hebt hervor, dass er keineswegs einen mehrdimensionalen Raum jenseits unserer Anschauung als bestehend voraussetze, dass vielmehr sein allgemeiner Raum nur ein abstractes Gebilde unseres inneren Lebens sei, angeregt allerdings durch Beobachtungen an räumlichen Gebilden. Andererseits

betont er indessen, dass ein Raum höherer als der dritten Dimension sehr wohl an räumlichen Dingen hervortreten kann, wenn man bedenkt, dass die als Punkte bezeichneten Grundelemente nur der Bedingung der Identität genügen müssen. So kann man in unserem Raum nach den Grundsätzen der descriptiven Geometrie einen Raum $\Sigma_4$ zur Darstellung bringen, dessen Grundelemente Elementenpaare in bestimmter Abhängigkeit sind. Analogerweise kann man in unserem Raum auch allgemeine Räume $\Sigma_n$ aufbauen, deren Grundelement natürlich nicht der Punkt ist. Wir unsererseits müssen betonen, dass wir die Anwendung des Princips des Projicirens und Schneidens im allgemeinen Raum auf Verhältnisse unseres Raumes nur deshalb für berechtigt halten, weil solche Versinnlichung eines Raumes $n^{\text{ter}}$ Dimension eintreten kann, z. B. noch einfacher, als es bei Herrn Veronese geschieht, durch ein lineares System, dessen Netz dritter Stufe auf unseren Raum collinear bezogen wird.

Herr Peano erklärt sich durch die Ausführungen des Herrn Veronese nicht befriedigt. E. K.

---

S. Lie. Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Leipz. Ber. XLIV. 106-114.

In seinem Werke: Fondamenti di geometria hat Hr. Veronese zwar anerkannt, dass Hr. Lie unter gewissen Voraussetzungen die Ueberflüssigkeit des Helmholtz'schen Monodromieaxioms bewiesen habe, hatte aber hinzugefügt, dass Hr. de Tilly schon früher eine ähnliche Behauptung aufgestellt habe, und dass Hr. F. Klein einen viel einfacheren Beweis für die Ueberflüssigkeit dieses Axioms erbracht habe. Hr. Lie zeigt nun, dass Hr. de Tilly keineswegs eine derartige Behauptung aufgestellt hat, da er die Helmholtz'schen Axiome durch ganz andere ersetzt, ferner, dass auch Hr. F. Klein keineswegs einen wirklichen Beweis für die Ueberflüssigkeit des Monodromieaxioms geliefert hat. Ausserdem wendet sich Hr. Lie noch gegen gewisse Bemerkungen von Hrn. Lindemann. El.

---

S. LIE. Sur les fondements de la géométrie. C. R. CXIV. 461-463.

Die Note bezieht sich auf die bekannte Helmholtz'sche Arbeit über die Grundlagen der Geometrie (Göttinger Nachr. 1868), und ihr Zweck ist, möglichst scharf den Punkt zu bezeichnen, an dem sich Helmholtz in seiner Arbeit geirrt hat. Die Helmholtz'schen Untersuchungen kommen nämlich im Grunde auf die Bestimmung einer sechsgliedrigen Gruppe $G$ in drei Veränderlichen hinaus. Zu dieser Gruppe gehört eine gewisse, verkürzte Gruppe $G'$, die linear ist, und Helmholtz glaubt irrtümlich (so kann man seine Entwickelungen ausdrücken), dass die Gruppe $G'$ seine Axiome erfüllt, sobald $G$ dies thut, und umgekehrt. Wenn aber auch der Helmholtz'sche Beweis nicht stichhaltig ist, so kann man doch seine Axiome so auffassen, dass sein Endergebnis richtig ist.

El.

---

W. KILLING. Ueber die Grundlagen der Geometrie. J. für Math. CIX. 121-186.

Die §§ 1—8 dieser Arbeit enthalten eine ausführliche Darstellung gewisser Untersuchungen, die der Verfasser zum Teil schon in zwei früheren Programmabhandlungen (Brilon 1880 und Braunsberg 1884) skizzirt hat. Auf Grund einer Reihe von Definitionen und Grundsätzen wird der allgemeine Begriff einer Raumform von $n$ Dimensionen abgeleitet; es werden Coordinaten aufgestellt, und schliesslich wird gezeigt, dass die Beweglichkeit einer solchen Raumform in sich durch eine gewisse continuirliche transitive Transformationsgruppe im Lie'schen Sinne charakterisirt werden kann.

Unter den allgemeinen Raumformen werden nun die „eigentlichen“ oder „speciellen“ Raumformen durch den folgenden Grundsatz ausgeschieden: „Bei der Ruhe eines Punktes in einem $n$-dimensionalen Raum wird kein zweiter so bewegt werden können, dass er ein $n$-dimensionales Gebiet ausfüllt; zugleich geht durch den ruhenden Punkt kein Gebilde hindurch, welches notwendig zugleich in Ruhe gehalten oder in sich verschoben wird.“ Hieraus wird geschlossen, dass zwei Punkte gegenüber der Transformationsgruppe der Raumform eine und nur eine Invariante haben.

Der Verfasser nimmt nun die beiden Punkte unendlich benachbart an und bestimmt durch gewisse Betrachtungen, die aber an Strenge sehr viel zu wünschen übrig lassen, die möglichen Bewegungen, die nach Festhaltung eines Punktes von den unendlich benachbarten Punkten noch ausgeführt werden können. Er schliesst daraus, dass (jedenfalls für $n>2$) die Gruppe gerade $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrig ist, und dass sich alle Invarianten von beliebig vielen Punkten durch die Invarianten von Punktepaaren ausdrücken lassen; ausserdem erschliesst er die Existenz eines invarianten Bogenelementes, das durch einen Differentialausdruck zweiten Grades

$$\sum_{ik}^{1,\dots,n} a_{ik}(x_1,\dots,x_n)dx_i dx_k$$

dargestellt wird.

In § 11 wird dieser Differentialausdruck mit Hülfe der Methoden der Herren Christoffel und Lipschitz behandelt, und es wird gezeigt, dass die Gruppe durch Einführung neuer Veränderlicher entweder in die Gruppe der euklidischen oder in eine der beiden Gruppen von nicht-euklidischen Bewegungen übergeführt werden kann, ein Satz, der, nebenbei bemerkt, schon 1885 von Hrn. Lie veröffentlicht worden ist. In § 12 wird dasselbe Ergebnis noch einmal abgeleitet, indem sich der Verfasser auf gewisse gruppentheoretische Sätze von Hrn. Lie und von ihm selbst stützt. Dann folgt eine dritte Ableitung desselben Ergebnisses, die aber nur eine Umgestaltung der Methode ist, die Hr. Lie bei seiner oben erwähnten Veröffentlichung aus dem Jahre 1885 (s. F. d. M. XVII. 1885. 339) benutzt hat; es wird aber weder dies erwähnt, noch überhaupt darauf hingewiesen, dass der ganze Satz, der hier auf drei verschiedene Weisen abgeleitet wird, von Hrn. Lie herrührt. In § 13 wird endlich der früher ausgeschlossene Fall des Raumes von zwei Dimensionen erledigt.

Eigentümlich ist es, dass der beiden grossen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie, die Hr. Lie im Jahre 1890 veröffentlicht hat (s. F. d. M. XXII. 524), mit keinem Worte gedacht wird, obwohl gerade in der ersten dieser Arbeiten das Bogenelement die Hauptrolle spielt. El.

A. Mouchot. Les nouvelles bases de la géométrie supérieure (Géométrie de position). Paris. Gauthier-Villars et Fils. VII + 179 S. 8°. [Schlömilch Z. XXXVIII. Hl. A. 90-95; Darboux Bull. (2) XVI. 237-238.]

Die neuen Grundlagen der Geometrie, welche Hr. Mouchot in dem vorliegenden Buche entwickelt, haben für ihn seit dreissig Jahren den Gegenstand seiner geometrischen Ueberlegungen gebildet. Eine erste Note darüber ist in den C. R. von 1865 (17. Juli) erschienen. Später hat der Verf. ein Buch von genau demselben Umfange wie jetzt bei demselben Verleger erscheinen lassen: La réforme cartésienne étendue aux diverses branches des mathématiques pures. (Paris. Gauthier-Villars et Fils. VII + 179 S. 1876). Zwei in den Jahren 1886 und 1887 in den C. R. veröffentlichte Noten, die aber, für sich genommen, wenig verständlich waren (vergl. die bezüglichen Bemerkungen der Referenten in den F. d. M.), gaben Kunde von der fortgesetzten Beschäftigung des Verfassers mit seinem Gegenstande, und nachdem er in Algier die industrielle Ausnutzung der Sonnenwärme zum Gegenstande langjähriger und Erfolg verheissender Versuche gemacht hatte, ist er jetzt zu seiner alten Liebe zurückgekehrt. Der Grundgedanke, auf welchem alle folgenden Ausführungen beruhen, ist der, dass ein Gebilde aus zwei Punkten $A$, $B$ als ein „imaginärer“ Punkt bezeichnet wird, von welchem $A$ und $B$, in dieser Reihenfolge genommen, die Componenten heissen. Kehrt man die Folge um $(B, A)$, so heisst dieses Gebilde der conjugirte Punkt. Fällt $A$ mit $B$ zusammen, so geht der Punkt $(A, B)$ in den „reellen“ Punkt über. Diese Bestimmungen ermöglichen also, den imaginären Punkt durch zwei anschauliche Elemente darzustellen. Bei der Uebertragung dieser Benennungen auf den Begriff der Geraden wird man naturgemäss dazu geführt, ein „geradliniges Segment“ als aus zwei (in gewöhnlichem Sinne benannten) Strecken $AB$ und $A'B'$ zu definiren, deren Punkte durch die beiden Componenten eines imaginären Punktes durchlaufen werden. Es ist nicht möglich, alle Begriffsbestimmungen des Verfassers hier zu wiederholen, deren Aufbau den Inhalt des Buches ausmacht, und aus denen er seine Folgerungen zieht. Er meint damit erst den Faden des Gedankens

wiedergefunden zu haben, der Descartes bei der Abfassung seiner Geometrie geleitet habe, und der nicht darin zu suchen sei, den Zusammenhang der geometrischen Gebilde durch die Analysis zu beleuchten; sondern vielmehr solle die geometrische Anschauung die Wirrnisse der Analysis ordnen helfen, sie aufklären. Die dargelegten Ideen sollen nach Ansicht des Verfassers alle früheren Versuche zur geometrischen Deutung des Imaginären umfassen. Referent kann dieser Meinung nicht beipflichten; dazu fehlt von vorn herein die Einsicht von der Notwendigkeit der gewählten Darstellung. Und wenn z. B. der reelle Kreis dadurch „ergänzt“ wird, dass man zu ihm alle gleichseitigen Hyperbeln der Ebene hinzunimmt, die je einen Durchmesser des Kreises zur reellen Hauptaxe haben, dass als ein imaginärer Punkt des Kreises je ein Punktepaar einer solchen Hyperbel angesehen wird, das in einem Lote zur Hauptaxe liegt, so ist diese Anschauung einerseits complicirt und nicht gerade mit dem üblichen Begriffe einer Curve als einer $\infty^1$ Mannigfaltigkeit von Punkten in Uebereinstimmung; andererseits braucht man, um dazu zu gelangen, nicht den weiten Aufbau der vorangehenden Begriffe. Der Liebhaber solcher Betrachtungen wird in dem Buche manches Zusagende finden; für denjenigen, der die Wissenschaft nicht ganz von vorn aufbauen will, sondern alle bisher gemachten Versuche zu einer Einheit in der Anschauung verschmelzen möchte, fehlt vor allem der Nachweis des Zusammenhanges mit den bisherigen Leistungen. Die gelegentlichen Bemerkungen bei Uebereinstimmung oder Abweichung einzelner Ergebnisse können den Mangel einer historischen Darstellung nicht ersetzen. Dies lag auch gar nicht in der Absicht des Verfassers, der sein Werk offenbar in völliger Unabhängigkeit von seinen Vorgängern in ganz selbständigem Gedankengange hat zu Ende führen wollen. Lp.

---

G. Tarry. Figuration des solutions imaginaires rencontrées en géométrie ordinaire. Assoc. Franç. Pau. XXI. 132-136.

Wiederholung der Principien der „allgemeinen Geometrie“, über welche in F. d. M. XXI. 1889. 527, XXII. 1890. 544, XXIII.

1891. 537 berichtet ist. Möglichkeit der systematischen Deutung der imaginären Lösungen. Anwendung auf ein Beispiel. Lp.

---

Z. G. de Galdeano. Theoremas, problemas y métodos geométricos. Progreso mat. II. 75-88, 105-108, 195-207, 318-328, 351-354.

In dieser Reihe von Artikeln, welche in den folgenden Jahrgängen des Progreso fortgesetzt werden und später (1895) vom Verf. zu einem Bande unter dem Titel „Geometría general" vereinigt sind, werden die für die geometrischen Forschungen benutzten Methoden unter philosophischen und unter historischen Gesichtspunkten besprochen. Tx. (Lp.)

---

H. Wiener. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie. Deutsche Math. Ver. I. 45-48.

Aus einer beschränkten Zahl von Objecten (z. B. Punkten und Geraden) und Operationen (z. B. Verbinden und Schneiden) lässt sich ein „in sich begründetes" Gebiet der Wissenschaft aufbauen, wobei sich herausstellt, welche anderweitig zu beweisenden Fundamentalsätze oder Axiome noch hinzukommen müssen, damit man jeden Satz mit der kleinsten Anzahl notwendiger Voraussetzungen beweisen kann. Schg.

---

G. Vailati. Sui principi fondamentali della geometria della retta. Rivista di Mat. II. 71-75.

Die Sätze, welche Herr Peano in seinem Werkchen „I principii della geometria logicamente esposti" (F. d. M. XXI. 1889. 524) als Grundsätze angenommen hat, sind die folgenden: I. Die Punkte existiren. II. Ist ein Punkt gegeben, so kann man immer von diesem verschiedene Punkte finden. III. Hat eine (geradlinige) Strecke ihre Enden zusammenfallend, so enthält sie keinen von dem Ende verschiedenen Punkt. IV. Zwei verschiedene Punkte bestimmen immer eine Strecke. V. Eine Strecke ist eine symmetrische Function ihrer Enden. VI. Die Enden einer Strecke sind keine Punkte derselben. VII. Eine Strecke kann über ihre Enden

verlängert werden. VIII. Sind $A$, $B$, $C$, $D$ vier Punkte, und ist $C$ in $AD$ und $B$ in $AC$ gelegen, so enthält $AD$ den Punkt $B$. IX. Sind $B$ und $C$ zwei Punkte der Strecke $AD$, so ist $B$ entweder in der Strecke $AC$ oder in der Strecke $CD$ enthalten. X. Sind $C$ und $D$ zwei Punkte der Verlängerung der Strecke $AB$ über $A$, so fallen sie entweder zusammen, oder $D$ ist in der Strecke $BC$ oder $C$ in der Strecke $BD$ enthalten. XI. Gehört $B$ zur Strecke $AC$ und $C$ zur Strecke $BD$, so wird $C$ in der Strecke $AD$ enthalten sein.

Durch die Wiederaufnahme der Untersuchung der Fragen über die Grundlegung der Geometrie an der Stelle, wohin Hr. Peano sie geführt hatte, gelingt es jetzt Herrn Vailati, jene Principien auf die drei Sätze zurückzuführen, welche als die Ausdrücke der irreducibeln charakteristischen Eigenschaften eines eindimensionalen Raumes angesehen werden können. Um dieselben auszudrücken, führt er ein Symbol $S$ ein, um folgende Beziehung zwischen den Elementen eines gewissen Systems zu bezeichnen: 1) wenn $aSb$ ist, so ist nie $bSa$; 2) wenn gleichzeitig $aSb$ und $bSc$ ist, so ist immer in Folge dessen $aSc$; 3) sind $a$, $b$ zwei getrennte Elemente des Systems, so hat immer eine und nur eine der Beziehungen $aSb$ und $bSa$ statt. Drückt man diese Eigenschaften durch die Symbole der mathematischen Logik aus und verbindet man die so gewonnenen Gleichungen durch die Methode derselben Wissenschaft, so gelangt man zu sieben Gleichungen, welche die Peano'schen Grundsätze einschliessen (der Verf. sieht von den Grundsätzen I, II, III, IV ab, welche für seinen Zweck überflüssig sind), wenn $S$ die Lagenbeziehung darstellt, welche zwischen Punkten einer Geraden statt hat, d. h. die Beziehung, dass der eine von ihnen dem andern folgt oder diesem vorausgeht. La.

---

R. Bettazzi. La definizione di proporzione ed il V libro di Euclide. Periodico di Mat. VII. 16-25, 54-61.

Man besitzt zwei Methoden zur Behandlung der Proportionen in der elementaren Geometrie. Die eine hat ihre Grundlage in der Erklärung, welche Euklid von der Proportion gab; die andere betrachtet eine Proportion als eine Gleichung zwischen zwei Zahl-

verhältnissen. Diese letztere ist nicht rein-geometrisch, jene verwickelt. Um das euklidische Verfahren zu vereinfachen, beginnt der Verf. mit der Erforschung der von ihm „metrisch“ benannten Verwandtschaften zwischen zwei Grössenklassen $A_1, A_2, \dots; B_1, B_2, \dots$. Eine solche Verwandtschaft ist nicht nur eindeutig, sondern von solcher Beschaffenheit, dass die Summe zweier $A$ der Summe der beiden bezüglichen $B$ entspricht. Nimmt man zwei Grössenpaare in den gegebenen Klassen beliebig an ($A_1, A_2$ und $B_1, B_2$), so sagt man, dass $A_1, A_2, B_1, B_2$, in dieser Ordnung genommen, eine Proportion bilden. Auf Grund dieser Erklärung und mit Hülfe der allerersten Eigenschaften der ganzen Zahlen findet der Verf. alle die Eigenschaften wieder, welche Euklid selbst entwickelt hat, und beweist zuletzt, dass die neue Definition mit der alten sich deckt.

La.

---

G. Tarry. Sur les figures équipollentes. Nouv. Ann. (3) XI. 251-259.

Zwei Quadrupel von Punkten $A, B, C, D$ und $A_1, B_1, C_1, D_1$ haben dasselbe anharmonische Verhältnis, wenn zwischen den Seiten, bezw. Winkeln der Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ die Beziehungen bestehen:

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{A_1C_1}{A_1D_1}:\frac{B_1C_1}{B_1D_1};\ CAD-CBD=C_1A_1D_1-C_1B_1D_1.$$

Zwei Figuren heissen direct-äquipollent, wenn es zu vier beliebigen Punkten der einen vier entsprechende Punkte in der andern mit demselben anharmonischen Verhältnisse giebt, invers-äquipollent, wenn eine mit der ersten symmetrisch ähnliche Figur zur zweiten äquipollent ist. Diese Theorie wird weiter ausgeführt und auf die Geometrie der Kugel angewandt.

Schg.

F. Pietzker. Ueber die absolute Geometrie. Hoffmann Z. XXIII. 81-106.

Der Verf. steht auf dem Standpunkte, dass die Geometrie keine Erfahrungswissenschaft ist, und dass die Fundamentalsätze der euklidischen Geometrie das natürliche Ergebnis weniger allgemeiner Principien von aprioristischer Gültigkeit sind. Hierher gehört z. B.

auch der Begriff der „Geraden“ u. s. w. Bei dieser Auffassung muss er, wie dies in seiner Schrift „Ueber die Gestaltung des Raumes“ (F. d. M. XXIII. 1891. 530) ausgeführt ist, den nicht-euklidischen Raumvorstellungen nicht allein die reale, sondern auch die logische Möglichkeit der Existenz absprechen. Da er in der citirten Schrift auf die Klein'sche Auffassung der nicht-euklidischen Geometrie noch nicht eingegangen war, kommt er im obigen Aufsatz hierauf zurück und kritisirt auch die Klein'schen Auffassungen von seinem aprioristischen Standpunkte aus. Sfs.

---

A. Cayley. Non-Euclidian Geometry. Cambr. Transact. XV. 37-61, Cambr. Proc. VII. 35. (Abstract). (1890.)

Der Verfasser betrachtet den dreidimensionalen Raum und gebraucht die Worte Punkt, Linie, Ebene u. s. w. im gewöhnlichen Sinne; nur der Begriff der Distanz wird geändert, indem als absolute Fläche die imaginäre Fläche $x^2+y^2+z^2+w^2=0$ angenommen wird, so dass die abgeleiteten Formeln dem elliptischen Raum angehören. Die Abhandlung hat den Zweck, die allgemeine Theorie systematisch darzustellen und insbesondere die analytischen Formeln zu entwickeln, welche sich auf die beiden auf zwei gegebenen Geraden senkrechten Linien beziehen. Ho.

M. Simon. Ueber das Parallelenaxiom. Deutsche Math. Ver. I. 39, 41.

Stehen zwei Gerade auf einer dritten senkrecht, so geben die Fälle des Schneidens und Nichtschneidens noch je zwei mögliche Unterfälle. Einmaliges Eintreten eines dieser vier Fälle hat seine allgemeine Geltung in je einer der vier Formen des einfach zusammenhängenden Raumes zur Folge. Schg.

M. Simon. Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie. J. für Math. CIX. 187-198.

In dieser Arbeit werden die Hauptsätze der absoluten Trigonometrie (Pythagoras, Sinus- und Cosinussatz, Flächenberechnungen von Dreiecken, Kreisen und Sectoren) auf rein geometrischem Wege

abgeleitet, also ohne Zuhülfenahme der von Bolyai und Lobatschewsky benutzten Grenzfläche. Hieran schliesst sich eine ausführliche Untersuchung über diejenigen Gruppen von geometrischen Sätzen, welche in allen Raumformen erhalten bleiben. Es stellt sich dabei heraus, dass in der absoluten Geometrie die Gerade als im Imaginären geschlossen angesehen werden muss, und dass daher diese Geometrie nicht der Riemann'schen, sondern der Klein'schen Raumform entspricht. Schg.

---

E. Busche. Ueber eine rationale nicht-euklidische Massbestimmung in der Ebene. Hamb. Mitt. III. 37-51.

Bei Zugrundelegung der euklidischen Massbestimmung wird man durch die cartesische analytische Geometrie auf zwei ausgezeichnete Punkte der Ebene geführt, die beiden imaginären unendlich fernen Kreispunkte. Bei der Verallgemeinerung dieser Massbestimmung nach Cayley und Klein tritt an die Stelle der beiden Kreispunkte der absolute Kegelschnitt. Der Verfasser zeigt nun, dass man auch eine Massbestimmung einführen kann, bei der an die Stelle der beiden Kreispunkte ein reeller Punkt der Ebene tritt, dem eine reelle Gerade dual entspricht.

Er giebt zu diesem Zwecke zunächst eine Methode an, durch die ohne Zuhülfenahme einer Längen- oder Winkeleinheit jedem Punkte und jeder Geraden der Ebene zwei reelle Zahlen $x|y$, bezw. $X|Y$ (Coordinaten) so zugeordnet werden, dass eine lineare Gleichung zwischen diesen Coordinaten die Gleichung einer Geraden, bezw. eines Punktes ist. Darauf wird die Entfernung zweier Punkte $x_1|y_1$ und $x_2|y_2$, bezw. der Winkel zwischen zwei Geraden $X_1|Y_1$ und $X_2|Y_2$ definirt durch die Ausdrücke

$$x_2-x_1+y_2-y_1, \quad \text{bezw.} \quad X_2-X_1+Y_2-Y_1.$$

Diese Massbestimmung nennt der Verf. im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Ausdruck $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ für die Entfernung eine rationale nicht-euklidische Massbestimmung. Gerade so wie in der cartesischen Geometrie alle Punkte, die von einem festen Punkte eine gegebene Entfernung haben, auf einer Linie (einem Kreise) liegen, die durch die beiden Kreispunkte geht, so liegen

bei dieser Definition der Entfernung alle Punkte, die von einem festen Punkte eine gegebene Entfernung haben, auf einer Linie (einer Geraden), die durch einen bestimmten Punkt geht. Dieser „absolute“ Punkt, der auf der Geraden mit den Coordinaten 0|0 liegt, ist damit als das Analogon der beiden Kreispunkte charakterisirt. Da bei dieser Massbestimmung der Winkel der Entfernung dual entspricht, so giebt es auch eine dem absoluten Punkte dual entsprechende absolute Gerade mit dual entsprechenden Eigenschaften. Sie geht durch den Punkt 0|0.

Der Verf. wendet in dem letzten Teil seiner Arbeit die von ihm definirten Massbegriffe an, um einige Eigenschaften eines Kegelschnittes abzuleiten, der die Gerade 0|0 im absoluten Punkte, die absolute Gerade im Punkte 0|0 berührt. Scht.

---

W. R. SIXTEL. Ueber Fundamentaltheoreme der sphärischen Geometrie. Kasan Ges. (2) II. No. 2. 94-108. (Russisch.)

Der Verfasser beabsichtigt, die Geometrie zu studiren, welche man auf der Grundlage der folgenden Voraussetzungen erhält:

I. Es giebt, unabhängig von ihrer Lage, auf einander legbare Flächen und Linien (vom Verfasser geometrische Flächen und Linien genannt).

II. Es ist möglich, je zwei Punkte durch eine geometrische Linie zu verbinden.

III. Jede geometrische Linie kann man von jedem ihrer beiden Endpunkte aus nur in einer Richtung fortsetzen.

Er zieht aber daraus den unerlaubten Schluss, dass es auf einer geometrischen Fläche keine zwei geometrischen Linien giebt, welche einen Punkt gemein haben, und von denen eine ganz auf der einen Seite der andern liegt. Da dieses der Geometrie des Raumes mit einer Krümmung $\leqq 0$ widerspricht, so beziehen sich die weiteren Auseinandersetzungen nur auf den Fall der sphärischen Geometrie, wie es Herr Suworow in seiner Anmerkung hervorhebt. Die Arbeit wird ibid. IV (1894) fortgesetzt. Si.

---

Fl. Pohl. Geometrische Betrachtungen. Pr. städt. Realgymn. von Prag. (Böhmisch, 1891.)

Enthält sechs von einander unabhängige Abhandlungen aus der constructiven und descriptiven Geometrie, betreffend 1. das regelmässige Fünfeck, 2. die Ellipse, 3. das Unterrichtsziel der descriptiven Geometrie, 4. Modelle, 5. die Centralprojection der Kugel, 6. Ableitung der Grundregeln der Perspective auf Grund der Anschauung. Std.

---

## Capitel 2.

## Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

H. Poincaré. Sur l'analysis situs. C. R. CXV. 633-636.

Herr Betti hat die Vorstellungen über den Zusammenhang der Flächen auf den Raum von $n$ Dimensionen übertragen und für ein ($n$—1)-dimensionales Gebilde dieses Raumes (Fläche) $n$—1 Zahlen aufgestellt, die er die Zusammenhangszahlen nennt. Die Frage, die der Verf. hier stellt, ist die, ob durch diese Zahlen eine Fläche im Sinne der Analysis situs definirt ist, resp. ob zwei Flächen, die dieselben Betti'schen Zahlen besitzen, durch stetige Deformation in einander übergeführt werden können. Davon ausgehend, dass für eine geschlossene Fläche eine Gruppe von Transformationen existirt, die den auf ihr möglichen geschlossenen Curven entsprechen, kommt er zu dem Schluss, dass diese Frage bereits im vierdimensionalen Raum zu verneinen ist Sfs.

---

C. Köhler. Beweis eines Satzes aus der Analysis situs. J. für Math. CIX. 118-120.

Während man gewöhnlich den Beweis, dass sich die Zusammenhangszahl eines Flächensystems durch jeden Querschnitt um eine Einheit ändert, auf den Satz stützt, dass für eine $n$-fach zusammenhängende Fläche, die durch $\nu$ Querschnitte in $\varrho$ einfach zusammenhängende Flächen zerfällt, die Zahl $\nu-\varrho$ invariant ist, zeigt der

Verfasser, dass man den bezüglichen Beweis direct führen und darauf umgekehrt die Invarianz von $\nu-\varrho$ gründen kann.

Sfs.

---

H. Brunn. Ueber Verkettung. Münch. Ber. XXII. 77-99.

Ringe, die mit einander verkettet sind, haben einen „Verkettungszustand", den der Verf. folgendermassen definirt. Seien $R_1$, $R_2$, ..., $R_n$ alle Ringe, so bilde man alle Combinationen dieser Ringe zu zweien, die mit einander verkettet sind. Diese Combinationen kann man ebenso neben einander stellen, und diejenigen von ihnen aufsuchen, die Ringtripel liefern, die eine Kette bilden u. s. w. So entsteht ein Schema, das der Verf. Verkettungsschema nennt. Er zeigt, dass zu jedem Schema eine wirkliche Kette gehört, und untersucht ausserdem die beiden Fragen, welches die geringste Zahl von Schnitten ist, die man ausführen muss, um alle Ringe von einander frei zu machen, und welches andererseits die grösste Zahl solcher Schnitte ist, vorausgesetzt, dass nie ein bereits frei gewordener Ring zerschnitten wird. Unter diesen Ketten wird eine Gattung besonders hervorgehoben; sie zerfallen gänzlich, wenn man auch nur einen einzigen Ring zerschneidet.

Sfs.

---

H. Brunn. Topologische Betrachtungen. Schlömilch Z. XXXVII. 106-116.

Hr. Simony hat für die Bestimmung der Torsion geschlossener Bänder eine empirische Regel angegeben, von der der Verf. zeigt, dass sie schon in einfachen Fällen versagt. Er ersetzt sie durch eine andere, indem er dafür die Verschlingungszahl $\nu$ der Randcurven der in eine Ebene plattgedrückten Bänder zu Rate zieht. Bei zweirandigen Bändern ist sie gleich der Differenz der positiven und negativen Ueberkreuzungen der beiden Curven, die die Ränder des Bandes bilden; einrandige Bänder werden durch Anbringung eines Querschnitts auf zweirandige zurückgeführt. Sfs.

---

P. H. Schoute. Een vraagstuk der geometria situs. Versl. en Meded. (3) IX. 226-236.

Einige Bemerkungen zu den beiden in Ed. Lucas, Théorie des nombres, I, S. 120, vorkommenden Aufgaben:

Exemple II. La bande de timbres-poste. De combien de manières peut-on replier, sur un seul, une bande de $p$ timbres-poste?

Exemple III. La feuille de timbres-poste. De combien de manières peut on replier, sur un seul, une feuille rectangulaire de $pq$ timbres-poste?

Aus den beiden Thatsachen: 1) dass die Verbindungen 12, 34, 56, ... alle an einer und derselben Seite vorkommen müssen und die Verbindungen 23, 45, ... alle an der anderen Seite, 2) dass zwei an der nämlichen Seite liegende Verbindungen einander nicht durchsetzen können, folgt, dass die Zahl der Faltungsweisen eines Streifens von $p$ Briefmarken der Zahl der Permutationen der Reihe 1, 2, ..., $p$ gleich kommt, wobei keine zwei gleichartigen Verbindungen 12, 34, 56, ... oder 23, 45, ... einander trennen. In dieser Weise findet man die nachstehenden Zahlen $X_p$ für die Faltungsweisen:

$$p = 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9.$$
$$X_p = 6,\quad 16,\quad 50,\quad 144,\quad 462,\quad 1392,\quad 4527.$$

Der Verfasser spricht weiter die Vermutung aus, dass bei der zweiten Aufgabe die Zahl der Faltungsweisen dargestellt wird durch $X_p X_q$, multiplicirt mit der Zahl, welche angiebt, auf wieviel verschiedene Weisen die $p-1$ erforderlichen Faltungen in der Längsrichtung mit den $q-1$ Faltungen in der Breite combinirt werden können, und gelangt daher zur Formel $X_p X_q \binom{p+q-2}{p-1}$.

Mo.

---

P. G. Tait. Note on the division of space into infinitesimal cubes. Edinb. Proc. XIX. 193-197.

Ein Quaternionenbeweis für den wohlbekannten Satz, dass die einzige Schar von Oberflächen, welche in ihrer Gesamtheit den Raum in unendlich kleine Würfel teilen, aus Ebenen gebildet wird und aus ihren elektrischen Bildern. In Betreff des Satzes selber

vergleiche man Liouville's Note VI zu seiner Ausgabe von Monge's Application de l'analyse à la géométrie (1850). Cly. (Lp.)

---

E. Study. Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonalen Substitutionen. Leipz. Ber. XLIV. 122-161.

Die Aufgabe, alle ganzen rationalen Invarianten einer Gruppe von linearen Transformationen aufzustellen, kann in zwei Teile zerlegt werden; erstens sind alle Invarianten zu suchen, in denen die Veränderlichen mit gegebenen Ordnungszahlen auftreten; zweitens hat man diese Invarianten als ganze rationale Functionen einer kleinsten Anzahl darzustellen. Von dieser Aufgabe behandelt der Verf. den ersten Teil in allgemeiner Form und macht davon Anwendung auf die Gruppe $G_{16}$ der Kummer'schen Configuration.

Kennt man die Invarianten der erzeugenden Transformationen $S_1, S_2, S_3, \dots$ einer Gruppe $G$, so sind Invarianten von $G$ nur diejenigen, die allen diesen Substitutionen gemeinsam sind, die sich also durch Auflösung linearer Gleichungen ergeben. Alles ist daher darauf zurückgeführt, die Invarianten der einzelnen Substitutionen, resp. der zugehörigen Gruppen $1, S, \dots, S^{\mu-1}$ zu finden. Adjungirt man die $\mu^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln $\varepsilon$ als rational bekannt, so kann man diese Invarianten folgendermassen bestimmen. Man denke sich die Transformation $S$ so geschrieben, dass ihre Determinante 1 ist, also auch $S^{\mu-1}=1$; ferner sei $F=F^{(0)}$ irgend eine algebraische Form und $F^{(0)}, F^{(1)}, \dots, F^{(\mu-1)}$ seien die Formen, die aus ihr durch obige Transformationen hervorgehen; alsdann ist jede Form

$$\begin{aligned}
\mu F_0 &= F^{(0)} + F^{(1)} + \cdots + F^{(\mu-1)},\\
\mu F_1 &= F^{(0)} + \varepsilon F^{(1)} + \cdots + \varepsilon^{\mu-1} F^{(\mu-1)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mu F_{\mu-1} &= F^{(0)} + \varepsilon^{\mu-1} F^{(1)} + \cdots + \varepsilon^{(\mu-1)^2} F^{(\mu-1)},
\end{aligned}$$

sofern sie nicht identisch Null ist, Invariante der Gruppe. Es ergiebt sich daraus die folgende Reihenentwickelung von $F$ nach Invarianten:

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_{\mu-1}.$$

Es entstehen so aber auch alle Invarianten der Gruppe, d. h. es giebt bei vorgeschriebenen Ordnungszahlen von $F$ höchstens $\mu$ verschiedene Scharen von Functionen, denen die Invarianteneigenschaft zukommt.

Es ist zweckmässig, neben den Formen $F$ auch die ihnen dualistisch gegenüberstehenden Formen $\Phi$ zu betrachten; für sie bestehen ganz analoge Gleichungen, resp. eine ganz analoge Reihenentwickelung, wie für die Formen $F$. Bildet man aus beiden die bilineare Invariante $[F, \Phi]$, so besteht auch hier eine analoge Reihenentwickelung, nämlich

$$[F, \Phi] = [F_0, \Phi_0] + [F_1, \Phi_1] + \cdots + [F_{\mu-1}, \Phi_{\mu-1}],$$

während alle $[F_\varkappa, \Phi_\lambda] = 0$ sind, also $F_\varkappa$ und $\Phi_\lambda$ zu einander apolar sind, so oft $\lambda < \varkappa$. Man kann noch zeigen, dass beide Scharen von Invarianten gleich viele linear unabhängige Formen enthalten.

Hiervon wird zunächst auf eine beliebige Gruppe, sodann ganz im besondern auf die Gruppe $G_{16}$ der Kummer'schen Configuration Anwendung gemacht. Von dieser wird zunächst das vollständige Formensystem aufgestellt und erörtert; es besteht aus 42 Formen, nämlich aus den sechs Fundamentalcomplexen, den 10 Fundamentalflächen zweiten Grades, den nämlichen zehn Formen in Ebenencoordinaten, sowie den 16 bilinearen Formen, die, gleich Null gesetzt, die collinearen Transformationen der Gruppe in sich darstellen. Weiter werden die mit der Configuration zusammenhängenden Complexe und Flächen, sowie die zwischen ihnen bestehenden Identitäten erörtert. Für die Ermittelung der unabhängigen invarianten Flächen, durch die jede andere invariante Fläche nur noch auf eine Weise dargestellt werden kann, liefert die Benutzung der Coefficienten orthogonaler Substitutionen, die ja mit der Kummer'schen Configuration nahe zusammenhängen, eine elegante und einfache Methode. Sfs.

---

E. Hess. Ueber gewisse räumliche Configurationen.
Naturw. Ges. Marburg. 1892. 86-98.

Herr de Vries hat kürzlich (F. d. M. XXII. 1891. 561) eine Reihe von Configurationen untersucht, die sich aus den regelmässigen Körpern, d. h. ihren Ecken, Kanten, Flächen, Diagonalen,

Diagonalebenen u. s. w. ergeben. Diese Betrachtungen dehnt der Verfasser auf die allgemeinsten gleicheckigen, resp. gleichflächigen Körper aus; insbesondere wird eine Configuration $(60_6^{15}, 72_5^5, 60_{15}^6)$ beschrieben, die das räumliche Analogon der ebenen Figur eines zehnfach Brianchon'schen Sechsecks bildet. Uebrigens fasst der Verfasser den Begriff Configuration enger, als dies bisher geschehen ist. Er versteht darunter solche Configurationen, die man nach dem bisherigen Sprachgebrauch als regelmässig zu bezeichnen pflegt (ihnen entspricht eine transitive Gruppe), während er unter regelmässigen Configurationen gewisse Configurationen von einer bestimmten, ganz besonderen Regelmässigkeit verstanden wissen will. Zu ihnen gehört z. B. die Tetraederconfiguration, die Kummer'sche Configuration, sowie die oben genannte Configuration. Sfs.

---

E. Pascal. Sui poliedri circolari che si possono formare coi 45 piani tritangenti della superficie di 3° ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1098-1102.

E. Pascal. Configurazione delle 36 bisestuple gobbe formate colle 27 rette della superficie di 3° ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1103-1106.

E. Pascal. Configurazione delle 216 quintuple gobbe di 2ª specie formate colle 27 rette della superficie di 3° ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1136-1139.

Scheidet man von den 28 Verbindungslinien von acht Punkten zu je zweien eine aus, so bleiben 27, die sich, wie der Verf. gezeigt hat, eindeutig den 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung zuordnen lassen. Von diesem Gesichtspunkt aus hat der Verf. eine Reihe von Sätzen abgeleitet, die hier vorläufig mitgeteilt werden und später ausführlich dargestellt werden sollen. Sie betreffen die Vielflache (poliedri circolari), die aus 3, 4, 5, 6, ... Tritangentialebenen so gebildet werden, dass je zwei consecutive Ebenen eine der 27 Geraden gemein haben, die möglichen Systeme von Doppelsechsen, wie die Systeme von Geradenquintupeln und ihre gegenseitigen Beziehungen. Sfs.

---

A. SCHOENFLIES. Ueber Configurationen, welche sich aus gegebenen Raumelementen durch blosses Schneiden und Verbinden ableiten lassen. Deutsche Math. Ver. I. 62-63.

Beweis, dass die Configuration $q_3$ der dreifach perspectivischen Dreiecke bei beliebiger Lage der Ausgangselemente nicht zu den vorstehend genannten Configurationen gehören kann. Sfs.

---

P. MUTH. Ueber Tetraederpaare. Schlömilch Z. XXXVII. 117-122.

Die Aufgabe, einem Tetraeder $ABCD$ ein anderes $\alpha\beta\gamma\delta$ ein- und umzuschreiben, wenn $\alpha$ in $BCD$ und $\gamma$ in $ABD$ beliebig angenommen werden, zerfällt in 24 verschiedene Fälle, dem entsprechend, dass die Reihenfolge, in der die Flächen von $\alpha\beta\gamma\delta$ durch die Ecken von $ABCD$ gehen, eine willkürliche ist. Vier Fälle werden schon von Steiner erwähnt; es giebt für sie stets $\infty^1$ Lösungen. In den übrigen 20 Fällen giebt es nach dem Verfasser nur je eine eigentliche Lösung. Diese 24 Fälle gliedern sich in fünf Typen; zwei Tetraeder können also auf fünf verschiedene Arten einander ein- und umgeschrieben sein. Für die eine Art wird überdies gezeigt, dass die Tetraeder vierfach hyperboloidisch liegen und daher als zwei Quadrupel einer cyklischen Raumcollineation aufgefasst werden können. Sfs.

---

E. ASCIONE. Alcune considerazioni sul pentaedro completo. Napoli Rend. (2) VI. 147-152.

Herr Ciano hat kürzlich (F. d. M. XXIII. 551) den Satz ausgesprochen, dass bei der an das vollständige räumliche Fünfeck anschliessenden Configuration die 15 Diagonalpunkte erster Art auf derselben Fläche zweiter Ordnung enthalten sind. Dies ist, wie der Verf. zeigt, dahin zu berichtigen, dass sie zu je 12 auf 10 $F_2$ liegen, die zu je zwei eine doppelte Berührung besitzen. Der Betrachtung zu Grunde liegt die Einführung einer imaginären $F_2$, in Bezug auf welche die Configuration des Pentaeders sich selbst polar ist; jeder Ecke des Pentaeders entspricht die zugehörige harmonische

Ebene als Polarebene; ihre Gleichung kann in die Form

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 = 0$$

gebracht werden, wo die $x_i$ die Ebenen des Pentaeders sind und zugleich $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0$ ist. Die Fläche enthält auch die 15 Kegelschnitte, die in jeder der fünf Seitenebenen und 10 Diagonalebenen des Fünfflachs liegen und dort die Bedeutung der Kegelschnitte der 14 Punkte haben, die zu den in ihnen liegenden vollständigen Vierseiten gehören. Sfs.

N. P. Sokoloff. Symmetrische Polyeder. Kiew Nachr. 1892. Nr. 2. (Russisch.)

Kurzer Abriss einer in diesem Jahrbuch XXIII. 1891. 551. besprochenen Arbeit, welche jetzt im Berichte der Phys.-Math. Ges. zu Kiew für 1891 erscheint. Si.

E. S. Fedoroff. Symmetrie der regelmässigen Systeme von Figuren. Verhandl. d. russ.-kais. Mineral. Ges. zu St. Petersb. (2) XXVIII. 1-146. (Russisch.)

Diese im Jahre 1891 veröffentlichte Arbeit beendigt eine Reihe rein mathematischer Untersuchungen des Verfassers auf dem Gebiete der Krystallographie. Als Forschungsmittel wird das von Hrn. Fedoroff in seiner Abhandlung: „Grundformeln der analytischen Geometrie in verbesserter Form“ (1888) entwickelte Coordinatensystem verwendet, welches aus $p$ im Coordinatenanfange sich schneidenden Axen besteht, die als 0, 1, ..., $(p-1)$-namige bezeichnet sind, und bei welchem als Grösse der Coordinate eines Punktes auf jeder Axe die Entfernung der durch ihn senkrecht zur Axe gelegten Ebene vom Anfang betrachtet ist.

Die Beschränkungen, welche sich bei früheren Untersuchungen des Verf. über Systeme der endlichen Figuren (Verh. Miner. Ges. St. Petersb. (2) XXV) als natürliche Folge der Endlichkeit der Dimensionen der Figuren nach allen Richtungen darboten, werden jetzt beseitigt. Es waren 1. Auslassung der Schraubenaxen, 2. Unmöglichkeit des Nichtdurchschneidens zweier Symmetrieaxen.

Als Elemente der Symmetrie für unendliche Figuren erscheinen

daher: 1. die Congruenzaxen (d. h. Symmetrie- und Schraubenaxen), charakteristisch für die Symmetrie, auch Congruenz; 2. Symmetrieebenen; 3. Axen und Ebenen der zusammengesetzten Symmetrie. Die beiden letzteren Elemente sind für gerade Symmetrie charakteristisch, und der Verf. vereinigt sie deshalb unter den Begriff der Symmetrik (wenn es erlaubt ist, das gleiche russische Wort dadurch zu übersetzen). Er beschränkt sich auf regelmässige Systeme, d. h. solche, die notwendig zusammenfallen, wenn zwei ihrer Figuren es thun. Der Inbegriff der Bewegungen, welche das gegebene System in congruente Lage überführen, bestimmt das Gesetz der Symmetrie des Systems, wie auch das des daraus entspringenden regelmässigen Punktsystems.

Die Beziehung zwischen der Anzahl $S$ der Congruenzbewegungen, welche eine gegebene Richtung in andere $S$ ihr gleiche (und symmetrisch-gleiche) Richtungen überführen, und welche mit Hinzufügung einiger Congruenztranslationen abgeleitet werden können, und der Anzahl $s$ der gleichen (und symmetrisch-gleichen) Richtungen jeder einzelnen Figur des Systems ermöglicht es, die Systeme selbst zu klassificiren. So z. B. da $S=S_1+S_2$ ist (wo $S_1$ sich auf Congruenz-Symmetrie und $S_2$ auf Symmetrie bezieht), wird das System symmorphisch, wenn $s=S=S_1+S_2$, hemimorphisch für $s=S_1=S_2\left(=\frac{S}{2}\right)$ u. s. w.

Der Auffindung aller regelmässigen symmetrischen Systeme ist die Arbeit gewidmet. Als Resultat ergeben sich 65 einfache Systeme (in Uebereinstimmung mit Sohncke) und im ganzen 229 regelmässige Systeme von Figuren (statt 227 bei Schoenflies, Math. Ann. XXXIV. 172). Das erste Resultat ist deshalb als endgültig anzusehen, das letzte aber als dem endgültigen nahe.

In der That fand der Verfasser bei wiederholter Prüfung (siehe Verh. Min. Ges. St. Petersb. (2) XXVII. 448), dass er ein hemisymmorphes System ($16h$)

$$y=n^j.b+g\frac{\lambda}{2}+(j+k+l)\frac{\lambda}{4};$$

$$z=n^k c+(f+g)\frac{\lambda_0}{2}+(j+k+l)\frac{\lambda_0}{4};\quad v=n^2 d+f\frac{\lambda_1}{2}+(j+k+l)\frac{\lambda_1}{4}$$

übersehen hatte; das früher aber mit ($16h$) bezeichnete System ist mit ($17s$) gleichbedeutend; auch auf Seite 132 fehlt das System

$$x_0 = n^{\beta}.a + f\frac{\lambda}{2} + l\frac{\lambda}{4}; \quad x_1 = n^{k^3}a_{i+n}l + (f+k)\frac{\lambda}{4};$$

$$x_2 = n^{j+k^3}.a_{i+2n}l + (f+j)\frac{\lambda}{2} + f\frac{\lambda}{4}.$$

Demgemäss ändern sich die Anzahlen der Tabelle (S. 142-143) in der Weise:

| C. Rhombisches System: | Sym. | Hemisym. | Asym. | Summe |
|---|---|---|---|---|
| 7) Hemimorphie | 5 | 12 | 5 | 22 |
| 8) Holoëdrie | 4 | 8 | 16 | 28 |
| F. Kubo-oktaëdrisches System: | | | | |
| 30) Tetraëdrische Hemiëdrie | 3 | 2 | 1 | 6 |
| Gesamtsumme | 73 | 54 | 103 | 230. |

Dies stimmt mit dem neueren Resultat von Schoenflies (F. d. M. XXIII. 1891. 555-559) überein. Si.

---

G. Wulf. Ueber die Vereinfachung der krystallographischen Berechnungen. Verh. Mineral. Ges. St. Petersb. (2) B. XXIX. 58-64. (Russisch.)

Einfacher analytisch-geometrischer Beweis der von Hrn. Fedoroff in seinen „Studien über analytische Krystallographie“ gegebenen Formeln, um die Symbole der Elemente eines Krystalls zu berechnen. Si.

---

G. Wulf. Eigenschaften einiger pseudo-symmetrischen Krystalle im Zusammenhang mit der Theorie der Krystallstructur des Stoffes. Verh. Miner. Ges. St. Petersb. (2) B. XXIX. 65-130. (Russisch.)

Ein Versuch, die Theorien der Krystallstructnr auf die Discussion einiger besonderen Fälle anzuwenden. In den ersten zwei Capiteln verteidigt der Verf. die Gittertheorie von Bravais und bestreitet die physischen Grundlagen der Theorie des Hrn. Fedoroff; er ist der Meinung, diese von Sohncke, Schoenflies und Fedoroff

entwickelte Theorie sei nur eine geometrische, ihr mangele die physische Bedeutung (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 558). Der Rest der Arbeit ist den Anwendungen gewidmet. Si.

E. Blasius. Die Geometrie der Lage in ihrer Anwendung auf die Krystallographie. Wiedemann Ann. XLV. 108-158.

Die Möbius'schen Netze in der Ebene und im Raume haben bekanntlich nahe Beziehung zu den krystallographischen Netzen, in welche die möglichen Flächen und Kanten eines Krystalles eingehen, wie dies aus dem Satz der rationalen Indices unmittelbar hervorgeht. Der Verf. zeigt, dass man aus den bekannten Sätzen der Geometrie der Lage, die solche Netze betreffen, die Sätze über den Zonenverband der Krystallflächen u. s. w. einfach entnehmen kann. Die Untersuchung wird nur auf ebene Netze und solche im Strahlenbündel ausgedehnt, da das allgemeine räumliche Netz noch keine krystallographische Anwendung gefunden hat. Im Strahlenbündel wird unter anderem der von Schröter betrachtete orthogonale Bündel besonders ausführlich behandelt und seine krystallographische Bedeutung dargethan. Sfs.

B. Hecht. Beiträge zur geometrischen Krystallographie. Gött. Nachr. 1892. 239-247.

Rationale Functionen zwischen den Winkeln der Normalen von fünf Krystallflächen dienen zum Nachweis von Krystallflächencomplexen mit einer dreizähligen Symmetrieaxe $S$, welche die Normalebene von $S$ nicht enthalten. Beigefügt ist ein neuer Beweis dafür, dass ein Krystallflächencomplex nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Symmetrieaxen enthalten kann. Js.

V. Eberhard. Grundzüge einer Gestaltenlehre der Polyeder. Deutsche Math. Ver. I. 50-53.

Bericht über den Inhalt der „Morphologie der Polyeder“ desselben Verfassers (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 544). Sfs.

# Capitel 3.

## Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

J. Alves Bonifacio. Geometria elementar plana e no espaço. Porto.

Dieses Lehrbuch der elementaren Geometrie, welches vom Verf. zum Gebrauche an den Gymnasien Portugals geschrieben ist, enthält die Lehren, welche man gewöhnlich in Werken dieser Gattung findet. Es ist in zehn Abschnitte geteilt, in denen folgende Gegenstände abgehandelt werden: I. Winkel, senkrechte und schiefwinklige Gerade. II. Axen und Sehnen des Kreises, Tangenten. Messung von Strecken einer Geraden, von Kreisbogen und von Winkeln. III. Dreiecke. IV. Vielecke; Rectification des Kreises. V. Flächeninhalte. VI. Ebenen und Gerade im Raume. VII. Pyramiden, Prismen und Polyeder. VIII. Cylinder, Kegel, Kugel. IX. Flächen- und Körper-Inhalte. X. Elementare Eigenschaften der Ellipse, Parabel und Hyperbel. Transversalen im Dreiecke. Aehnlich liegende Gebilde. Oberflächen zweiter Ordnung.

Tx. (Lp.)

---

F. J. Brockmann. Lehrbuch der elementaren Geometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. Zweiter Teil: Die Stereometrie. Zweite, revidirte Auflage. Leipzig. B. G. Teubner. VIII + 144 S. 8°.

Dieses Lehrbuch behandelt die Stereometrie in der allgemein üblichen Weise. Der Verfasser hat sich sichtlich bemüht, die richtige Mitte zwischen erschöpfenden Handbüchern und aphoristischen Leitfäden zu halten. Im letzten Capitel sind 366 Uebungssätze und Aufgaben gegeben, welche den voraufgehenden, den Lehrgang darstellenden Capiteln in passender Weise angereiht werden können, eine sehr nützliche Zugabe. Der Lehrgang selbst enthält zuerst das Nötige über Gerade und Ebenen; hierauf werden die Polyeder, darunter Prismatoid, Obelisk, die regulären und die

Sternpolyeder abgehandelt, nachher die krummflächigen Körper: Cylinder und Cylinderstumpf, Kegel und Kegelstumpf, Kugel und Ring. Dann folgen die Oberflächen- und Inhaltsberechnungen der Körper. Die Darstellung ist klar und einfach. Druck und Figuren vortrefflich, so dass das Buch bestens empfohlen werden kann.

Mz.

---

Manuel Salavera. Complemento elemental de geometria y trigonometria rectilinea. Tarragona.

Das Werk zerfällt in vier Teile. In dem ersten werden die allgemeinen analytischen und synthetischen Methoden zur Lösung geometrischer Fragen erörtert. Der zweite Teil geht auf die ersten Sätze ein, in denen das harmonische Verhältnis und der Begriff von Pol und Polare vorkommt, ferner die Theorie der Antiparallelen, der Potenzlinie und der sich rechtwinklig schneidenden Kreise. In dem dritten Teile bespricht der Verf. die Theorie der Transversalen, der Aehnlichkeit, der Perspective, der Collineation, Dualität u. dergl. m. Im vierten Teile endlich wird das Princip der reciproken Radien in der Ebene und im Raume behandelt sowie einiges aus der Dreiecksgeometrie. Tx. (Lp.)

---

V. Jarolímek. Geometrisches Lehrbuch für die II. und III. Realschulklasse. Prag. (Böhmisch, 1891.)

Der Autor vervollständigt hierdurch die Zahl seiner allgemein anerkannten Lehrbücher der elementaren und der darstellenden Geometrie.

Std.

---

F. Nicita. Descrizione del cerchio. Raccolta di 527 problemi di geometria elementare colle relative soluzioni. Ragusa. Tip. Piccitto e Antoci. 104 S. [Periodico di Mat. VIII. 78-79.]

Der Verf., welchem die zahlreichen geometrischen Aufgabensammlungen vollkommen unbekannt geblieben zu sein scheinen, verfolgt den Plan, eine solche zusammenzustellen, welche nur Fragen über den Kreis enthält. Viele Tabellen geben Uebersich-

ten über die gewonnenen Resultate. Wir wollen in keine eingehende Betrachtung des in Rede stehenden Werkes eintreten; nur eins werde bemerkt: eine gewisse Aufgabe der Reihe nach in allen den Fällen aufzulösen, welche sie darbietet, entspricht sehr wohl dem Gedankengang der alten Geometer, nicht aber dem Geiste der heutigen Geometrie; eine solche Lehrmethode kann daher heute nicht als lobenswert angesehen werden. La.

---

Th. Spieker. Kurze Anleitung zum Lösen der Uebungsaufgaben des Lehrbuchs der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten von Th. Spieker. Potsdam 1892. Aug. Stein. 72 S. 8°.

Mit dem Lösen auch systematisch geordneter geometrischer Aufgaben ist es eine eigene Sache; was der Verfasser durch geschickte Benutzung grade ihm zu Gebote stehender Hülfsmittel ohne Mühe erreicht, sucht ein anderer oft vergebens oder findet es nur auf umständliche Weise. Darum ist es ein verdienstliches Werk des Verfassers, dass er seine eigenen Lösungen bekannt macht. Die Andeutungen sind kurz und verlangen immerhin noch ein genügendes Mass von Selbstthätigkeit, so dass das Hülfsmittel nicht etwa „in den Händen der Schüler zu einer die Energie und Erfindungsfreudigkeit lähmenden Krücke werde". Einige grade bei Aufgaben schwer zu entdeckende kleine Versehen sind bei dieser Bearbeitung beseitigt, Figuren durch den Hinweis auf den systematischen Lehrgang vermieden worden. Lg.

---

A. T. Richardson. Graduated mathematical exercises for home work. London. VII + 349 S.

Zahlreiche, ziemlich leichte Uebungsaufgaben, zu Schulzwecken geeignet. Gbs. (Lp.)

---

## Weitere Lehrbücher.

W. Augschun. Grundzüge der Geometrie mit geometrischen Constructions- und Rechenaufgaben. Mittler u. Sohn. VIII u. 120 S. Mit Abbildungen u. 4 Tafeln. 8°.

H. Bensemann. Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Schulen. Dessau. Baumann's Verlag. VII + 118 S. 8°.

J. R. Boyman. Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. 2. Teil: Ebene Trigonometrie und Geometrie des Raumes. 8. Aufl., besorgt von Vering. Düsseldorf. Schwann. VI + 214 S. 8°.

A. Falcke. Leitfaden der Geometrie. 12. Aufl. Potsdam. Rentel. 95 S. 12°.

M. Focke u. M. Krass. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien und anderen höheren Lehranstalten. 6. Aufl. Münster. Coppenrath'sche Buchhdlg. IV u. 68 S. Mit Figuren. 8°.

E. Glinzer. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. I. Teil: Planimetrie. 5. Aufl. Dresden. Gerh. Kühtmann. III u. 127 S. 8°.

E. Glinzer. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 2. Teil: Stereometrie. 2. Aufl. Dresden. Gerh. Kühtmann. VII + 148 S. 8°.

F. Hočevar. Lehrbuch der Geometrie für Obergymnasien. 2. Aufl. Leipzig. Freytag. IV u. 200 S. Mit 213 Fig. 8°.

E. Hribar. Elemente der ebenen Trigonometrie. Zum Schulgebrauch und zum Selbststudium dargestellt. Freiburg. Herder. VII + 99 S. 8°.

L. Kambly. Die Elementar-Mathematik für den Schulunterricht bearbeitet. 4. Teil: Stereometrie. Nebst Uebungsaufgaben. 22. Aufl. Breslau. Ferd. Hirt. IV + 71 S. mit 4 Taf. 8°.

H. Lieber und F. v. Lühmann. Leitfaden der Elementar-Mathematik. 1. Teil: Planimetrie. 8. Aufl. Berlin. L. Simion. V + 124 S. Mit 7 Tafeln. 8°.

H. Lieber und F. v. Lühmann. Leitfaden der Elementar-Mathematik. 3. Teil: Ebene Trigonometrie, Stereo-

metrie, sphärische Trigonometrie, propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. 6. Aufl. Berlin. L. Simion. VI + 102 S. Mit 3 Tafeln. 8°.

H. C. E. Martus. Raumlehre für höhere Schulen. 2. Teil: Dreiecksrechnung und Körperlehre. Bielefeld. Velhagen u. Klasing. VIII u. 260 S. Mit Fig. 8°.

F. G. Mehler. Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Gymnasien und Realgymnasien. Mit einem Vorworte von Schellbach. 17. Aufl. Berlin. G. Reimer. VIII u. 221 S. mit Figuren. 8°.

F. Ritter v. Močnik. Lehrbuch der Geometrie für Lehrerbildungsanstalten. 3. Aufl. Wien. C. Gerold's Sohn. 178 S. 8°.

F. Ritter v. Močnik. Geometrische Formenlehre für Lehrerinnen-Bildungsanstalten. 2. Aufl. Wien. C. Gerold's Sohn. IV + 123 S. 8°.

v. Nagel. Lehrbuch der Stereometrie zum Gebrauche bei dem Unterrichte in Gymnasien und Realschulen. 5. Aufl. v. Th. Schröder. Nürnberg. Korn'sche Buchhdl. VII + 132 S. 8°.

G. Recknagel. Ebene Geometrie, Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium. 4. Aufl. München. Th. Ackermann, Verl.-Cto. VIII u. 214 S. Mit Fig. 8°.

J. Rüefli. Kleines Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst einer Sammlung von Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Mittelschulen bearbeitet. 3. Aufl. Bern. Schmid, Francke u. Co. VI u. 76 S. Mit Figuren. 8°.

J. Rüefli. Kleines Lehrbuch der Stereometrie, nebst einer Sammlung von Uebungsaufgaben. Zum Gebrauche an Mittelschulen bearbeitet. 2. Aufl. Bern. Schmid, Francke u. Co. IV + 55 S. 8°.

J. Sachs. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Trigonometrie). 5. Teil: Die Flächen der geradlinigen

Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. VIII + 164 S. 8°.

H. Seipp. Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). 1. Teil: Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. VI + 382 S. 8°.

Th. Spieker. Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten. Ausgabe B. Für mittlere Klassen. 3. Aufl. Potsdam. Stein. IV + 178 S. mit Holzschnitten. 8°.

Th. Spieker. Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 20. Aufl. Potsdam. Stein. IV + 278 S. mit Holzschnitten. 8°.

V. Fiore. Primi elementi di geometria. Napoli. L. Chiurazzi.

M. Gremigni. Gli elementi di Euclide. Nuova edizione modificata ed accresciuta. Firenze. Successori Le Monnier. [Rivista di Mat. II. 188.]

G. Riboni. Elementi di geometria, a uso delle scuole secondarie inferiori. Corredati da una raccolta di circa seicento esercizi, per cura di D. Gambioli. Bologna. Ditta Nicola Zanichelli. [Periodico di Mat. VII. 77-78.]

A. Matteucci. Appunti di trigonometria piana, ad uso degli alunni dei licei e degli istituti tecnici del Regno. Torino. Paravia.

Ch. Vacquant. Cours de géométrie, à l'usage des mathématiques élémentaires, avec les compléments à l'usage des mathématiques spéciales. 4e éd. Paris. (1891). [J. de Math. élém. (4) I. 117-118.]

R. Levett and C. Davison. The elements of plane trigonometry. London. Macmillan and Co. [Nature XLV. 509-510.]

Referat in F. d. M. XXIII. 1891. 604.

E. F. Borth. Die geometrischen Constructionsaufgaben, für den Schulgebrauch methodisch geordnet und mit einer Anleitung zum Auflösen derselben versehen. 7. Aufl. Leipzig. Reisland. VIII u. 167 S. 8°.

H. Roeder. Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Breslau. Ferd. Hirt. 150 S. 8°.

H. Roeder. Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Auflösungen. Breslau. Ferd. Hirt. 62 S. 8°.

G. Oetzel. Neue Formeln zur Berechnung des Rauminhaltes voller und abgestutzter Baumschäfte: nebst einem Beitrage zur Lehre der Baumschaft-Formzahlen. Wien. W. Braumüller. IV + 86 S. mit 4 Tabellen. 8°.

W. Wagner. Anleitung zur Lösung von Aufgaben mittelst geometrischer Oerter. Heidelberg. Vormals Weiss'sche Universitäts-Buchhandlung. III u. 72 S. Mit Figuren. 8°.

J. Petersen. Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de 400 problèmes. Traduit par O. Chemin. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

A. Grévy. Compositions données depuis 1872 aux examens de Saint-Cyr. Algèbre et géométrie. Énoncés et solutions. 2e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils. (1893.)

F. Occella. Alcune questioni di matematica elementare. Casale. Cassone.

J. Blaikie and W. Thomson. Geometrical deductions, book II. London. Longmans, Green, and Co. [Nature XLVI. 291.]

Anzeige von book I in F. d. M. XXIII. 1891. 568.

S. Dickstein. Anfangsgründe der Geometrie in einer Reihe von Aufgaben. 3. Auflage. (1084 Aufgaben.) Warschau 1892, 152 S. 8°.

---

E. Lemoine. La géométrographie ou l'art des constructions géométriques. Assos. Franç. Pau. XXI. 36-100.

Jacob Steiner sagt am Schlusse seiner „geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“ (1833) im Hinblick auf die geringe Sorgfalt, die man bis dahin auf die geometrischen Constructionen verwendet habe: „Es ist eine ganz andere Sache, die Constructionen in der That, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Ausdrucks zu bedienen, bloss mittels der Zunge auszuführen. Es lässt sich gar leicht sagen, ich thue das und dann das, und dann jenes, allein die Schwierigkeit und, man kann in gewissen Fällen sagen, die Unmöglichkeit, Constructionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, dass man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste, oder welches unter besonderen Umständen das zweckmässigste sei, und wieviel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder die grösste Genauigkeit zu erreichen, oder den Plan (das Papier, worauf gezeichnet wird) möglichst zu schonen u. s. w.“ Die vorliegende Arbeit erscheint dem Ref. als eine höchst gelungene Ausführung des vor 60 Jahren von unserm Altmeister aufgestellten Programms. Indem Herr Lemoine zu der 1888 (Congrès d'Oran, F. d. M. XX. 1888. 537) behandelten „Einfachheit“ noch die „Genauigkeit“ hinzufügt, wendet er sein Verfahren auf 63 einfachere und schwierigere Aufgaben an und findet, dass die sogenannten klassischen Lösungen, z. B. bei der mittleren Proportionale, dem goldenen Schnitt, den Tangentenconstructionen etc. durchaus nicht immer die besten sind. Die letzten 13 Aufgaben behandeln die Methoden zum Zeichnen der wichtigsten merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Lg.

---

E. Lemoine. Sobre un método de comparación de las resoluciones geométricas. Progreso mat. II. 177-182.

Darlegung der von dem Verf. vorgeschlagenen Grundsätze der

Vergleichungsmethode geometrischer Constructionen rücksichtlich ihrer Einfachheit, besonders bei verschiedenen Lösungen einer und derselben Aufgabe; Anwendung dieser Grundsätze auf eine besondere Aufgabe. Tx. (Lp.)

---

E. Lemoine. Application de la géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème. S. M. F. Bull. XX. 132-150.

Die in Rede stehende Aufgabe heisst: $n$ Gerade, welche durch einen und denselben Punkt gehen sollen, sind durch Versuche bestimmt und schneiden sich daher nicht genau in einem Punkte; man soll ihren wahrscheinlichen Schnittpunkt „zeichnen". Dieser liegt natürlich so, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den $n$ Geraden ein Minimum ist. Die untersuchten Lösungen sind von den Herren d'Ocagne, Laisant und Bouquet de la Grye. Lg.

---

E. Lemoine. Application d'une méthode d'évaluation de la simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius. Nouv. Ann. (3) XI. 453-474.

Nach dieser Untersuchung ist die für die praktische Ausführung einfachste und genaueste Construction (wenn auch nicht für alle Specialfälle brauchbar) die von Mannheim Nouv. Ann. 1885. S. 108 gegebene, die alte Vieta'sche einfacher als die neueren (F. d. M. XX. 1888. 537ff.) Lg.

---

Colette, Catalan, E. Lemoine. Sur la construction de la moyenne proportionnelle. Mathesis (2) II. 192-193, 250-251, 275-276.

Hinsichtlich der Einfachheit wird die Methode von Gouzy mit anderen verglichen. Dml. (Lp.)

---

A. M. Worthington. On the need of a new geometrical term „conjugate angle". Nature XLVII. 8.

„Conjugirter Winkel“ zur Bezeichnung eines Winkels, dessen Schenkel auf denen eines anderen senkrecht sind. Lp.

---

PERCIVAL and Co. Simple proof of Euclid II, 9 and 10. Nature XLV. 250.

---

A. J. BICKERTON. An obvious demonstration of the 47[th] proposition of Euclid. Nature XLVI. 315-316.

---

L. JELÍNEK. Unter welchen Bedingungen kann man durch eine Dreiecksecke eine Transversale ziehen, die das geometrische Mittel aus den Abschnitten der Gegenseite ist? Časopis XXI. 232-238. (Böhmisch.)

Nennt man die Dreiecksseiten $a, b, c$, wovon $b$ durch die fragliche Transversale geschnitten wird, so erhält man für

$$b\sqrt{2} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} a + c \left\{ \begin{matrix} \text{zwei} \\ \text{eine} \\ \text{keine} \end{matrix} \right\} \text{Transversalen.}$$

Std.

---

C. A. LAISANT. Sur un problème de géométrie. S. M. F. Bull. XX. 65-67.

$ABC$ sei ein Dreieck. Durch $A_1$ ziehe man Parallelen zu $AB$ und $AC$, durch $B_1$ zu $BA$ und $BC$, durch $C_1$ zu $CB$ und $CA$. So entstehen drei Parallelogramme, aus deren sechs Seiten das Dreieck $ABC$ gefunden werden soll. Zu diesem ihm von Herrn Lemoine mitgeteilten Problem giebt der Verfasser zwar keine Lösung, aber doch eine Transformation, welche das Problem der Lösung näher zu bringen scheint. Scht.

---

J. S. MACKAY. Matthew Stewart's theorem. Edinb. M. S. Proc. X. 90-94.

In der Vorrede zu dem Werke „Some general theorems of

considerable use in the higher parts of Mathematics“ spricht sich Matthew Stewart dahin aus, die in den folgenden Bogen enthaltenen Theoreme seien völlig neu, höchstens eins oder zwei ausgenommen, aber er kennzeichnet die beiden nicht; es sind die folgenden:

I. Wenn in dem Dreiecke $ABC$ eine beliebige Gerade $AD$ nach $BC$ gezogen wird, und $DE$, $DF$ zu $AC$, $BA$ parallel gelegt werden (Schnittpunkte mit $AB$ und $AC$ bezw. $E$ und $F$), so ist

$$AD^2+BD.CD = AB.AE+AC.AF.$$

II. Wenn in dem Dreiecke $ABC$ eine beliebige Gerade $AD$ nach $BC$ gezogen wird, so ist

$$AB^2.CD+AC^2.BD = BC.BD.CD+AD^2.BC.$$

Der zweite Satz wird gewöhnlich das Stewart'sche Theorem genannt; zum Beweise desselben verwendet er den ersten. In dem vorliegenden Aufsatze wird gezeigt, dass das Theorem wahrscheinlich von Robert Simson entdeckt wurde (man vergleiche seine „Loci plani“, Lemma 10, p. 156 und Appendix, p. 221). Simson scheint dasselbe vor 1741 entdeckt zu haben. Einige historische Bemerkungen über das Theorem, welches nun also dem Simson zugeschrieben werden müsste, werden hinzugefügt mit dem Nachweis seines Gebrauches durch Thomas Simpson (1752), Euler (1780), Carnot (1803), Chasles, Clément Thiry: „Applications remarquables du théorème de Stewart“ (1891). Gbs. (Lp.)

---

P. J. Helwig. De constructie van eenige stelsels der hoektransversalen in den vlakken driehoek. Nieuw Archief XIX. 216-223.

Im „Nieuw Archief“ XVII hat der Verfasser die Ecktransversalen eines ebenen Dreiecks construirt, welche die gegenüberliegenden Seiten in Segmente teilen, deren Verhältnis demjenigen der $n^{\text{ten}}$ Potenz der Sinus der über den anschliessenden Seiten des Dreiecks liegenden Winkel gleich kommt. In der vorliegenden Abhandlung wird angenommen, dass jene Segmente der $n^{\text{ten}}$ Potenz einer goniometrischen Function der $p$-fachen so eben genannten Winkel proportional sind. Der Verfasser bezeichnet eine derartige

Ecktransversale als „Sinusian, Bisinusian, Semisinusian $n^{ter}$ Ordnung“, wenn $p$ nach einander die Werte 1, 2, $\frac{1}{2}$ erhält, und verwendet ähnliche Bezeichnungen für den Fall, dass andere goniometrische Functionen auftreten. Bei der Construction dieser Ecktransversalen spielen gewisse Hülfsdreiecke eine wichtige Rolle. Dieselben werden über den Seiten des gegebenen Dreiecks construirt und haben sämtlich die Eigenschaft, dass ihre Winkel in einer einfachen Beziehung zu den anliegenden Winkeln des ursprünglichen Dreiecks stehen. Es zeigt sich, dass sämtliche Sinusianen, Bi- und Semisinusianen, Cosinusianen, Bi- und Semicosinusianen, Tangentianen, Bi- und Semitangentianen beliebiger Ordnung auf einfache Weise mit Hülfe von Zirkel und Lineal construirt werden können.

Zum Schlusse giebt der Verfasser die allgemeine Gleichung der von Hrn. de Longchamps eingeführten „potentielle triangulaire“ (d. h. des geometrischen Ortes der Concurrenzpunkte der Ecktransversalen $m^{ter}$ Ordnung, wenn $m$ alle reellen Werte durchläuft) in trilinearen Coordinaten. Mo.

---

J. Mascart. Un problème de géométrie récurrente. J. de Math. spéc. (4) I. 32-34.

Es wird die folgende Aufgabe in Angriff genommen: Es ist eine Reihe von Fünfecken $P_{-n}$, $P_{-(n-1)}$, ..., $P_{-1}$, $P_0$, $P_1$, ..., $P_{n-1}$, $P_n$, ... von der Beschaffenheit gegeben, dass die Seiten von $P_n$ die Diagonalen von $P_{n-1}$ sind; gesucht wird die Grenze von $P_n$ für unendlich wachsendes $n$. Da die Arbeit aber noch fortgesetzt werden soll, so muss das Referat verschoben werden.

Gz.

---

L. C. Almeida. Breves notas sobre algunas proposições de geometria elementar. Instituto de Coimbra XLI.

Bemerkungen über einige Sätze der elementaren Geometrie.

Tx. (Lp.)

---

S. Günther. Ein neuer Beweis des Lehmus-Steiner'schen Satzes. Hoffmann Z. XXIII. 580-581.

Wenn die Halbirungslinien zweier Dreieckswinkel gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig. Ueber diesen Satz und seine Beweise befinden sich S. 480 und 579 einige historische Notizen, welche Hrn. Günther zur Veröffentlichung seines Beweises auf algebraischer Grundlage veranlasst haben. Lp.

---

M. Sacchi, V. Carpaneto, A. Lugli, E. Catalan, E. Sadun, C. Soschino, A. Martone. Alcuni teoremi affini di geometria. Periodico di Mat. VII. 147-151, 187-189.

Die in diesem Aufsatze begründeten Theoreme sind nicht alle neu und dienen zur Vergleichung der Winkelhalbirenden des Dreiecks. La.

---

A. v. Frank. Zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels. Hoppe Arch. (2) XI. 207-210.

Es werden einige geometrische Beziehungen an den bekannten Figuren zur näherungsweisen Dreiteilung eines Winkels aufgesucht. Lg.

---

Riefler. Verfahren, beliebige Winkel mit Hülfe eines Zirkels und eines Massstabes ohne Anwendung eines Transporteurs aufzutragen. Z. deutsch. Ing. XXXV. 1301. (1891.)

Trägt man von dem Endpunkte $A$ eines Durchmessers eines gegebenen Kreises die Seite des eingezeichneten Quadrates nach dem Innern des Kreises auf dem erwähnten Durchmesser bis zum Punkte $D$ ab, schlägt mit $AD$ um $D$ einen Kreis und verlängert dann die Verbindungslinie von $D$ mit irgend einem Punkte $F$ der Peripherie des gegebenen Kreises bis zu ihrem Schnittpunkte $E$ mit der Peripherie des construirten zweiten Kreises, so ist die Länge der geraden Linie $AE$ ziemlich genau gleich dem Bogen $AF$. Beträgt nun der Umfang des ersten Kreises 360mm (sein Radius also $\frac{360}{2\pi} = 57,3$mm), so giebt die Länge von $AE$ in mm die Anzahl der Gerade des zum Bogen $AF$ gehörigen Winkels.

F. K.

Holzhey. Constructive Bestimmung des Umfanges und Inhaltes eines Kreises. W. Oestr. Ing. u. Archt. XV. 310 (1890).

Durch den Mittelpunkt $O$ eines Kreises werden zwei Durchmesser $AB$ und $CD$ gelegt; der letztere wird über $D$ bis zum Punkte $F$ um den Radius verlängert, und dann $F$ mit der Mitte $E$ der Sehne $CB$ verbunden. Die Gerade $EF$ möge die in $D$ an den Kreis gelegte Tangente in $G$ schneiden. Von $G$ aus wird auf dieser Tangente nach der dem Punkte $D$ entgegengesetzten Seite bis zum Punkte $H$ der Durchmesser des Kreises abgetragen und dann $F$ mit $H$ verbunden. Zum Schluss wird durch $C$ eine Parallele zu $FE$ gelegt, welche die Verlängerung von $FH$ in $J$ schneiden möge. Die Strecke $HJ$ ist dann (für den Radius als Einheit) 3,14159195. F. K.

---

Hans Hartl. Neues Verfahren zur Rectification von Kreisbogen. Z. deutsch. Ing. XXXV. 445-446. (1891.)

Es sei $AB$ der vierte Teil eines Kreisbogens und $(x, y)$ die Tangente in der Mitte des Bogens. $CD$ sei diejenige Sehne des Kreises, welche parallel und gleich der Sehne $AB$ ist, und $S$ die Spitze eines nach aussen hin über $CD$ errichteten gleichseitigen Dreiecks. Die Linien $AS$ und $BS$ mögen $(x, y)$ in $A'$ und $B'$ treffen. Dann ist $A'B' = 1{,}571175$, während der Bogen $AB$ gleich 1,570796. Projicirt man irgend einen zwischen $A$ und $B$ liegenden Punkt $F$ von $S$ aus, so geben auch die Projectionen $A'F'$ und $F'B'$ mit ziemlicher Genauigkeit die Kreisbogen $AF$ und $FB$.

F. K.

---

J. Srůtek. Neue Rectificationsmethode des Kreises. Casopis. XXI. 83-88. (Böhmisch.)

Sucht eine bequeme Näherungsconstruction der Zahl $\pi$ auf Grundlage der Werte

$$\sqrt{10} = 3{,}16227\ldots = \alpha > \pi,$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{39} = 3{,}12249\ldots = \beta < \pi,$$

für welche sich die Differenz

$$\frac{\alpha+\beta}{2}-\pi=0{,}00079$$

erst in der vierten Decimalstelle geltend macht. Std.

---

O. Flor. Lösung des Problems: Die Quadratur des Kreises. Berichtigung der Zahl $\pi$. Riga. Stieda. 5 S. 8°.

---

A. J. Pressland. On the history and degree of certain geometrical approximations. Edinb. M. S. Proc. X. 23-24.

Handelt von der Aufgabe, dem Kreise regelmässige Polygone einzuschreiben. Mannigfache Regeln werden angeführt, ebenso werden Notizen über Autoren, welche sie gegeben haben, und über den Grad der erreichten Annäherung geliefert.

Gbs.(Lp.)

---

G. Heppel, A. J. Pressland. Solution of question 11121. Ed. Times. LVI. 61-62.

Litterarische Notizen über die folgende angenäherte Lösung der Kreisteilung in $n$ gleiche Teile: Man teile einen Durchmesser in $n$ gleiche Teile; aus der Spitze des gleichseitigen Dreiecks über dem Durchmesser ziehe man eine Gerade nach dem zweiten Teilungspunkte: der Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Kreise liefert eine Ecke des eingeschriebenen regelmässigen $n$-Ecks. Die Construction stimmt genau für $n=3, 4, 6$; für die Zahlen bis $n=16$ wird der Grad der Annäherung berechnet. Lp.

---

D. Efremoff. Construction der Seiten des regulären Sieben- und Neunecks mit Annäherung bis auf 0,001 des Radius des umbeschriebenen Kreises. Spaczinski's Bote No. 146. 32-33. (Russisch.)

Es seien $OA$ und $OB$ zwei zu einander senkrechte Radien eines Kreises. Der um den Mittelpunkt $M$ von $OB$ geschlagene

Kreis schneide $AM$ in $K$. Dann ist $\overline{AX} = \overline{AM} - 2\,\overline{KM}$ nur um 0,0013$r$ grösser als $a_7$; analog für $a_9$. Si.

---

F. Eseverri. Determinación del lado del pentedecágono regular convexo inscripto y de los lados de los pentedecágones regulares inscriptos estrellados. Progreso mat. II. 53-55.

---

B. Sporer. Einige Sätze über reguläre Polygone. Schlömilch Z. XXXVII. 25-34.

In dieser Arbeit beweist der Verf. nach den Methoden der analytischen Geometrie, und zwar durch Betrachtung einer Function, die gewisse Symmetrien in Bezug auf ihre Argumente hat, eine Reihe von Sätzen allgemeineren Charakters über reguläre Polygone. Die Art dieser Sätze erhellt aus folgenden Beispielen: Sind $A_1$, $A_2$, $A_3$ Ecken eines regulären Dreiecks in einem Kreise, und ist $P$ ein Punkt dieses Kreises, der zwischen $A_1$ und $A_3$ liegt, so ist:

$$PA_1 - PA_2 + PA_3 = 0,$$
$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = 2s^2,$$
$$-PA_1 \,.\, PA_2 + PA_1 \,.\, PA_3 - PA_2 \,.\, PA_3 = -s^2,$$
$$PA_1^4 + PA_2^4 + PA_3^4 = 2s^4,$$
$$PA_1^2 \,.\, PA_2^2 + PA_2^2 \,.\, PA_3^2 + PA_1^2 \,.\, PA_3^2 = s^4,$$

wo $s$ die Seite des regulären Dreiecks bedeutet. Aehnliche Sätze hat man für andere reguläre Figuren, z. B. für das Fünfeck $A_1A_2A_3A_4A_5$. Ist $P$ ein Punkt des umbeschriebenen Kreises zwischen $A_1$, $A_5$, so ist

$$PA_1 - PA_2 + PA_3 - PA_4 + PA_5 = 0$$

u. a. m. Ueberhaupt: Verbindet man irgend einen Punkt $P$ eines Kreises mit den Ecken eines regulären Polygons, das dem Kreise einbeschrieben ist und das eine ungerade Zahl $n$ von Ecken hat, durch Strahlen von der Länge $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, so ist

$$q_1^p - q_2^p + q_3^p - q_4^p + \cdots + q_n^p = 0,$$

wenn $p$ ungerade und kleiner als $n$, ferner:

$$q_1^p + q_2^p + q_3^p + q_4^p + \cdots + q_n^p = \text{Const.},$$

wenn $p$ gerade und kleiner als $2n$ ist.

Hieran schliessen sich dann noch allgemeinere Sätze und Betrachtungen. Mz.

H. Schwendenheim. Das regelmässige 257-Eck. Pr. K. K. Staatsgymn. in Teschen. 1892. 22 S., 1893. 17 S. 8°.

Die zur elementaren Construction des regelmässigen 257-Eckes nötigen Gleichungen leitet der Verf. in einer Weise ab, die etwas von den Methoden, welche Richelot in seinen bekannten Arbeiten (Journ. für Math. IX) angewandt hat, verschieden ist. Er giebt in der Arbeit die zur Bezwingung des Problems nötigen Tabellen und schreibt am Schlusse den vollständig ausgerechneten Ausdruck für $\cos\frac{2\pi}{257}$ hin, welcher natürlich eine für die Ausführung der Construction nicht gerade ermutigende Länge hat, da er sich über 12 Seiten der Arbeit erstreckt. Hau.

S. Gatti. Un teorema sul triangolo. Periodico di Mat. VII. 65-66.

Ist $AB$ die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks $ABC$, und ist die Verbindungslinie des Fusspunktes $F$ der Höhe durch $B$ mit dem Mittelpunkte $N$ von $BC$ zur Höhe $AE$ parallel, so schneidet der Kreis, welcher durch die Mittelpunkte der Dreiecksseiten geht, die Seiten und die Höhen in einem regulären Achteck. (Die Winkel an der Basis $A$ und $B$ sind $67\frac{1}{2}°$.) La.

J. Neuberg. Sur les triangles inscrits et égaux à un triangle donné. Mathesis (2) II. 195-196.

Geometrischer Beweis eines Tucker'schen Satzes.

Dml. (Lp.)

V. Reyes y Prosper. Resolución de un problema propuesto por Jacobo Steiner. Progreso mat. II. 147-148.

V. Retali. Sopra un problema di geometria. Progreso mat. II. 345-347.

Denjenigen Punkt eines Kreises zu bestimmen, von welchem aus die drei Lote auf die Seiten eines gegebenen eingeschriebenen Dreiecks zu fällen sind, so dass die drei Fusspunkte in einer Geraden liegen, die zu einer gegebenen Richtung parallel ist. Der durch den ersten Verfasser gegebenen Lösung dieser bekannten Aufgabe fügt Hr. Retali drei andere hinzu. Lp.

---

F. da Ponte Horta. Dois theoremas de geometria elementar. Teixeira J. XI. 3-4.

Wenn drei Kreise sich in einem und demselben Punkte $P$ schneiden und ihre übrigen drei Schnittpunkte in einer Geraden liegen, so liegen die Mittelpunkte der drei betrachteten Kreise mit dem Punkte $P$ auf einem Kreise. Umkehrung dieses Satzes.

Tx. (Lp.)

---

R. Lachlan. On coaxal systems of circles. Quart. J. XXVI. 129-144.

Der Verfasser giebt in der Einleitung selbst den Inhalt seiner Arbeit an: Es werden die Haupteigenschaften der Kreisbüschel (coaxal circles) in einfacher Weise rein geometrisch hergeleitet. Dabei erweist es sich als besonders vorteilhaft, metrische Beziehungen zwischen Kreisen durch deren „Potenz“ (Quadrat ihrer Centrale, vermindert um die Quadrate ihrer Radien) auszudrücken. Der bekannte Fundamentalsatz: Wenn man von einem beliebigen Punkte $P$ Tangenten an zwei Kreise zieht, so ist die Differenz ihrer Quadrate gleich dem doppelten Rechteck aus dem Lote von $P$ auf die Potenzlinie und dem Abstand ihrer Mittelpunkte (Casey S. 113), erscheint hier nur als Specialfall eines viel allgemeineren. Dieses führt dann zu anderen wichtigen Sätzen, die zwar bekannt, deren hier gegebene einfache Beweise aber jedenfalls neu sind.

Die letzten Sätze endlich werden dann angewandt, erstens um einige Eigenschaften inverser Figuren zu betrachten, zweitens um eine Methode herzuleiten, welche mit derjenigen der reciproken Polaren eine gewisse Aehnlichkeit besitzt. Lg.

---

A. LARMOR. On the contacts of systems of circles. Lond. M. S. Proc. XXIII. 135-157.

Es wird die von Casey aufgestellte Bedingung zwischen den gemeinsamen Tangenten von vier Kreisen, welche erfüllt sein muss, damit diese Kreise einen anderen berühren, einer erschöpfenden Discussion unterzogen, erweitert und dann auf andere Aufgaben, z. B. die Apollonische Berührungsaufgabe, angewandt.

Lg.

---

M. FOUCHÉ. Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné. Nouv. Ann. (3) XI. 227-244, 331-349, 404-424.

Nach einer Anmerkung S. 228 scheinen die hier vorgetragenen Theorien über das Berühren und Schneiden von Kreisen in Frankreich neu zu sein; bei uns in Deutschland sind sie bereits in die Lehrbücher übergegangen. So findet sich z. B. théorème IV: „Les cercles isogonaux à trois cercles donnés se répartissent en quatre faisceaux tels que tous les cercles d'un même faisceau ont pour axe radical commun l'un des axes de similitude des trois cercles donnés" als Satz 145 bei Ernst & Stolte, Lehrbuch der Geometrie, Strassburg 1886: „Sämtliche Kreise, welche drei gegebene berühren oder unter gleichen, bezw. Supplementwinkeln schneiden, gehören vier Kreisbüscheln an, deren Potenzaxen die Aehnlichkeitsaxen der gegebenen sind", und die in théorème II gegebene Lösung der Hauptberührungsaufgabe findet sich in dem deutschen Buch bei der Aufgabe 901. Es sei hinzugefügt, dass auch Petersen in „Methoden und Theorien", Kopenhagen 1879, unter No. 403 eine einfache und elegante Lösung derselben Aufgabe giebt durch Benutzung des Satzes: die Potenzlinie zweier Kreise schneidet einen Kreis, der beide berührt, und eine der gemeinschaftlichen Tangenten unter

gleichen Winkeln. — In der zweiten Fortsetzung der vorliegenden Arbeit wird die Theorie auf Kugelkreise ausgedehnt. Lg.

---

S. Catania. Variazioni e limiti dei triangoli isobaricentrici e inscritti in un dato cerchio. Periodico di Mat. VII. 142-146.

Die Untersuchung wird geführt ohne Benutzung der Differentialrechnung. Es möge hier das folgende Resultat hervorgehoben werden: giebt es unter den einem Kreise eingeschriebenen isobarycentrischen Dreiecken nur ein gleichschenkliges, so hat dieses die grösste Fläche; giebt es deren zwei, so ist das eine ein Maximum, das andere ein Minimum. Vi.

---

J. Junker. Geometrische Untersuchungen über bicentrische Vierecke. Pr. (No. 476) Realsch. Crefeld. 20 S. 4°. Mit 2 Fig.-Taf.

Aus den Elementen der Planimetrie kennt man die Relation, welche bei einem Dreieck zwischen den Radien $r$ und $\varrho$ des Umkreises und Inkreises und der Entfernung $p$ ihrer Centra bestehen muss. Für das Viereck gab die analoge Relation Nicolaus Fuss in den Acta Nova Petrop. (1798). Für Polygone von 5, 6, 7, 8 Seiten entwickelte Steiner die Relation, welche dafür sorgt, dass das Polygon einem Kreise um- und einem Kreise einbeschreibbar ist. Dann bewies Poncelet in seinem Traité des propriétés projectives des figures den Satz, dass, wenn irgend ein Polygon zugleich einem Kegelschnitt einbeschrieben, einem andern umbeschrieben ist, eine unendliche Menge von Polygonen gleicher Seitenzahl existirt, welche dieselbe Eigenschaft inbezug auf beide Curven haben. Die allgemeine Relation aber, welche zwischen dem Radius $r$ des Umkreises eines bicentrischen $n$-Ecks, dem Radius $\varrho$ des Inkreises desselben und dem Abstand $p$ ihrer Centra besteht, erkannte erst Jacobi (J. für Math. III. 376-389. 1828), indem er die gesuchte Bedingungsgleichung mit der Teilung eines ganzen elliptischen Integrals in $n$ gleiche Teile in Zusammenhang brachte. Der Verfasser der vorliegenden Abhandlung discutirt nun eingehend die Figur des bi-

centrischen Vierecks, namentlich den Satz, dass die Centrale der beiden Kreise eines solchen Vierecks durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht. Sein Ausgangspunkt ist der Satz, dass die Tangenten in den Endpunkten zweier sich in einem Punkte $P$ senkrecht schneidenden Sehnen ein bicentrisches Viereck bilden. So gehört durch die $\infty^1$ Paare senkrechter Sehnen, die sich in $P$ schneiden, zu jedem Punkte $P$ ein System von $\infty^1$ bicentrischer Vierecke, das näher erörtert wird. Namentlich ergiebt sich für dieses System, dass das Product der Diagonalen $e$ und $f$ nur von $p, r, \varrho$ abhängt, also constant ist, nämlich gleich $\frac{4\varrho^2}{\varrho^2-p^2}(2\varrho^2-p^2)$. Für den Umfang $U$ erhält man $\frac{2\varrho ef}{\varrho^2-p^2}$, für den Inhalt $\frac{\varrho^2 ef}{\varrho^2-p^2}$. Auch ergiebt sich, dass das Product der Abstände der auf einander folgenden Berührungspunkte constant ist, und zwar gleich $4\varrho^2(\varrho^2-p^2)$. Aus solchen Relationen gewinnt der Verfasser dann die gesuchte Relation zwischen $r, \varrho, p$, nämlich

$$r^2(\varrho^2-p^2)^2 = \varrho^4(2\varrho^2-p^2).$$

Weitere Betrachtungen der Figur führen den Verfasser dann im letzten Capitel zu der Lösung eines von Herrn Schlömilch in seiner Zeitschrift (XXIII. 193-194) aufgestellten Problems, das folgendermassen lautet: „Auf der Peripherie eines Kreises sind drei Punkte $A$, $B$, $C$ gegeben. Gesucht wird ein vierter Punkt derart, dass $ABCD$ ein bicentrisches Viereck ist.“ Der Verfasser findet für den Mittelpunkt des Inkreises eines solchen Vierecks ausser einer Winkelhalbirenden als dem einen Orte für den zweiten Ort den Kreis, der den Pol der gegenüberliegenden Sehne zum Centrum hat und der durch die Endpunkte dieser Sehne hindurchgeht. So erhält man aus den drei Winkelhalbirenden sechs Centra von Inkreisen bicentrischer Vierecke, woraus sich dann sechs Lösungen der Schlömilch'schen Aufgabe ergeben, welche sich auf drei reduciren, wenn man die Berührung von Seitenverlängerungen ausschliesst. Auf jedem der drei Bogen $BC$, $AC$, $AB$ liegt einer der gesuchten Punkte $A_1$, $B_1$, $C_1$. Die Eigenschaften des Sechsecks $AC_1BA_1CB_1$ werden aufgedeckt. In ihm ist die Summe dreier nicht zusammenhängender Seiten gleich der Summe der drei andern,

das Product aller sechs Seiten $(2r\varrho^2)^2$, wo $r$ der Radius des Umkreises, $\varrho$ der des Inkreises von $ABC$ ist. Endlich schneiden sich auch $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ in einem einzigen Punkte. Scht.

---

FRÉTILLE. Problème de Pappus. J. de Math. élém. (4) I. 139-141.

Neue Lösung des im Titel genannten Problems. Gz.

---

J. S. MACKAY. The triangle and its six scribed circles. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. I. Williams and Norgate. London and Edinburgh. IV + 140 S. (1894.)

Die im Februar 1883, besonders in Folge der Bemühungen des leider dahingeschiedenen A. Y. Fraser gegründete Edinburgher Mathematische Gesellschaft hat soeben den ersten Band ihrer Verhandlungen veröffentlicht, nachdem das Erscheinen aus Mangel an Mitteln so lange verschoben war. Das hauptsächliche Interesse an dem Buche knüpft sich an die Abhandlung des Hrn. J. S. Mackay über „The triangle and its six scribed circles". Nach der Vorlesung der Abhandlung (13. April 1883) wurde der Wunsch geäussert, dass die Sammlung der Dreieckseigenschaften so umfassend wie möglich gestaltet werden möchte; es hat sich aber als unausführbar herausgestellt, das gesamte Manuscript zu drucken, und was nun gegeben ist, entspricht so genau wie möglich dem Inhalte der ursprünglichen Abhandlung. Ein Teil davon, den Feuerbach'schen Kreis betreffend, ist in den Bänden II und XI der Verhandlungen abgedruckt und wird im nächsten Jahrgange der F. d. M. berücksichtigt werden. Die Schrift, so wie sie jetzt vorliegt, ist ein sehr schätzenswerter Beitrag zur Geschichte des Dreiecks bezüglich der in ihr besprochenen Sätze. Die ersten Entdecker derselben, die Entstehung der Namen für Punkte, Linien und Kreise und die verschiedenen Anwendungen derselben von verschiedenen Schriftstellern werden ganz vollständig behandelt. Die weniger bekannten englischen Zeitschriften sind gründlich durchgearbeitet worden mit teilweise überraschenden Ergebnissen, und dieser Umstand dürfte der Arbeit für festländische Mathematiker einen besonderen Wert verleihen. Bei der Behandlung des Gegenstandes ist die Regel beobachtet worden, dass, wo-

fern nicht ein besonderer Grund für das Gegenteil vorlag, einfach der erste Entdecker eines Satzes angemerkt wurde. Um ferner die Abhandlung in handlichen Grenzen zu halten, wurden Aufgaben, Fragen nach Oertern und trigonometrischen Ausdrücken in Bezug auf das Dreieck ausgeschlossen. Zu Anfang wird eine beachtungswerte systematische Bezeichnungsweise für Punkte, Linien, Flächen eingeführt. Die abgehandelten Gegenstände sind: 1) Schwerpunkt. 2) Umkreiscentrum. 3) Inkreiscentrum. 4) Ankreiscentren. 5) Höhenschnitt. 6) Euler'sche Gerade. 7) Beziehungen zwischen Radien. 8) Flächeninhalt. Die Abhandlung umfasst 128 Seiten mit zahlreichen gut ausgeführten Figuren. Die meisten anderen, während der ersten Sitzungsperiode gehaltenen Vorträge leben nur in ihren Titeln fort. Gbs. (Lp.)

---

E. Lemoine. Résultats et théorèmes divers concernant la géométrie du triangle, etc. Assoc. Franç. Pau. XXI. 101-132.

---

A. Poulain. Principes de la nouvelle géométrie du triangle. Paris. Croville-Mocant. 46 S. 8°. [J. de Math. élém. (4) I. 13-14, Progreso mat. II. 15-19, Anzeige von Vigarié.]

---

E. Lemoine. Étude sur une nouvelle transformation dite transformation continue. Mathesis (2) II. 58-64, 81-92.

Schon vor Erscheinen dieser Abhandlung hatte der Verfasser seine Transformations-Methode für Dreiecks-Relationen im Bull. Soc. Math. de Fr. (1891, S. 136-141) und im Recueil de l'Assoc. franç. pour l'av. des sc. (Congrès de Marseille 1891) mitgeteilt (vgl. Referate im vorigen Bande der F. d. M.). Hier wird diese Transformation eingehend besprochen und durch 142 Formeln oder Formelnpaare illustrirt, die sich sämtlich auf das Dreieck beziehen und auch einige neuere Untersuchungen bezüglich merkwürdiger Punkte und Kreise desselben mit umfassen. Scht.

---

E. Lemoine. Règle des analogies dans le triangle. Transformation continue. J. de Math. élém. (4) I. 62-69, 91-93, 103-106.

A. Poulain. Transformation des formules des triangles.
Ibid. 110-113, 136-139, 151-153.

Ueber das von Hrn. Lemoine als continuirliche Transformation bezeichnete Princip, um aus jeder allgemeinen, auf ein Dreieck bezüglichen Formel eine neue zu erhalten, ist an dieser Stelle (s. F. d. M. XXIII. 1891. 597) ausführlich berichtet worden. Den beiden bisherigen Beweisen fügt der Verfasser in dem vorliegenden Aufsatze einen neuen hinzu, der darauf begründet ist, dass sich jede zwischen den Elementen eines Dreiecks bestehende Relation auf eine Identität zwischen den trigonometrischen Functionen der Dreieckswinkel $A$, $B$, $C$ zurückführen lässt, da das lineare Element vermöge der Homogeneität aus der Relation verschwindet. Jede solche Beziehung hat also die Form

$$F(A,\ B,\ C) = 0,$$

wobei $A$, $B$, $C$ nur der Bedingung $A+B+C=\pi$ unterliegen. Man kann also an Stelle der Winkel $A$, $B$, $C$ andere nehmen, vorausgesetzt dass ihre Summe gleich $\pi$ ist; wählt man für die neuen Winkel $A'$, $B'$, $C'$ gewisse Functionen von $A$, $B$, $C$, so nimmt jene identische Relation eine neue Form an. Es folgt nun die „transformation continue en $A$" u. s. f., wie früher an dieser Stelle angegeben, und die Untersuchung der Aenderungen, welche die verschiedenen Elemente des Dreiecks hierbei erleiden; auch werden allgemeinere Sätze über Beziehungen zwischen Figuren und ihren Transformirten aufgestellt. Als Frucht der Anwendung dieser Methode sei angeführt, dass sich dem Fuhrmann'schen Kreise (Mathesis 1890, 105ff.) unmittelbar drei weitere dem Dreiecke associirte Kreise zugesellen lassen, welche ganz analoge Eigenschaften besitzen. Wegen der interessanten Einzelergebnisse muss auf den Aufsatz verwiesen werden. Am Schluss desselben wird eine Ausdehnung auf das Tetraeder in Aussicht gestellt.

Herrn Poulain erscheint das den Betrachtungen des Herrn Lemoine zu Grunde liegende Theorem nicht ausreichend begründet; er stellt daher einen neuen Beweis für das Fundamentaltheorem auf, wobei er zugleich eine Beschränkung einführt, die darauf hinauskommt, dass die Beziehung im allgemeinen rational sein muss.

Es wird dann gleichfalls auf die neue Dreiecksgeometrie eingegangen, wobei neue Begriffe wie barycentrische und trilineare Connexe aufgestellt werden und die neue Transformationsmethode eine sehr allgemeine Darstellung findet.

Uebrigens ist die Transformationsmethode implicite bereits in einem Aufsatze von E. Lucas enthalten. (Sur l'emploi, dans la géométrie, d'un nouveau principe des signes. F. d. M. VIII. 1876. 331; IX. 1877. 407.) Gz.

---

E. Vigarié. Geometría del triángulo. Algunas propriedades de los triángulos podares y de los círculos de Schoute. Progreso mat. II. 97-105, 173-176, 185-190.

In dem ersten Teile dieser Note stellt der Verf. die elementaren Eigenschaften der Fusspunktendreiecke dar; in dem zweiten Teile studirt er die Eigenschaften der Schoute'schen Kreise.

Tx. (Lp.)

---

Aug. Boutin. Exercices divers. J. de Math. spéc. (4) I. 88-90, 115-116, 163-166. J. de Math. élém. (4) I. 36-38, 69-70, 94-96, 113-115, 141-143.

Aug. Boutin. Exercices écrits. Ibid. 156-159.

Aug. Boutin. Exercices. Ibid. 179-183, 230-233, 272-278.

Die Artikel bilden zum Teil Fortsetzungen der Notizen, welche der Verfasser bereits in früheren Jahrgängen veröffentlicht hat. Es werden in den sehr zahlreichen Aufgaben die verschiedensten Gegenstände der niederen Mathematik behandelt; besonderes Interesse möchte den Mitteilungen beizumessen sein, welche sich auf die neuere Dreiecksgeometrie beziehen. Gz.

---

Aug. Boutin. Distances des points remarquables dans le triangle. J. de Mat. élém. (4) I. 248-258.

Der Aufsatz enthält eine sehr ausgedehnte und gewiss nützliche Zusammenstellung der Entfernungen der merkwürdigen Punkte eines ebenen Dreiecks. Ein Teil der Formeln ist vom Verf. für den vorliegenden Zweck neu berechnet worden. Gz.

A. Poulain. Géométrie du triangle. Quelques changements de coordonnées. J. de Math. élém. (4) I. 228-230.

An Stelle des Bezugsdreiecks wird ein neues eingeführt, dessen Scheitel die Semi-reciproken eines willkürlichen Punktes $M_0$ sind. Dadurch treten Vereinfachungen der Transformationsformeln ein, und es ergiebt sich damit ein Einblick in den Zusammenhang mancher durch die neuere Dreiecksgeometrie aufgefundenen Eigenschaften. Gz.

R. E. Anderson. The plane triangle *ABC*: Intimoscribed circles, etc. Edinb. M. S. Proc. X. 70-82.

Die erste Schar der Triaden von Kreisen ist so beschaffen, dass jeder Kreis der $m^{\text{ten}}$ Triade zwei Seiten von $ABC$ und einen der Kreise der $(m-1)^{\text{ten}}$ Triade berührt. Ist $r$ der Inkreishalbmesser, sind ferner $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Radien der $n^{\text{ten}}$ Triade, wobei $\varrho_1$ derjenige des Kreises ist, welcher die den Winkel $A$ einschliessenden Seiten berührt (entsprechend $\varrho_2, \varrho_3$), so ist

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[2n]{\varrho_2\varrho_3} + \sqrt[2n]{\varrho_3\varrho_1} + \sqrt[2n]{\varrho_1\varrho_2}.$$

Analoge Formeln werden für die Triadenscharen der aus den Ankreisen abgeleiteten Kreise gegeben. Jede Triade der vier unendlichen Scharen ist ein Beispiel der „intimoscribed circles“, sagen wir „Binnenkreise“. Danach wird eine Formel aufgestellt, welche die Halbmesser der zwölf Kreise verbindet, die die $n^{\text{te}}$ Triade der vorangehenden vier Binnenkreise bilden, und die Beziehungen werden so erweitert, dass sie den Fall jedes convexen $m$-Ecks umfassen, das einen eingeschriebenen Kreis besitzt. Für die zu $ABC$ gehörigen Kreise wird eine Klassificirung vorgeschlagen, und einige Notizen über ihre Eigenschaften werden beigebracht.

Gbs. (Lp.)

J. Hahn. Beiträge zur Geometrie des Dreiecks. Pr. (No. 638). Realsch. Heppenheim. 16 S. 4°.

I. Durch den Punkt $P$ in der Ebene des Dreiecks $ABC$ mit den barycentrischen Coordinaten $p$, $q$, $r$ sind die Ecktransversalen

$AP_a$, $BP_b$, $CP_c$ gezogen und diese dann in $A'$, $B'$, $C'$ nach dem Verhältnis $1:k$ geteilt. Für zwei Werte von $k$, für welche $k_1+k_2=1$ und $k_1k_2=2pqr:(q+r)(r+p)(p+q)$ ist, liegen $A'$, $B'$, $C'$ auf je einer Geraden. Diese beiden Geraden sind conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts, welcher die Seiten des Dreiecks $ABC$ in den Punkten $P_a$, $P_b$, $P_c$ berührt. Ist $k$ veränderlich, so umhüllen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ und die Collineationsaxe von $ABC$ und $A'B'C'$ je eine Parabel, welche alle vier von $q$ und $q'$ berührt werden. Die Eigenschaften dieser Parabeln wurden zuerst 1885 von Brocard erkannt und dann von Stoll im Zusammenhang entwickelt, an dessen Auseinandersetzungen die in dieser Abhandlung gegebenen Verallgemeinerungen anknüpfen.

II. Zieht man durch die Seitenmitten $E_a$, $E_b$, $E_c$ zu den Ecktransversalen $AP_a$, $BP_b$, $CP_c$ die Parallelen und bestimmt auf der ersten den Punkt $A''$ so, dass $a=k'p(q+r)$, und entsprechend $B''$, $C''$, so giebt es wieder zwei Werte von $k$, für welche $A''$, $B''$, $C''$ auf je einer Geraden liegen; diese erfüllen die Bedingungen $k_1+k_2=2(qr+rp+pq)$ und $k_1k_2=3pqr(p+q+r)$. Die beiden Geraden $h$ und $h'$ sind conjugirte Durchmesser des Kegelschnitts, der den Schwerpunkt $E$ zum Mittelpunkt hat und die Seiten des Dreiecks in $E_a$, $E_b$, $E_c$ berührt. Die drei Geraden $BC''$, $CA''$, $AB''$ umhüllen drei Parabeln, welche von $h$ und $h'$ berührt werden. $h$ und $h'$ stehen senkrecht zu einander, wenn $P$ auf der Kiepert'schen Hyperbel liegt. Ist $P$ der Höhenpunkt, so ist die Umhüllungscurve von $B''C''$ eine Artzt'sche Parabel. Lg.

---

B. Sollertinsky. Los centros de las paralelas iguales. Progreso mat. II. 249-251.

Das Centrum gleicher Parallelen ist derjenige Punkt, für welchen die Parallelen zu den Seiten des Bezugsdreiecks, die durch diesen Punkt gezogen und von den Seiten begrenzt werden, gleiche Länge haben. Sätze zur Kenntnis dieses Punktes. Lp.

---

E. Valdès. Sur la géométrie du triangle. Nouv. Ann. (3) XI. 249-250.

Neue Sätze über die Gegenmittellinie und den Punkt von Lemoine, sowie Erweiterungen einiger Eigenschaften der Simsonlinie. Ohne Beweis. Lg.

---

E. BERTRAND. Note sur quelques propriétés du triangle. Mathesis (2) II. 130-134.

Bei einem spitzwinkligen Dreiecke $ABC$ seien $AH_a$, $BH_b$, $CH_c$ die drei Höhen, $P$ ihr Schnittpunkt; ferner $AH'_a$, $BH'_b$, $CH'_c$ die Höhen der Dreiecke $AH_bH_c$, $BH_cH_a$, $CH_bH_a$; endlich $P_a$, $P_b$, $P_c$ die Höhenschnitte dieser Dreiecke. Der Verf. beweist die Existenz dreier Ellipsen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und untersucht ihre Eigenschaften. Die Ellipse $\alpha$ berührt die Seiten $AB$ und $AC$ in $H_c$ und $H_b$ und besitzt die Punkte $H_a$ und $H'_a$ zu Brennpunkten; entsprechend für die Ellipsen $\beta$ und $\gamma$. Dml. (Lp.)

---

A. CUNNINGHAM. On the circle perpend-feet pencil and orthocentral axis of a complete quadrilateral. Messenger (2) XXI. 188-191.

Ausdehnung der für den Feuerbach'schen Kreis und gewisse Linien des Dreiecks gültigen Sätze auf das vollständige Vierseit und die vier von seinen Seiten gebildeten Dreiecke.

Glr. (Lp.)

---

J. NEUBERG. Sur l'hyperbole de Kiepert. Mathesis (2) II. 241-246.

Darlegung der Haupteigenschaften der Kiepert'schen Hyperbel (durch die drei Ecken, den Höhenschnitt und den Schwerpunkt eines Dreiecks). Dml. (Lp.)

---

F. PRIME. Sur les points de Brocard. Mathesis (2) II. 194-195.

---

R. C. T. NIXON. Elementary plane trigonometry. Oxford. Clarendon Press. XVIII + 380 S. [Nature XLVI. 488.]

Von allen Lehrbüchern der ebenen Trigonometrie, welche als „elementar" bezeichnet sind, giebt dieses wohl die vollständigste

uns bekannte Darstellung des Gegenstandes. Von complexen Zahlen wird nicht Gebrauch gemacht; doch findet sich bei der Erörterung der Reihen manches, was man sonst nach der Einführung der complexen Zahlen erst erledigt. Wir sind nicht ganz von der Zweckmässigkeit eines Verfahrens überzeugt, welches besonders ausgeklügelte obschon geistvolle Kunstgriffe mit Umgehung des Gebrauches von $\sqrt{-1}$ an die Stelle der merkwürdig einfachen und lehrreichen Beweise setzt, die von dem Moivre'schen Satze abhängen. Das Verfahren lässt ein zu grosses, nicht gerechtfertigtes Misstrauen gegen Herleitungen durchblicken, welche die complexen Zahlen benutzen, und (ein wichtigerer Einwand) die völlige Aufhellung mancher Schwierigkeiten in der elementaren Algebra wird auf diese Weise zu lange verschoben. Wenn wir dieses sagen, so können wir andererseits gern hinzufügen, dass die Behandlung durchweg gründlicher und wissenschaftlicher ist, als man in elementaren Büchern gewohnt ist; so wird der periodische, functionale Charakter der trigonometrischen Verhältniszahlen von Anfang an gehörig betont, und von graphischer Darstellung wird freier Gebrauch gemacht. Ein beträchtlicher Platz wird den Identitäten, Eliminationen, geometrischen Anwendungen, Reihen und Factoren eingeräumt. Vieles davon könnte man mit Recht in Lehrbücher der Geometrie oder Algebra verweisen; doch steht es sicherlich besser hier, als anderswo gar nicht, und nur sehr wenige unserer (englischen) gangbaren Lehrbücher gebrauchen trigonometrische Functionen. Der Druck des Buches ist ausgezeichnet; doch ist der Gebrauch von Zusammenziehungen nach unserer Meinung übertrieben und die Bezeichnung für sie nicht gerade hübsch. In einigen untergeordneten Punkten könnten Verbesserungen Platz greifen; aber als Ganzes betrachtet halten wir das Buch für sehr gut. Gbs. (Lp.)

---

W. Madel. Die wichtigeren Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Für den Schulgebrauch und zum Selbststudium zusammengestellt und aufgelöst. Berlin. Max Rüger. IV + 63 S. 8°.

Der Verfasser giebt hier einen den Zwecken der Schüler oberer

Klassen dienenden Leitfaden zur Uebung in der Bearbeitung trigonometrischer Aufgaben. Er hat dies aber nicht so eingerichtet, dass er eine grössere Zahl von allgemeinen Vorschriften und Regeln vorangestellt hätte, sondern er ist gleich an die wirkliche Lösung von 305 Aufgaben, die vom Leichteren zum Schwereren fortschreiten, gegangen. Diese Lösungen hat er in knapper Form gegeben, die meisten der dabei gebrauchten Formeln nicht erst entwickelt, so dass für die Selbstthätigkeit des Schülers noch Raum genug übrig bleibt. Die in den Auflösungen befolgte Methode ist die, dass immer zuerst die Winkel berechnet werden, und es ist sehr nützlich, dass die Schüler sich diese Methode auch zu eigen machen, weil sie manche Erleichterung ihrer Arbeit dadurch haben. Die Aufgaben selbst sind in grosser Mannigfaltigkeit und so zahlreich, dass fast keine von solchen, die auf eine höhere Schule gehören, vermisst wird.

Mz.

---

E. W. Hobson and C. M. Jessop. An elementary treatise on plane trigonometry. Cambridge. University Press. VIII + 299 S.

Eine klare und zielbewusste Darstellung der Elemente der ebenen Trigonometrie; zahlreiche Uebungsbeispiele. Gbs. (Lp.)

---

J. M. Schlögel. Flächenbild des Carnot'schen $\pm 2bc\cos\alpha$. Hoffmann Z. XXIII. 412-416.

M. Cantor. Rührt der Cosinussatz von Carnot her? Hoffmann Z. XXIII. 496.

Im Anschluss an die im ersten Artikel gewählte Bezeichnung teilt Hr. Cantor mit, dass der Cosinussatz für das Dreieck sich schon bei Vieta findet. Lp.

---

C. A. Laisant. Constructions et formules relatives au triangle. Nouv. Ann. (3) XI. 209-212.

Es werden aus allgemeinen Formeln interessante Folgerungen gezogen, z. B.

$$bc-(s-a)^2 = ca-(s-b)^2 = ab-(s-c)^2$$
$$= s^2-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{abc}{s} = 4r\varrho,$$
$$\frac{a(s-a)}{a_1} = \frac{b(s-b)}{b_1} = \frac{c(s-c)}{c_1} = \varrho,$$

wo $a_1$, $b_1$, $c_1$ die Seiten des Dreiecks sind, welches die Halbirungslinien der Aussenwinkel bilden;

$$a^3+3a^2(s-a)\cos\frac{A}{2}+3a(s-a)^2\cos A+(s-a)^3\cos\frac{3A}{2} = s^3-3s\varrho^2,$$
$$3a^2(s-a)\sin\frac{A}{2}+3a(s-a)^2\sin A+(s-a)^3\sin\frac{3A}{2} = 3s^2\varrho-\varrho^3.$$

Lg.

---

A. Tramm. Ein Fundamentalfall der Dreiecksberechnung. Pr. (No. 128) Gymn. Anklam. 29 S. 4°.

Durch Zusammenstellung und Auflösung von 487 trigonometrischen Aufgaben über das ebene Dreieck, welche sich alle bequem auf die Grundform $a$, $\alpha$, $b+c$ zurückführen lassen, sucht der Verfasser nachzuweisen, „dass es angezeigt ist, die drei Grundformen $a$, $\alpha$ und $b+c$ oder $b-c$ oder $h_a$ in viel schärferer Hervorhebung, als es bisher in den Lehrbüchern geschehen, an die Spitze der Lehre von der Dreiecksberechnung zu stellen“. Lg.

A. Klippert. Zwei Abschnitte aus der ebenen Trigonometrie. Pr. (No. 391) Gymn. Hersfeld. 30 S. 4°.

Der Verfasser liefert zum Gebrauch für seine Schüler und als Ergänzung des bei ihm eingeführten Buches von Kambly, im Anschluss und mit Benutzung der bekannten Lehrbücher von Gallenkamp, Reidt u. a., eine ausführliche Bearbeitung der beiden Abschnitte: a) Anwendung trigonometrischer Functionen auf die Berechnung algebraischer Ausdrücke, b) analytische Behandlung trigonometrischer Dreiecksaufgaben. Lg.

---

Sp(aczinski). Rationale rechtwinklige Dreiecke. Spaczinski's Bote No. 145. (Russisch.)

Einige metrische Eigenschaften der Linien, die in Verbindung stehen mit den rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten unter einander commensurabel sind. Derartiges findet man z. B. in der Abhandlung von H. Rath: Die rationalen Dreiecke (Grunert's Archiv LVI. 188-224, F. d. M. VI. 1874. 105). Si.

---

H. Wehner. Leitfaden für den stereometrischen Unterricht an Realschulen. Leipzig. B. G. Teubner VIII + 54 S. 8°.

Das Buch ist für die erste Klasse der sächsischen Realschulen geschrieben und giebt im Gegensatz zu den aus grösseren Werken entlehnten Bruchstücken ein „mit geringeren Mitteln hergestelltes kleineres, aber einheitliches Gebäude“. Von den Grundbegriffen ausgehend, werden in Abschnitt I (S. 1-18) systematisch die Ebene und die Gerade und dann in Abschnitt II (S. 19-36) die einfachen Körper dem Inhalte und der Oberfläche nach behandelt in dem Umfange, welchen auch die preussischen Lehrbestimmungen für den propädeutischen Unterricht in der Untersecunda vorschreiben. Der Abschnitt III (S. 40-54) enthält 141 mit Rücksicht auf Bildungswert und die Forderungen des praktischen Lebens gut gewählte Aufgaben. Die Beweise sind möglichst einfach gehalten und ihre Analysis und Synthesis kurz, aber vollständig aufgeführt. Die Figuren sind sauber und deutlich, Druck und Papier sehr gut, so dass das Büchlein allen Fachcollegen an Realschulen als brauchbares Hülfsmittel empfohlen werden kann. Lg.

---

W. Woolsey Johnson. Some theorems relating to groups of circles and spheres. American J. XIV. 97-114.

Cayley hatte in seinen frühesten Arbeiten das Theorem für die Multiplication zweier Determinanten an die Carnot'sche Aufgabe angeknüpft, die algebraische Relation zu finden, die zwischen den zehn Entfernungen von fünf Punkten im Raume, wie man a priori erkennt, notwendig bestehen muss. Dieselbe Methode, welche dort angewandt ist, führt auch zu der Relation zwischen den Seiten und Diagonalen eines beliebigen ebenen Vierecks. Da es unmög-

lich ist, in den Rahmen einer referirenden Zeitschrift complicirte Determinanten-Relationen zu bringen, so genüge es, hervorzuheben, dass die Resultate des Verfassers sich auf den allgemeineren Fall beziehen, wo Kugeln und Kreise einer Ebene statt der Punkte im Raume oder in der Ebene vorliegen. Scht.

---

H. Thieme. Die stereometrischen Constructionsaufgaben. Hoffmann Z. XXIII. 561-569.

J. C. V. Hoffmann. Stereometrisches Zeichnen und Ausbildung der Mathematiklehrer. Hoffmann Z. XXIII. 569-572.

Lp.

---

J. M. Thiel. Nieuw bewijs voor de stelling van Euler, bewezen voor convexe lichamen. Nieuw Archief XIX. 98-99.

Drei Beweise für den Euler'schen Satz $k+2=f+e$.

Mo.

---

C. Hossfeld. Ueber einen stereometrischen Satz von Schlömilch. Schlömilch Z. XXXVII. 382.

Es wird nur ein Satz von der vierseitigen Pyramide (Z. XXVII. 380) auf eine $2n$-seitige erweitert; ohne Beweis. Lg.

---

L. Bénézech. Problèmes de la géométrie du tétraèdre. J. de Math. élém. (4) I. 153-156.

Die Notiz schliesst sich früheren Arbeiten des Verfassers (F. d. M. XXIII. 1891. 720) an; es handelt sich hier um die Bestimmung gewisser Coordinaten aus gegebenen. Gz.

---

L. Vautré. Démonstrations nouvelles pour trois théorèmes du cinquième livre. J. de Math. élém. (4) I. 5-7.

Einfache Beweise für drei elementare stereometrische Sätze.

Gz.

---

L. Vautré. Démonstration directe du second théorème de Guldin. J. de Math. élém. (4) I. 33-34.

Es wird der Guldin'sche Satz über das Volumen des durch Rotation eines Dreiecks um eine beliebige in seiner Ebene gelegene Axe entstehenden Rotationskörpers unmittelbar und ohne Unterscheidung verschiedener Fälle bewiesen. Gz.

---

A. Lugli. Volume del segmento sferico a due basi. Periodico di Mat. VII. 25-28.

Eine Streitfrage, welche in Hoffmann's Zeitschrift 1891 behandelt wurde, bietet Herrn Lugli die Gelegenheit, die allgemein bekannte Formel

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{r=1}^{r=n} r^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}$$

auf die Berechnung des Inhalts des Kugelsegments mit zwei Grundflächen anzuwenden. Da bei dieser Anwendung die obige Formel nur für $m=2$ oder 3 nötig ist, so kann sie in diesen Fällen als eine unmittelbare Folge der Ausdrücke für $\sum\limits_{r=1}^{r=n} r^2$ und $\sum\limits_{r=1}^{r=n} r^3$ angesehen werden. La.

---

O. Schlömilch. Ueber die Inhaltsbestimmung des Fasses. Hoffmann Z. XXIII. 107-109.

Stoll. Zur Berechnung des Rauminhalts eines Fasses. Hoffmann Z. XXIII. 109-114.

Franz. Zur Fassberechnung. Ibid. 114.

Dr. A. Litterarische Notizen zur Fassberechnung. Ibid. 251.

Elementare Methoden zur Herleitung des kubischen Inhaltes, wenn gewisse Voraussetzungen über die Form der Grundflächen und der Dauben gemacht werden. Referent vermisst in allen Aufsätzen die Beziehung auf die Formeln für die mechanische Quadratur, durch welche die Frage erst in die richtige Beleuchtung gebracht wird. Lp.

---

P. Mansion. Formules pour le jaugeage des tonneaux. Mathesis (2) II. 14-17.

In dieser Note vergleicht der Verfasser verschiedene für die Ausmessung von Fässern vorgeschlagene Formeln hinsichtlich ihrer Annäherung. Dml. (Lp.)

A. Lasala. Un teorema de geometría esférica. Progreso mat. II. 120-123, 262-265.

Sind $PA$, $PB$, $PC$ Quadranten dreier in $P$ sich schneidenden Hauptkreise einer Kugel, sind ferner $a$, $b$, $c$ die Schnittpunkte derselben bezw. mit einem vierten Hauptkreise, so ist

$$\frac{\sin ba}{\sin bc} : \frac{\sin Pa}{\sin Pc} = \frac{\sin BA}{\sin BC}, \text{ ähnlich für } \frac{\sin ca}{\sin cb}, \ \frac{\sin ac}{\sin ab}.$$

Nach dem Beweise dieser Formeln folgen zahlreiche Anwendungen. Tx. (Lp.)

E. Lampe. Solution of question 11453. Ed. Times LVII. 114-115.

Der Bogen $BC$ zwischen zwei Punkten $B$ und $C$ desselben Parallelkreises (Breite $\varphi$) der als Kugel vom Umfange 40000 km vorausgesetzten Erde habe die Länge $k$ Kilometer, wo $k$ eine kleine Zahl bedeutet. Man verbinde $B$ und $C$ durch den Hauptkreisbogen $(BC)$, dann ist die Differenz $BC-(BC) = k^3 \operatorname{tg}^2\varphi/24r^2$ und der Abstand der Halbirungspunkte beider Bogen gleich $\frac{1}{8}k^2 \operatorname{tg}\varphi/r$ mit Vernachlässigung höherer Potenzen von $k/r$. Lp.

H. Brocard. Nota sobre la proyección estereográfica. Progreso mat. II. 182-184.

Vereinfachung des Beweises eines die stereographische Projection eines Kreises betreffenden Satzes bei Francoeur, Traité de géodésie § 314 (1879). Tx. (Lp.)

C. Wasteels. Aire d'une figure tracée sur une sphère et formée d'arcs de petits cercles. Mathesis (2) II. 105-113.

E. Torroja. Nota relativa á la perpendicularidad de rectas y planos. Progreso mat. II. 108-110.

Schönemann. Eine Verallgemeinerung des Pythagoreischen Satzes. Schlömilch Z. XXXVII. 127.

## Capitel 4.
## Darstellende Geometrie.

J. Schlotke. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. I. Teil. Specielle darstellende Geometrie. Mit 165 Figuren. 2. Aufl. Dresden. G. Kühtmann. II + 142 S. 8°.

Das Werk soll in vier Teilen erscheinen. Der vorliegende I. Teil befasst sich mit der Darstellung in Grund- und Aufriss und in Cavalierperspective. Er behandelt die Constructionen mit Punkten, Geraden und Ebenen, ebenflächige und krummflächige Körper, krumme Flächen. Der II. Teil soll die Schattenlehre, der III. die Centralperspective, der IV. die projectivische Geometrie enthalten. Als Grundzug des Buches ist eine weise Beschränkung des Stoffes auf das Notwendige und ein didaktisch wohl abgewogenes Fortschreiten in der Entwickelung hervorzuheben. So werden z. B. die wichtigsten Constructionen zuerst an den einfachen stereometrischen Körpern in vorbereitender Weise erörtert, woran sich dann erst die Betrachtung von allgemeinerem Gesichtspunkte schliesst. Dadurch entsteht der Vorteil, dass das Buch ebensowohl den Bedürfnissen niederer als höherer Lehranstalten gerecht wird. Der Vortrag ist präcis und bündig, die Figuren sind klar und übersichtlich. Hk.

J. F. Heller. Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der darstellenden Geometrie für Realschulen. II. Teil. Für die 6. Klasse. Wien. A. Hölder. IV + 106 S. Mit 1 Figurentafel. 8°.

Der vorliegende, für Klasse VI der österreichischen Realschulen bestimmte II. Teil des Werkes befasst sich mit dem Dreikant, den Polyedern (Darstellung, Netze, Schnitte, Durchdringungen, Schatten), den krummen Linien, Kegel, Cylinder, Schraubenlinien und Schraubenflächen, Rotationsflächen II. Ordnung (Darstellung, Berührungsebenen, Schatten, Schnitte, Durchdringungen, Verwendung als geometrische Oerter). Das günstige Urteil, das (F. d. M.

XXIII. 1891. 622) hinsichtlich des instructiven Wertes, der Mannigfaltigkeit und der methodischen Gliederung der Aufgaben über den I. Teil gefällt wurde, muss auch dem II. Teil gespendet werden. (Eine Aenderung erscheint S. 53, zweite Fussnote, wünschenswert.) Hk.

---

G. Hauck. Ueber die constructiven Postulate der Raumgeometrie in ihrer Beziehung zu den Methoden der darstellenden Geometrie. Katalog der math. Ausst. München. 40 - 53.

Die Postulate für planimetrische Constructionen sind von Euklid scharf formulirt; das zwar nicht direct ausgesprochene, aber aus seinen Constructionen hervorgehende, ergänzende stereometrische Postulat lautet: „durch irgend drei beliebige Punkte des Raumes lässt sich eine Ebene legen; für jede solche Ebene sind die Postulate der Planimetrie erfüllt“. Während nach dieser Auffassung der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene, oder die Schnittgerade zweier Ebenen construirt werden kann — bemerkenswerter Weise „nicht“ linear —, ist nach der Auffassung der neueren Geometrie das gemeinsame Element einer Geraden und einer Ebene, oder dasjenige zweier Ebenen in gleicher Weise gegeben, wie in der Planimetrie mit zwei Geraden ihr Schnittpunkt. Herr Hauck weist nun nach, dass die constructiven Postulate Euklid's auf die folgenden einfacheren reducirt werden können: „Es sei möglich: 1) im Raume Punkte durch gerade Linien zu verbinden, diese Linien beliebig zu verlängern und Strecken auf ihnen abzumessen, 2) in einer einzigen Ebene Kreise zu beschreiben“. Erkennt man aber das Schnittpunktpostulat der neueren Geometrie an, so lassen sich betreffs der im Raume zu vollziehenden Operationen folgende neue Postulate aufstellen: „Es sei möglich, von einem festen Punkte (Hauptpunkte) einen Strahl nach jedem Punkte des Raumes zu ziehen, dessen Schnittpunkt mit einer festen Ebene (Hauptebene) zu bestimmen und auf ihm eine Strecke abzumessen und aufzutragen“, oder mit anderen Worten: „Für jeden Punkt des Raumes sei dessen auf ein gegebenes Projectionssystem bezogene Projection bestimmbar und seine Cote abmessbar und auf-

tragbar". Von besonderem Interesse ist es, dass die Bemühungen, die räumlichen Postulate auf ein möglichst geringes Mass zu reduciren, bezw. die praktische Ausführung der Constructionen, soweit angängig, zu vereinfachen, direct zu den Methoden der Centralprojection, der cotirten und doppelten Projection und ihren Specialfällen hinführen. Bk.

F. Graberg. Zum Bau des Massraumes. Wolf Z. XXXVII. 49-88. Mit einer Figurentafel.

F. Graberg. Grundlagen und Gebiete der Raumlehre. Wolf Z. XXXVII. 274-302.

Verf. giebt in diesen zwei Aufsätzen eine zusammenfassende Darlegung seiner Auffassung betreffs der Aufgaben und des Wesens der Raumlehre, über die in früheren Jahrgängen des Jahrbuches wiederholt berichtet worden ist. Er erklärt den „Massraum" nicht als ein System von Lagen- und Grössenverhältnissen, sondern als einen Organismus von Bewegungsvorstellungen, der die Blickbewegung und die Tastbewegungen der Hand regelt. Entsprechend der flächenhaften Ausbreitung unserer Tastorgane dient die Fläche beim räumlichen Gestalten als Bauelement, das die mannigfaltigen Bewegungsrichtungen verbindet. Die Vielseitigkeit dieser Verbindungen bedingt eine Gliederung der Raumlehre in drei Gebiete: Das „Lineargebiet" umfasst die Gestalten, bei denen Gerade sich in Ebenen bewegen, oder Ebenen durch Gerade verbunden sind. Das „Polargebiet", das sich auf dem Vierflach aufbaut, umfasst den Zusammenhang der Rundungen, wie er sich auf die Massverhältnisse des polaren Gegensatzes von gepaarten Richtungen gründet. Das „Gruppengebiet" geht von dem Verband von Regelflächen zum Strahlengewinde aus und dient dem Ueberblick über die räumliche Anordnung der Gestalten. Die Verbindung der Linien und Flächen in diesen drei Gebieten wird vom Verf. weiter ins Detail ausgeführt. Hk.

C. Burali-Forti. Sopra un metodo generale di costruzioni in geometria descrittiva. Rivista di Mat. II. 96-99.

Die vorgetragene Methode kann bezeichnet werden als eine

Verallgemeinerung der sogenannten „Münchener Perspectiv-Methode“ für schiefe Ebenen: Man findet das Bild einer ebenen Figur dadurch, dass man sich die Figur um eine Frontlinie in zur Bildebene parallele Lage gedreht denkt; das fragliche Bild ist dann mit dem Bild der gedrehten Figur centrisch collinear in Beziehung auf das Bild der Frontlinie als Collineationsaxe und den durch entsprechende Drehung herabgeschlagenen Augpunkt als Collineationscentrum. Werden bei einem Büschel von parallelen Ebenen die verschiedenen Frontlinien alle in einer durch das Auge gehenden Ebene angenommen, so sind die betreffenden Collineationen alle identisch. Die Anwendung der Methode wird an der Abbildung der Schraubenlinie und der entwickelbaren Schraubenfläche mit zur Bildebene schiefer Axe gezeigt unter Benutzung von Hülfsebenen senkrecht zur Schraubenaxe. Hk.

F. STÜLER. Die natürlichen Anschauungsgesetze des perspectivischen Körperzeichnens. Neues System der einfachsten perspectivischen Darstellungsweise. 2 Hefte. Breslau. M. Woywod. 122 S. Mit 39 Figurentafeln. 8°.

Das Buch giebt vom Standpunkte des praktischen Zeichenlehrers einen Lehrgang für den Massenunterricht im Körperzeichnen, der das empirische Zeichnen nach der Natur mit dem geometrischen Construiren verbinden und den Schüler befähigen soll, ohne Zuhülfenahme einer complicirten Theorie naturwahre Frontalbilder von einfachen Gegenständen herzustellen. Der Mathematiker findet in dem Buche freilich gar mancherlei zu beanstanden. Hk.

---

G. SCHEFFERS. Verzerrung bei perspectiver Abbildung ebener Figuren. Leipz. Ber. XLIV. 162-176.

Verf. gelangt bei der Untersuchung der Verzerrungsverhältnisse, die bei der Centralprojection ebener Gebilde auftreten, zu folgenden interessanten Ergebnissen: Es giebt in der Originalebene eine Schar von Curven, deren Contingenzwinkel im Bilde die Originalgrösse haben; sie bilden sich ab als die Schar aller Parabeln,

die $O_1$ oder $O_2$ zum Brennpunkt haben, und deren Scheiteltangenten durch $Q$ gehen ($O_1$ und $O_2$ die zwei möglichen Lagen des Collineationscentrums, wenn die Originalebene in die Bildebene umgeklappt wird, $Q$ der Hauptfluchtpunkt der Bildebene); durch jeden Punkt gehen zwei reelle Parabeln der Schar; jedes Tangentendreieck einer dieser Parabeln ist seinem Original ähnlich. Die Curven, längs denen die Contingenzwinkel die grösste Verzerrung erleiden, bestehen aus allen confocalen Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten $O_1$ und $O_2$. Eben dieselbe Curvenschar stellt zugleich die Curven grösster Verzerrung der Bogenelemente sowie der Krümmungen dar. Die Curven ohne Verzerrung der Bogenelemente und ebenso diejenigen ohne Verzerrung der Krümmung sind im allgemeinen transcendent. Hk.

---

L. Leib. Neue Constructionen der Perspective. Hoppe Arch. (2) XI. 1-13. Mit 6 Figuren.

Projicirt man einen Punkt $P$ von den zwei Centren $O_1$ und $O_2$ auf die zwei Ebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, so seien $P_{11}$, $P_{12}$, $P_{21}$, $P_{22}$ die vier Projectionen, wobei immer der erste Index sich auf die Projectionsebene, der zweite auf das Projectionscentrum beziehen möge. $K_{12}$ und $K_{21}$ seien die zwei Kernpunkte von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Bringt man ferner $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ durch Drehen um ihre Schnittlinie $s$ zum Zusammenfallen, so sei $C_{12}$ das Collineationscentrum für die Projection aus $O_1$, $C_{21}$ dasjenige für die Projection aus $O_2$. Alsdann liegen je auf einer Geraden: 1) die Punkte $K_{12}K_{21}C_{12}C_{21}$, 2) $K_{12}P_{11}P_{12}$, 3) $K_{21}P_{21}P_{22}$, 4) $C_{12}P_{11}P_{21}$, 5) $C_{21}P_{12}P_{22}$, und der Schnittpunkt von $K_{12}P_{11}$ und $K_{21}P_{22}$ liegt auf $s$. Diese Beziehungen, welche eine wertvolle Erweiterung der trilinearen Constructionen bedingen, werden vom Verf. benutzt zur Ableitung einer ganzen Reihe von neuen perspectivischen Constructionen.

Hk.

---

E. Vegetti. Osservazioni e note di prospettiva lineare. Politecnico XL. 5-17.

Ueber einige Principien, die man bei der Ausführung von

Perspectivbildern beibehalten muss, und über einige Fehler, welche dabei allgemein begangen werden. Vi.

---

E. Wälsch. Ueber eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie. Monatsh. f. Math. III. 92-96.

Es handelt sich um die Bestimmung der Geraden, deren Grundriss und Kreuzriss sich decken, wenn Grundrissebene und Kreuzrissebene in die Aufrissebene umgeklappt werden. Für jeden Punkt der Halbirungsaxe desjenigen Nebenoctanten, der mit dem Hauptoctanten die Aufrissebene gemein hat, fallen die drei Projectionen zusammen. Die Geraden, deren Grundriss und Kreuzriss zusammenfallen, bilden die Mantellinien einer Schar von ähnlichen und ähnlich liegenden Kegeln zweiter Ordnung, deren Scheitel auf der genannten Halbirungsaxe liegen; sie erfüllen also eine Strahlencongruenz (1, 2). Jeder solcher Kegel schneidet die Aufrissebene nach einer gleichseitigen Hyperbel und wird von einer zu jener Halbirungsaxe senkrechten Ebene nach einem Kreis geschnitten; derjenige, dessen Scheitel im Ursprung liegt, ist symmetrisch zur Aufrissebene, berührt die Grundrissebene und Kreuzrissebene längs den bezüglichen Grundschnitten und geht durch die Halbirungsaxe. Aus dem Gesagten folgt, dass in jeder Ebene ein Punkt existirt, dessen drei Projectionen zusammenfallen, und zwei durch diesen Punkt gehende Gerade, deren Grundriss und Kreuzriss zusammenfallen. Ist die Ebene durch ihre Spuren gegeben, so können die fraglichen Geraden als Schnittlinien des betreffenden Kegels leicht erhalten werden, wobei sich ein einfaches Kriterium für ihre Realität ergiebt. Hk.

---

W. Fiedler. Ueber eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie. Monatsh. f. Math. III. 193-197.

Anknüpfend an die vorbesprochene Arbeit des Herrn Wälsch, bringt der Verf. die fragliche Aufgabe in Beziehung zur Theorie der Erzeugnisse collinearer Strahlenbündel, indem er die Geraden, für welche sich zwei Projectionen decken, auffasst als die Schnitt-

linien je zweier entsprechenden Ebenen in congruenten projicirenden Strahlenbündeln. Bei allgemeiner Lage würden sie die Bisecanten-Congruenz (1, 3) einer Raumcurve dritter Ordnung bilden. Nun haben aber für Grundriss und Kreuzriss die bezüglichen projicirenden Bündel die unendlich ferne Ebene entsprechend gemein und erzeugen daher statt der Raumcurve dritter Ordnung einen Kegelschnitt in der unendlich fernen Ebene und eine ihn schneidende Gerade durch den Ursprung; die zugehörigen Bisecanten bilden also eine Congruenz (1, 2). Die Gerade und die von ihren Punkten nach dem Kegelschnitt gehenden Kegel sind identisch mit der Halbirungsaxe und den von ihren Punkten ausgehenden Kegeln im Aufsatz des Herrn Wälsch. Hk.

---

W. Rulf. Zur Durchdringung der Kugel mit dem geraden Kreiskegel, Satz über den Kegelschnittbüschel und die Parabel. Hoppe Arch. (2) XI. 433-438. Mit 3 Figuren.

Es wird bewiesen, dass sich die Durchdringungscurve einer Kugel und eines geraden Kegels auf die durch Kugelmittelpunkt und Kegelaxe gelegte Ebene als Parabel projicirt mit leicht zu bestimmender Scheiteltangente. Hieraus folgt der Satz: „Lässt sich durch die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels ein Kreis legen, so stehen die Scheiteltangenten der beiden Parabeln des Büschels auf einander senkrecht und sind die Chordalen des Basiskreises mit jenen zwei Kreisen, die die Gegenseiten des Kreisvierecks berühren, und deren Mittelpunkte in den durch den Mittelpunkt des Basiskreises zu den Halbirungslinien der Winkel der Gegenseiten gezogenen Parallelen gelegen sind." Die Specialisirung des geraden Kegels zum geraden Cylinder führt zu dem Satz, dass das Sub-Mittellot einer Parabelsehne gleich dem halben Parameter ist. Hk.

---

J. Bazala. Neue Beleuchtungs-Constructionen für Flächen, deren zu einer Axe normale Schnitte ähnlich und ähnlich liegend sind, im allgemeinen und für Flächen zweiten Grades im besonderen. Hoppe Arch. (2) XI. 113-131. Mit 3 Figurentafeln.

Verf. entwickelt hübsche Constructionen der Isophoten der Flächen zweiten Grades in Monge'scher, axonometrischer und centralperspectivischer Darstellung, ausgehend von folgendem Grundgedanken: Um die in irgend einer Seitenlinie (Axenschnitt) liegenden Isophotenpunkte zu erhalten, fasst man den längs der Seitenlinie berührenden Cylinder ins Auge und ermittelt dessen Isophoten, indem man durch die Flächenaxe einen Normalschnitt legt, in diesem den (Burmester'schen) Tangentialbüschel construirt und parallel zu dessen Strahlen Tangenten an den Normalschnitt zieht. Um die Zeichnung des Normalschnittes zu umgehen, denkt man ihn samt seinem Tangentialbüschel parallel mit den Cylindermantellinien auf die Ebene der Berührungscurve und von da auf einen Hauptschnitt projicirt; man erhält in der Projection eine affine Figur, an der die betreffende Construction ausgeführt wird, und überträgt schliesslich die zunächst auf dem Hauptschnitt erhaltenen Punkte durch Rückwärtsprojection auf die Seitenlinie.

Hk.

---

E. Waelsch. Ueber die Isophoten einer Fläche bei centraler Beleuchtung. Wien. Ber. Cl. 79-82. Mit 1 Textfigur.

Ueber die Tangente der Isophote, die durch einen Punkt einer central beleuchteten Fläche geht, wird ein Satz bewiesen, der die Tangentenrichtung in Beziehung zu den Krümmungsverhältnissen der Fläche in diesem Punkt setzt und also die Verallgemeinerung des bekannten Satzes vorstellt, dass die Tangente in einem Punkte der Schattengrenze conjugirt ist zu dem Lichtstrahl des Punktes.

Hk.

---

Aug. Morel. Note de géométrie descriptive sur les sections planes des cônes. J. de Math. élém. (4) I. 201-207.

Einfache, dem Gebiet der descriptiven Geometrie angehörige Betrachtungen über die ebenen Schnitte von Kegeln. Gz.

---

Roubaudi. Solution de la question de géométrie descriptive proposée au concours d'agrégation (enseignement spécial) en 1891. Nouv. Ann. (3) XI. 199-208.

Die Aufgabe betrifft die Darstellung und die Eigenschaften der Ringfläche, die durch Drehung eines Kreises um eine zu seiner Ebene parallele, aber nicht in ihr liegende Axe erzeugt wird. Die Betrachtung richtet sich besonders auf die verschiedenen Scharen von Kreisen, die auf der Fläche enthalten sind. Hk.

M. Pieri. Osservazioni geometriche intorno alle linee diurne di un orologia solare. Bollettino della Società di letture e conversazioni scientifiche di Genova. 1892.

Nicht viele Zeit ist verflossen, seitdem wir die Aufmerksamkeit der Leser des Jahrbuchs auf einen in Italien gemachten Versuch gelenkt haben, die Elemente der projectiven Geometrie auf die Gnomonik anzuwenden (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 591). Jetzt haben wir über einen zweiten, in derselben Richtung gemachten und sehr gut gelungenen Versuch zu berichten. Herr Pieri gelangt durch seine neuen Untersuchungen zu sehr bemerkenswerten Vereinfachungen der durch seinen Vorgänger (Herrn Burali-Forti) beigebrachten Constructionen und zu nicht zu verachtenden Vermehrungen der Eigenschaften, welche jener an den Sonnenuhren entdeckt hatte. Wir heben abermals hervor, dass wir den praktischen Nutzen für problematisch halten, sich mit einer Aufgabe nochmals eingehend zu beschäftigen, welche heute nur noch ein geschichtliches Interesse darzubieten scheint. Aber wir wollen nicht mit Stillschweigen übergehen, dass die Pieri'sche Abhandlung eine didaktische Wichtigkeit besitzt: sie verschafft dem Lehrer ein vortreffliches Beispiel für die Anwendbarkeit der abstracten Lehren der reinen Geometrie den leider nur zu zahlreichen Schülern gegenüber, welche den Wert jeder Theorie in Frage stellen, die in der Praxis nicht nützlich erscheint. La.

A. Laussedat. Historique de l'application de la photographie au lever des plans. Assoc. Franç. (2) XXI. 215-238.

Ein Vortrag über die Erfindung und Entwickelung der Photogrammetrie, oder, wie sie der Erfinder selbst nennt: der Metro-

photographie, in welchem Herr Laussedat unter Vorlegung seiner sämtlichen bezüglichen Arbeiten seit 1850 die Priorität der Erfindung für sich nachweist, übrigens die Verdienste seiner Nacheiferer in durchaus objectiver Weise würdigt. Neu dürfte vielen sein, dass die geometrische Construction des Grundrisses aus zwei Perspectiven, die gewöhnlich Beautemps-Beaupré zugeschrieben wird, von Laussedat selbst herrührt. Die Anregung, die er von Beautemps-Beaupré empfing, beschränkt sich darauf, dass dieser empfahl, bei Aufnahmen aus mehreren Standpunkten, um Verwirrungen vorzubeugen, perspectivische Freihandskizzen des Geländes von den einzelnen Standpunkten aus zu zeichnen und in diese die mit dem Spiegelkreis gemessenen Horizontalwinkel der hervorragenden Punkte einzuschreiben. Dieses Verfahren wurde dann von Herrn Laussedat dahin geändert, dass er die perspectivischen Skizzen mittels der Camera clara zeichnete und des weiteren die Horizontalwinkel nicht mittels des Spiegelkreises, sondern direct aus den Perspectiven bestimmte. Damit erst war das Princip der Metrophotographie gegeben. Später benutzte er dann an Stelle der Camera clara die Camera obscura und seit 1859 die photographische Camera, die er zum „photothéodolite“ ausbildete. — Leider wurde auch in Deutschland der Versuch gemacht, Herrn Laussedat das Verdienst dieser hervorragenden Erfindung streitig zu machen. In wissenschaftlichen Kreisen jedoch war es längst unbestritten anerkannt. Wenn ausserhalb dieser Kreise behauptet wurde, Laussedat habe selbst mit seiner Methode keine befriedigenden praktischen Erfolge zu erzielen vermocht, so wird diese Legende durch die erstaunlich reiche Fülle seiner wohlgelungenen Aufnahmen (sie wurden von dem Vortragenden sämtlich mittels Skioptikons zur unmittelbaren Anschauung gebracht) gründlich zerstört. Hk.

F. Steiner. Die Anwendungen der Photographie auf dem Gebiete des Bau- und Ingenieurwesens mit besonderer Berücksichtigung der Photogrammetrie. Techn. Blätter XXII. 134-164 (1890).

Nachdem der Verfasser die Bedeutung der Photogrammetrie

für die Technik im allgemeinen hervorgehoben hat, wendet er sich der Besprechung der einzelnen hierbei vorkommenden Aufgaben zu. Besonders eingehend wird das Problem der fünf Punkte behandelt, welches dazu dient, aus der Photographie eines Terrainteils, dessen Situationsplan man besitzt, den Standpunkt und die Bildweite des Apparates zu bestimmen. Geometrisch kommt diese Aufgabe darauf hinaus, eine gerade Punktreihe $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ in perspectivische Lage zu fünf Punkten einer Ebene zu bringen.

F. K.

---

F. Steiner. Das Problem der fünf Punkte. Eine Aufgabe der Photogrammetrie. W. Oest. Ing. u. Arch. XVI. 214-217 (1891).

M. Kinkel. Das Problem der fünf Punkte. Ib. XVI. 292.

Das geometrische Problem ist im vorhergehenden Referat bezeichnet.

F. K.

---

E. Brauer. Hauck-Brauer's Perspectiv-Zeichenapparat. Z. Deutsch. Ing. XXXV. 782-786 (1891).

Der Apparat dient dazu, aus zwei Parallelprojectionen auf mechanischem Wege eine perspectivische Ansicht abzuleiten. Der zu Grunde liegende geometrische Gedanke wurde von Herrn Hauck in der Phys. Ges. zu Berlin im Jahre 1883 entwickelt; vergl. auch Festschrift der Königl. Techn. Hochschule zur Einweihung des neuen Gebäudes (1884).

F. K.

---

A. J. Boguslavski. Universaler Skoliograph. Schriften d. Moskauer Section d. russ.-kais. technischen Ges. 1891. No. 3-4.

Dieses von Herrn Boguslavski schon im Jahre 1883 erfundene Instrument besteht aus vier durchschnittenen metallenen Linealen $DB$, $BC$, $CA$, $AD$, welche in $B$ und $A$ mit Scharniren verbunden und in $D$ und $C$ mit Spitzen behaftet sind. Die Spitzen $D$ und $C$ sind längs den Linealen $DB$, $DA$ und $CB$, $CA$ bezw. beweglich. Sind $A$, $B$ wie $D$ fest, so beschreibt $C$ eine Curve zweiter Ordnung; beschreibt aber $D$ eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die in Punkten

$A$, $B$ und $E$ (die Lage von $C$, wenn $DB$ und $DA$ in eine Gerade zusammenfallen) vielfache Punkte bez. $p^{ter}$, $q^{ter}$, $r^{ter}$ Ordnung besitzt, so wird $C$ eine unicursale Curve $(2n-p-q-r)^{ter}$ Ordnung beschreiben. Der Skoliograph verwirklicht also die quadratische Transformation mit drei reellen Doppelpunkten und kann als Hülfsmittel zu deren Studium dienen. Si.

---

von Mecenseffy. Theoretisch-praktisches über das Zeichnen von Schneckenlinien. Deutsche Bauztg. XXV. 298-300 (1891).

Sind von einer logarithmischen Spirale vier Tangenten gegeben, welche auf einander senkrecht stehen, und zwar so, dass zwischen I und II keine Tangente liegt, die auf I senkrecht steht, zwischen II und III keine, die auf II senkrecht, u. s. w., so kann man sehr leicht alle Tangenten finden, welche den gegebenen Tangenten parallel sind.

Es sei $X$ der Schnittpunkt von I und II, $Y$ der von II und III, endlich $Z$ der von III und IV. Zieht man nun $XZ$ und fällt von $Y$ ein Lot $YO$ auf diese Gerade, so ist $O$ das Auge der Spirale; verlängert man $OY$, bis IV in $U$ geschnitten wird, und errichtet in $U$ ein Lot auf IV, so erhält man eine neue Tangente. Damit kann man nun fortfahren, um zunächst eine sechste, dann eine siebente Tangente zu zeichnen. F. K.

A. J. Pressland. Geometrical drawing. London. Percival and Co. VII + 144 S.

Ein vortreffliches Büchlein. Die Behandlung der Massstäbe ist besonders gut, und das Thema der Aehnlichkeit ist seiner Bedeutung gemäss breit behandelt. Für Anfänger in der Mathematik kann sein Gebrauch mit völliger Sicherheit empfohlen werden.

Gbs. (Lp.)

---

M. d'Ocagne. Le calcul sans opération. La nomographie. Rev. des Quest. sc. (2) I. 48-82.

Darlegung der hauptsächlichsten Verfahrungsarten der graphischen Rechnung ohne Beihülfe der Algebra. 1. Vereinfachte Ver-

fahrungsarten bei der Rechnung. 2. Die zum Gebrauche verfertigten Rechentabellen. Rechenknechte und Rechenbretter. 3. Hauptvorzüge der Rechenbretter (abaques). 4. Die Rechenbretter mit doppeltem Eingange. 5. Das Princip der Anamorphose. 6. Die verallgemeinerte Anamorphose. 7. Die Erfordernisse bei der Einrichtung der Rechenbretter. 8. Die sechseckigen Rechenbretter. 9. Die Rechenbretter mit isoplethischen Punkten. 10. Schluss.

Mn. (Lp.)

R. INWARDS. On an instrument for drawing parabolas. Nature XLVI. 93.

Kurzer Auszug eines Vortrags in der Physikalischen Gesellschaft zu London. Lp.

---

R. INWARDS. On an instrument for drawing parabolic curves. Phil. Mag. (5) XXXIV. 57-59.

Die bei dem Bau des Instrumentes benutzte Eigenschaft der Parabel ist die Gleichheit der Abstände vom Brennpunkte und von der Directrix. Eine Ecke $F$ eines Rhombus ist im Brennpunkte eingelenkt, und die Gegenecke $G$ wirkt an einem Zapfen, der längs einem Spalte bewegbar ist, dessen Mittellinie die Directrix der Parabel bildet. Der zeichnende Punkt $E$ liegt auf der nicht durch $F$ gehenden Diagonale $HI$ des Rhombus, und der Winkel zwischen $EG$ und der Directrix wird als ein Rechter durch eine Leiste $EML$ fest gehalten, die in $E$ und $L$ Zapfen trägt, wobei $L$ in dem Spalt gleitet und $G$ mit $M$, dem Halbirungspunkte von $EM$, durch eine in $M$ und $G$ mit Zapfen versehene Leiste verbunden ist. Die Diagonale $HI$, auf welcher $E$ liegt, berührt natürlich in $E$ die Parabel. Gbs. (Lp.)

## Weitere Litteratur.

G. BERGER. Lehre der Perspective in kurzer, leicht fasslicher Darstellung. Auf die einfachste Methode zurückgeführt für Architekten, Bauhandwerker, Maler und Dilettanten. 10. Aufl. Leipzig. Scholtze. 12 S. u. 4 Taf. hoch 4°.

H. Hertzer. Die geometrischen Grundprincipien der Parallel-Projection. 2. Aufl. Berlin. Spaeth. 60 S. Mit 2 farb. Taf. u. 44 Holzschn. 8°.

A. Opderbecke. Die darstellende Geometrie, bearbeitet für den Unterricht an technischen Fachschulen und für den Selbstunterricht. Höxter. Buchholtz' Buchhandlung. 16 S. mit 24 Steintafeln. Fol.

J. Vonderlinn. Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. 1. Teil: Geometrische Constructionen, Elemente der Projectionslehre, Constructionen der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen. Stuttgart. J. Maier. VIII + 166 S. 8°

J. Vonderlinn. Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projectionszeichnen. Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen etc. Stuttgart. J. Maier. 12 Taf. qu. Fol. Mit erläuterndem Text. 13 Bl. gr. 4°.

G. Müller. Zeichnende Geometrie. Im Auftrage der Königlich württembergischen Centralstelle für Gewerbe und Handel bearbeitet. 5. Aufl. Stuttgart. Metzler's Sortiment. VIII u. 92 S. Mit 10 Tafeln. 4°.

G. Müller. Uebungsstoff für das geometrische Zeichnen. Im Auftrage der Königlich württembergischen Centralstelle für Gewerbe und Handel bearbeitet. 10. Aufl. Stuttgart. Metzler's Sortiment. 112 S. 12°. Mit 21 Tafeln.

J. A. Salberg. Geometrische Wandtafeln. Bamberg. Buchner, Verlag. 12 Tafeln. (11 Tafeln 74,5 × 100,5 cm: 1 Tafel à 4 Blatt 58 × 54 cm).

A. Meydenbauer. Das photographische Aufnehmen zu wissenschaftlichen Zwecken, insbesondere das Messbild-Verfahren. 1. Band: Die photographischen Grundlagen und das Messbild-Verfahren mit kleinen Instrumenten. Berlin. Unte's Verlags-Anstalt. VIII + 200 S. Mit Fig. 8°.

G. Grzybowski. Ueber die Berührung der windschiefen Schrauben. Pr. Tarnopol 1891/92. S. 3-6. (Polnisch.)

K. Klekler. Die stereographische Projection als Hülfsmittel der ebenen Darstellung sphärischer Constructionen. Wien. 20 S. 8°.

## Capitel 5.

## Neuere synthetische Geometrie.

### A. Allgemeines.

B. Nasimoff. Einleitung in die höhere Geometrie. Aus Kasan Univ.-Nachr. (Russisch, 1890-1892.)

In diesem Bändchen sind in klarer und übersichtlicher Darstellung die Beziehungen der neueren synthetischen Geometrie zur Geometrie der Griechen, wie auch ihre Vorteile gegenüber der letzteren auseinandergesetzt und durch passende Beispiele beleuchtet. Dabei werden die Grundbegriffe erklärt, wie die der Projectivität, die geometrischen Grundelemente und Formen, ihre Verteilung in Stufen, das Princip der Reciprocität im Raume, auf der Ebene und im Bündel, die Zuordnung der Formen, perspective Formen, projective Grundgebilde erster Stufe, Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt.

Es wäre zu wünschen, dass der Verfasser, ein Verehrer von Poncelet und Staudt, nicht zögere, auch eine zweite Lieferung dem russischen mathematischen Publicum zu geben, da ein vollständiges, wenn auch nur kurz gefasstes Lehrbuch der synthetischen Geometrie bis jetzt noch fehlt, und die vorhandenen Werke von Kronberg, Jaroschenko sich auch nur mit Gebilden erster Stufe beschäftigen. Si.

---

R. De Paolis. Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie. Torino Mem. XLII. 495-584.

In der Vorrede dieser umfangreichen Abhandlung giebt der Verf. an, dass das Thema, welches sie behandelt, dasselbe sei, welches die Berliner Akademie 1884 und 1886 als Aufgabe für den Steinerpreis gestellt hatte, und für dessen erfolgreiche Bearbeitung Hrn. E. Kötter dieser Preis zugesprochen wurde (vgl. F. d. M. XIX. 1887. 577). Durch Mangel an Zeit verhindert, die Arbeit zu redigiren, habe er damals sie nicht zum Bewerb einsenden können und sei erst jetzt dazu gekommen, sie druckfertig zu machen. „Meine Methode und die des Hrn. Kötter sind wesentlich verschieden, haben nur den Gedanken gemeinsam, für die imaginären Elemente reale geometrische Dinge zu setzen, ein Gedanke, der sich von selbst aufdrängt, wie er auch in dem Programm zur Bewerbung um den Steinerpreis bestätigt wird. Es ist hier nicht der Ort, in lange kritische Betrachtungen bezüglich der wichtigen Kötter'schen Arbeit einzugehen; ich erlaube mir nur die Aeusserung, dass er sein Ziel durch viele Kunstgriffe erreicht, indem er einen langen und mühsamen Weg verfolgt und mittels Betrachtungen stetiger Correspondenzen aufsteigt, ohne die Stetigkeit streng zu beweisen, von der doch die wichtigsten der von ihm erhaltenen Resultate abhängen".

Da die Vorrede dann weiter eine genaue Uebersicht des Inhaltes giebt, so berichten wir an ihrer Hand mit den Worten des Verfassers (vergl. auch F. d. M. XXII. 1890. 527ff.).

Im ersten Capitel studirt er diejenigen Mannigfaltigkeiten, welche er „Fundamentalsysteme $\nu^{\text{ter}}$ Stufe" nennt, und welche nach gewöhnlicher Redeweise lineare Systeme $\infty^{\nu}$ von Elementen heissen; derartig sind z. B. die linearen Räume von $\nu$ Dimensionen. Er stellt für die fundamentalen Systeme das „Dualitätsprincip" auf und betrachtet die „projectiven Correspondenzen", welche zwischen zweien derselben von der nämlichen Stufe bestehen können. Die im ersten Capitel enthaltenen Eigenschaften sind nicht neu, z. B. von Hrn. Veronese in Math. Ann. XIX (F. d. M. XIII. 1881. 485) dargelegt worden; doch hält der Verf. zum Teil die zu ihrer Herleitung benutzte Methode für neu.

Im zweiten Capitel wird kurz von den uneigentlichen und von den imaginären geometrischen Elementen gesprochen; darauf wird ge-

zeigt, dass durch Einführung dieser Elemente der gewöhnliche Begriff von Punkt, Gerade und Ebene derartig erweitert wird, dass die geometrischen Grundgebilde erster, zweiter und dritter Stufe $F_1$, $F_2$, $F_3$ als „Fundamentalsysteme“ erster, zweiter und dritter Stufe beibehalten werden können. Danach bildet der Verf. die erzeugenden, realen oder imaginären, Elemente zweier Gebilde $F_1$, $F'_1$ auf den eigentlichen realen Punkten zweier Kugeln $\sigma_1$, $\sigma_2$ ab und beweist, dass eine projective, zwischen $F_1$ und $F'_1$ aufgestellte Correspondenz eine zweieindeutige stetige Correspondenz zwischen den Punkten von $\sigma_1$ und $\sigma_2$ giebt, weshalb jede projective Correspondenz zwischen zwei geometrischen Grundgebilden erster Stufe als stetig bezeichnet werden darf.

In den folgenden Capiteln werden $n$ Gebilde $F^1_1, F^2_1, \ldots, F^n_1$ angenommen unter der Voraussetzung, dass zwischen ihnen eine $n$-eindeutige Correspondenz hergestellt sei, d. h. eine solche, dass $n$—1 beliebige Elemente aus je einem von $n$—1 der $F^i_1$ ein entsprechendes Element des übrig bleibenden bestimmen, und im allgemeinen ein einziges, welches Element „Pol“ der $n$—1 genannt wird, denen es entspricht. Eine Gruppe von $n$—2 Elementen aus je einem von $n$—2 der $F^i_1$ bestimmt offenbar zwischen den Elementen der beiden übrig bleibenden eine zweieindeutige Correspondenz, welche „Polare“ der $n-2$ herausgegriffenen Elemente genannt wird. Wenn alle diese polaren zweieindeutigen Correspondenzen projectiv sind, heisst die gegebene $n$-eindeutige Correspondenz „projectiv“. Es giebt $\infty^{n-1}$ Gruppen, jede aus $n$ Elementen, von denen eine beliebige der Pol der übrigen bezüglich der Correspondenz ist; diese Gruppen $G_n$ bilden nach des Verfassers Benennung die „projective Gruppirung $n^{\text{ter}}$ Ordnung“ und werden mit dem Symbole $Ap_n$ bezeichnet. Die Existenz dieser projectiven Gruppirungen erhellt aus der Darlegung, wie man sie wirklich erhalten kann. Die Wichtigkeit ihrer Erforschung tritt zu Tage, wenn man überlegt, dass sie analytisch durch eine Gleichung

$$A_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(n)}} = a^{(1)}_{x^{(1)}} a^{(2)}_{x^{(2)}} \ldots a^{(n)}_{x^{(n)}} = 0$$

dargestellt werden, die linear und homogen in den Coordinaten $x^{(i)}_1$, $x^{(i)}_2$ der erzeugenden Elemente jeder der Formen $F^i_1$ ist.

Alle $Ap_n$, die den gegebenen $n$ Formen $F^i_1$ angehören, sind $\infty^{2^n-1}$ und machen ein Fundamentalsystem von der Stufe $2^n-1$ aus. Mit Gruppirungen $Ap_n$ kann man auch Fundamentalsysteme von der Stufe $\nu < 2^n-1$ bilden, Systeme, die mit $S_{\nu,n}$ bezeichnet werden, und die in den Fällen $\nu = 1$, $\nu = 2$ bezw. „Büschel" und „Netze" heissen. In der elementaren projectiven Geometrie werden die projectiven Gruppirungen zweiter Ordnung $Ap_2$ durchforscht; sie werden von den Paaren entsprechender Elemente zweier projectiven Gebilde $F'_1$, $F''_1$ gebildet. Alle möglichen, auf den nämlichen $F'_1$, $F'_1$ gelegenen $Ap_2$ sind $\infty^3$ und machen ein $S_{3,2}$ aus.

Zwei Formen $a^{(1)}_{x^{(1)}}a^{(2)}_{x^{(2)}}\ldots a^{(n)}_{x^{(n)}}$, $b^{(1)}_{x^{(1)}}b^{(2)}_{x^{(2)}}\ldots b^{(n)}_{x^{(n)}}$ besitzen eine simultane Invariante $(a^{(1)}b^{(1)})(a^{(2)}b^{(2)})\ldots(a^{(n)}b^{(n)})$, die linear in den Coefficienten jeder einzelnen ist und ihre „Harmonisante" genannt werden kann. Wenn dieselbe Null ist, können die beiden Formen harmonisch heissen, harmonisch auch die beiden Gruppirungen $Ap^1_n$, $Ap^2_n$, welche sie darstellen, falls man sie gleich Null setzt. Die Harmonie zweier Gruppirungen $Ap^1_n$, $Ap^2_n$ ist eine projective Eigenschaft, welche sie symmetrisch verknüpft. Die harmonischen projectiven Gruppirungen können nach diesem Vorgange durch rein geometrische Betrachtungen definirt und erforscht werden. Jedes System $S_{\nu,n}$ begründet ein anderes $S_{\nu',n}$, wobei $\nu+\nu' = 2^n-2$ ist, derart dass alle Gruppirungen des einen zu allen des anderen harmonisch sind; zwei solche Systeme heissen „harmonisch". Eine einzige $Ap_n$ ist harmonisch zu allen aus einem Systeme $S_{\nu,n}$, wenn $\nu = 2^n-2$ ist.

Bis zu diesem Punkte ist der Einfachheit halber vorausgesetzt, die $n$ Formen $F^i_1$ seien alle verschieden. Man kann sie jedoch gruppenweise über einander gelagert festhalten, und auch alle auf einer und derselben $F^i_1$. In diesem letzteren Falle bestehen gewisse besondere derartige projective Gruppirungen $n^{\text{ter}}$ Ordnung, dass $n-1$ beliebige Elemente der $F'_1$, falls man jedes als zu einer von $n-1$ der auf sie gelegten Gebilde gehörig betrachtet, immer einen und denselben Pol bestimmen. Diese besonderen Gruppirungen heissen „projective Involutionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung und $(n-1)^{\text{ten}}$

Ranges“, und werden mit dem Symbole $Ip_{n,n-1}$ bezeichnet. Analytisch wird eine $Ip_{n,n-1}$ dargestellt, indem man eine in den $n$ Variabelnpaaren $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ symmetrische und lineare Form gleich Null setzt, d. h. durch eine Gleichung von der Form $a_{x^{(1)}} a_{x^{(2)}} \dots a_{x^{(n)}} = 0$.

Alle möglichen $Ip_{n,n-1}$ einer und derselben $F'_1$ sind $\infty^n$ und machen ein Fundamentalsystem $n^{\text{ter}}$ Stufe aus. Alle Gruppirungen eines durch $\nu+1$ Involutionen $Ip_{n,n-1}$ bestimmten Systems $S_{\nu,n}$ sind ebenfalls Involutionen. Jedes System $S_{\nu,n}$ von Involutionen $Ip_{n,n-1}$ bestimmt ein anderes $S_{\nu',n}$, wo $\nu+\nu' = n-1$ ist, so dass alle Involutionen jedes Systems harmonisch zu allen des anderen sind. Eine einzige $Ip_{n,n-1}$ ist zu allen einem Systeme $S_{n-1,n}$ angehörigen harmonisch. Wenn zwei projective Involutionen, die durch die Gleichungen $a_{x^{(1)}} a_{x^{(2)}} \dots a_{x^{(n)}} = 0$, $b_{x^{(1)}} b_{x^{(2)}} \dots b_{x^{(n)}} = 0$ dargestellt werden, harmonisch sind, so muss $(ab)^n = 0$ sein, und umgekehrt.

Bis zu diesem Punkte hin ist vorausgesetzt, dass $\nu \gtreqless n$ Involutionen $Ip_{\nu,\nu-1}$, die ein System $S_{\nu-1,\nu}$ zu bestimmen im Stande sind, immer eine Gruppe $G_\nu$ von $n$ reellen oder imaginären Elementen gemeinsam haben, und also eine einzige, was offenbar für $\nu = 2$ gilt. Aus dieser Hypothese fliessen zahlreiche Eigenschaften und folgt unter der Annahme $n' \gtreqless n+\varrho$ die Existenz von $\infty^\varrho$ Gruppen $G_{n'}$, die $n'-\varrho$ Involutionen $Ip_{n',n'-1}$ gemeinsam sind, welche ein System $S_{n'-\varrho-1,n'}$ zu bestimmen im Stande sind. Die Gesamtheit dieser $\infty^\varrho$ Gruppen $G_{n'}$, d. h. der „Schnitt“ der $n'-\varrho$ gegebenen $Ip_{n',n'-1}$ ist nach des Verfassers Benennung eine „projective Involution $n'^{\text{ter}}$ Ordnung und $\varrho^{\text{ten}}$ Ranges“, eine durch das Symbol $Ip_{n',\varrho}$ bezeichnete Involution. Eine $Ip_{n',\varrho}$ kann analytisch durch eine Gleichung $\lambda_1 a_x^{n'(1)} + \lambda_2 a_x^{n'(2)} + \dots + \lambda_{\varrho+1} a_x^{n'(\varrho+1)} = 0$ dargestellt werden, in der die Formen $a_x^{n'(i)}$ binär vom Grade $n'$ sind. Die $Ip_{n',\varrho}$ sind von vielen Geometern untersucht worden, und daher sind ihre Haupteigenschaften bekannt.

Die gemachten Annahmen und alle daraus gezogenen Folgerungen finden sich dann bewiesen, sobald der Verf. auf Grund derselben bewiesen hat, dass $n+1$ $Ip_{n+1,n}$, die im Stande sind, ein System $S_{n,n+1}$ zu bestimmen, immer eine Gruppe $G_{n+1}$ von $n+1$ realen oder imaginären Elementen gemeinsam haben, und zwar eine einzige. Auf diesen Satz lässt sich eine ganze rein

geometrische Theorie der algebraischen Curven und Oberflächen gründen; derselbe ersetzt nämlich in der Geometrie das Fundamentaltheorem der Algebra.

Nachdem wir dem Verfasser bis zu diesem Punkte gefolgt sind, so dass aus dem Vorstehenden der von ihm eingeschlagene Gedankengang bei seinen Begriffsbildungen erhellt, verzichten wir auf die Darstellung der weiteren Durchführung und setzen zum Schlusse das Inhaltsverzeichnis der umfangreichen Abhandlung her. I. Die Fundamentalsysteme. II. Die projectiven Correspondenzen zwischen den Elementen zweier Fundamentalsysteme der nämlichen Stufe. III. Allgemeine Betrachtungen über die geometrischen Grundgebilde. IV. Die projectiven Gruppirungen zweiter Ordnung in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. V. Die projectiven Gruppirungen beliebiger Ordnung in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. VI. Die reducibeln projectiven Gruppirungen in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. VII. Die Fundamentalsysteme projectiver Gruppirungen in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. VIII. Verallgemeinerung der Definition und der Eigenschaften der polaren projectiven Gruppirungen in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. IX. Die apolaren projectiven Gruppirungen in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. X. Die projectiven Involutionen von beliebiger Ordnung $n$ und vom Range $n-1$ in einem geometrischen Grundgebilde erster Stufe. XI u. XII. Die projectiven Involutionen von beliebiger Ordnung $n$ und vom Range $\varrho \leqq n-1$ in einem geometrischen Grundgebilde erster Stufe. XIII. Die projectiven Correspondenzen in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. XIV. Stetigkeit der projectiven Correspondenzen in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. XV. Die aus zwei projectiven Correspondenzen sich ergebende Correspondenz in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe. XVI. Die polaren und die harmonischen Gruppen in den geometrischen Grundgebilden erster Stufe.

Lp.

---

M. Genty. Sur les involutions d'espèce quelconque.
S. M. F. Bull. XX. 106-112.

Unter Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips stellt Herr Genty die folgenden Sätze auf: Eine Involution $n^{\text{ter}}$ Ordnung $k^{\text{ter}}$ Stufe enthält $(k+1)(n-k)$ Gruppen mit $(k+1)$-fachem Punkt, $\frac{2^k(n-k)!}{k!\,(n-k)!}$ Gruppen mit $k$ zweifachen Punkten, endlich

$$(k'+1)(k-k'+1)(n-k)(n-k-1)$$

Gruppen, die einen $k'$-fachen und einen $(k-k')$-fachen Punkt enthalten. E. K.

J. de Vries. Zur Theorie der Involutionen. Monatsh. f. Math. III. 285-292.

Sind $A_1\,A_2 \dots A_n$; $B_1\,B_2 \dots B_n$; $C_1\,C_2 \dots C_n$ drei Gruppen einer Involution $n^{\text{ter}}$ Ordnung, so wird eine bestimmte Gruppe von $(n-2)$ Punkten durch die Punkte $A_n$, $B_n$, $C_n$ zu Gruppen der Involutionen $B_1 \dots B_{n-1}$, $C_1 \dots C_{n-1}$; $C_1 \dots C_{n-1}$, $A_1 \dots A_{n-1}$; $A_1 \dots A_{n-1}$, $B_1 \dots B_{n-1}$ ergänzt. Dieser Satz ist, was Herrn Jan de Vries entgangen zu sein scheint, von dem Referenten zur Vervollständigung der allgemeinen Involution, Aufsuchung der Gruppe $C_1 \dots C_{n-1}$, wenn nur $A_1 \dots A_n$; $B_1 \dots B_n$; $C_n$ gegeben sind, benutzt worden [vergl. Grundzüge einer etc., Abhandlungen der Berliner Akademie, 1887. § 44]. Er selbst wendet ihn auf die Involution dritter Ordnung und auf specielle Fälle bei Involutionen $n^{\text{ter}}$ Ordnung an. E. K.

A. J. Boguslavski. Metrische Eigenschaften der Involutionen erster Klasse $n^{\text{ter}}$ Ordnung und Bedingungen der Existenz von Doppelelementen. Phys. Sect. d. Mosk. Ges. d. Fr. d. Naturw. III. 52-54. (Russisch.)

Einige Eigenschaften des dem Falle $x=1$ der von Em. Weyr (Wien. Ber. LXXIX, F. d. M. XI. 1879. 598) eingeführten Involution entsprechenden Gebildes, dessen Gleichung in der Form

$$(x-a_1)\dots(x-a_n)+\lambda x(x-b'_1)\dots(x-b'_{n-2})=0$$

angenommen ist. Si.

G. Castelnuovo. Le corrispondenze univoche tra gruppi di $p$ punti sopra una curva di genere $p$. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1189-1205.

Auf jeder Curve vom Geschlecht $p$ giebt es Vollscharen $g_{2p}^{(p)}$. Ist eine Gruppe $A$ nicht Glied einer Specialschar $g_p^{(i)}$, so bestimmt sie eine Gruppe $AA_1$ von $g_{2p}^{(p)}$ in unzweideutiger Weise, und es entsteht auf diese Weise eine involutorische Beziehung $I$ auf der Grundcurve. Ein Paar dieser Beziehung ist willkürlich. Ist $BB_1$ ein zweites, so hat man die symbolische Gleichung (wo $\equiv$ das Zeichen der Aequivalenz, Corresidualität ist):

$$A+A_1 \equiv B+B_1.$$

Hat man zwei Vollscharen $g_{2p}^{(p)}$, so gehöre $A_1$ vermöge der einen Beziehung $I$ zu $A$, vermöge der zweiten Beziehung $A'$ zu $A_1$. Alsdann wird

$$E \equiv [A, A'] = I.I_1$$

gesetzt. Ist von dieser neuen Beziehung $BB'$ ein neues Paar, so ist

$$A+B' = B+A'.$$

Dieselbe ist im allgemeinen nicht mehr involutorisch. Betrachtet man ein Product aus beliebig vielen Factoren $E$ und $I$, so wird man eine Beziehung erster oder zweiter Art erhalten, je nachdem die Anzahl der letzteren Factoren ungerade oder gerade ist. In einem Product $E_1 E_2 \dots E_n$ kann man die Factoren beliebig vertauschen. Da

$$[G+a, G+a'] = [H+a, H+a']$$

ist, wo $G$ und $H$ beliebige Gruppen zu $(p-1)$ Punkten sind, so kann man unter $[a_1, a_2]$ eine bestimmte durch zwei Curvenpunkte festgelegte Beziehung $E$ bezeichnen. Dann ist

$$[a_1, a_1'][a_2, a_2'] \dots [a_m, a_m'] = 1,$$

wo 1 die identische Beziehung ist, die jede Gruppe aus $p$ Punkten sich selbst zuordnet, die Bedingung für die Aequivalenz (Corresidualität) zweier Gruppen.

Durch jede Gruppe $A$ sind, wenn $n$ die Primfactoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ hat,

$$n^{2p}\left(1-\frac{1}{\alpha^{2p}}\right)\left(1-\frac{1}{\beta^{2p}}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma^{2p}}\right)\cdots$$

cyklische Beziehungen $E$ festgelegt, die der Gleichung $E^n \equiv 1$ genügen. Sie entstehen, indem man aus der Vollschar $g_{np}^{(n-1)p}$, die durch die $n$-fach wiederholte Gruppe $A$ bestimmt wird, die übrigen Gruppen derselben Art $A'^n$ aufsucht und dann $E \equiv [A, A']$ setzt.

In einem Anhang weist Herr Castelnuovo aus dem Abel'schen Theorem nach, dass auf einer Curve mit allgemeinen Moduln keine anderen eindeutigen Beziehungen zwischen Gruppen aus $p$ Punkten bestehen können, als die behandelten. E. K.

---

F. Amodeo. Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali involutorie $\infty^1$ giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione. Annali di Mat. (2) XX. 227-235.

Wenn man auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit $p^{\text{ten}}$ Geschlechts eine $\infty^1$-fache involutorische Reihe $m^{\text{ter}}$ Ordnung vom Geschlecht $\pi$ findet, so bestimmt sie eine symmetrische Correspondenz vom Index $m-1$, deren Wertigkeit $\gamma$ positiv oder negativ ist, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit von allgemeinen Moduln ist, im anderen Fall aber auch verschwinden kann. Im ersten Fall hat man die beiden Relationen

$$p\gamma = p - m\pi \quad \text{und} \quad p > m\pi - m,$$

im anderen Falle bleibt nur die zweite Relation bestehen (§ 1). Im § 2 stellt Herr Amodeo unter bestimmten Einschränkungen den Satz auf, dass zwei auf demselben Träger vom Geschlecht $p$ liegende Involutionen $g_{m,\pi}$ und $g_{m'\pi'}$ $(m-1)(m'-1)+m\pi+m'\pi'-p$ gemeinschaftliche Punktepaare aufweisen. E. K.

---

Em. Weyr. Ueber Vervollständigung von Involutionen auf Trägern vom Geschlechte 1 und über Steiner'sche Polygone. Wien. Ber. CI. 1457-1483, 1695-1741.

Eine auf einem Träger vom Geschlechte 1 liegende Involution $n^{\text{ten}}$ Grades $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe $I^n$ ist durch eine ihrer Gruppen vollkommen unzweideutig bestimmt. Diesen Satz hatte der Verfasser schon früher in den Wien. Ber. (XC. 209) für $n=2$ und dann

in denselben Berichten (XCVII. 606) durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ allgemein bewiesen. Dabei wurde ein Vorgang mitgeteilt, nach welchem man die durch eine Gruppe gegebene $I^n$ vervollständigen, d. h. zu irgend $n-1$ Elementen das die Gruppe schliessende Element construiren kann. Statt der dabei angewandten $I^{n-2}$ sind hier nun $I^2$ benutzt. Bei Legung der Involution auf eine ebene Curve dritter Ordnung ergiebt sich z. B., dass die dritten Schnittpunkte der $n$ Seiten eines einer solchen Curve einbeschriebenen geschlossenen $n$-Ecks eine $n$-punktige Gruppe bilden, die mit der $n$-punktigen Gruppe der Tangentialpunkte der Ecken zusammen einer und derselben $I^n$ angehören. Weiterhin findet der Verfasser die folgende Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über Steiner'sche Polygone: „Sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige Punkte einer Curve dritter Ordnung und construirt man, von irgend einem ihrer Punkte ausgehend, ein $2n$-Eck, von dessen Seiten durch jeden der Punkte eine geradstellige und eine ungeradstellige Seite hindurchgeht, so erhält man immer ein geschlossenes, der Curve einbeschriebenes $2n$-Eck". Weitere Studien über den Zusammenhang von Involutionen desselben Trägers vom Geschlechte 1 führen u. a. zu dem Ergebnis, dass, wenn man zu allen $n$ Elementen jeder Gruppe einer $I^k$ die ihnen durch eine $I^2$ zugehörigen $k$ Elemente construirt, die letzteren wiederum eine Involution $k^{\text{ten}}$ Grades bilden.

In der zweiten Abhandlung wird zur Vervollständigung eines $I^n$ nicht eine $I^2$, sondern eine $I^k$ verwendet, wo $k < n$ ist. Die Vervollständigung wird auch auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Species ausgeführt, und dann erkannt, dass die daran angeknüpfte Untersuchung auch für beliebige Träger vom Geschlechte 1 Geltung hat. Scht.

---

Em. Weyr. Ueber abgeleitete $I^n_{n-1}$ auf Trägern vom Geschlechte Eins. Wien. Ber. CI. 1506-1519.

Wenn auf einem Träger vom Geschlechte 1 eine $I^n$, d. h. eine Involution $n^{\text{ten}}$ Grades $(n-1)^{\text{ter}}$ Stufe gegeben ist, so kann man aus ihr mittels einer beliebigen $I^k$ eine zweite $I'^n$ ableiten. Wählt

man nämlich beliebige $k-1$ Gruppen $a_1 a_2 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$, $m_1 \dots m_n$, und construirt man dann aus ihren $n(k-1)$ Elementen $n$ Gruppen von je $k-1$ Elementen, so dass in jeder Gruppe ein $a$, ein $b$ u. s. w. vorkommt, und „vervollständigt“ (cf. voriges Referat) man endlich jede dieser Gruppen zu einer $I^k$, so erhält man $n$ Elemente $l_1, l_2, \dots, l_n$, deren Gruppe eine $I'^n$ bestimmt. Wenn nun die Gruppen $a, b, c, \dots, m$ in $I^n$ beliebig variiren, so wird die Gruppe $l$ immer dieser $I'^n$ angehören. Wird $I^k$ mit $I^n$ identisch, so wird auch $I'^n$ mit $I^n$ identisch. Dies ist der Ausgangspunkt der Untersuchung, welche insbesondere zu Eigenschaften der ebenen Curven dritter Ordnung und der Raumcurven vierter Ordnung erster Species führt. Scht.

R. Schumacher. Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der algebraischen ebenen Curven. J. für Math. CX. 230-264.

Das Referat erfolgt im nächsten Jahrgang, da der Schluss der Abhandlung erst in dem nächsten Bande des Journals steht.

E. K.

A. del Re. Considerazioni nel gruppo delle similitudini sul piano reale. (Art. I). Rivista di Mat. II. 99-103.

Vom projectiven Standpunkte sind die ebenen Aehnlichkeiten solche linearen Punkttransformationen, welche das durch die unendlich fernen Kreispunkte gebildete Punktepaar in sich selbst verwandeln; sie bilden eine Gruppe, welche die Homothetien, die orthogonalen Symmetrien und die Bewegungen enthält; sie heissen „direct“ oder „invers“, jenachdem sie jeden Kreispunkt in sich selbst oder in den anderen verwandeln. Mittels der Rechnung mit Symbolen von geometrischen Operationen stellt der Verfasser zuerst einige einfache Beziehungen fest, welche zwischen den genannten Verwandtschaften statthaben. Dann stellt er die Aufgabe, die Polarität zu bestimmen, welche eine Aehnlichkeit in eine andere verwandelt; er löst dieselbe mit Hülfe der folgenden Lehrsätze auf: 1. Eine directe Aehnlichkeit, die keine Homothetie ist,

wird in eine andere durch jede Polarität verwandelt, welche in Bezug auf (reelle oder imaginäre) Kreise besteht, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt der Ordnungspunkt der Aehnlichkeit ist. II. Eine inverse Aehnlichkeit, die keine Symmetrie ist, wird in eine andere durch jede Polarität verwandelt, welche in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel besteht, deren gemeinsame Asymptoten die zwei Ordnungslinien der Aehnlichkeit sind. Die übrigen von diesen Sätzen ausgeschlossenen Fälle können sehr leicht direct behandelt werden. La.

Chr. Beyel. Zwei Sätze über collineare Ebenen. Schlömilch Z. XXXVII. 59-60.

Der Verfasser knüpft einen Beweis und naheliegende Betrachtungen an den folgenden Satz und sein duales Analogon: „Wenn auf einer Ebene zwei collineare ebene Systeme liegen, so giebt es darauf ein Fundamental-Dreieck von sich selbst entsprechenden Punkten und Strahlen, und jeder Strahl trifft den entsprechenden Strahl und die Seiten des Fundamental-Dreiecks in vier Punkten von constantem Doppelverhältnis.“ Scht.

F. Lökle. Untersuchungen aus der synthetischen Geometrie. Pr. (No. 589) Karlsgymn. Stuttgart. 79 S. 4°.

Elegante weitere Ausführungen von Sätzen, welche L. Cremona in seinen „Elementen der projectiven Geometrie“ (übers. v. Trautvetter 1882), Th. Reye in seiner „Geometrie der Lage“, H. Schröter in seiner „Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projective Eigenschaften“, und in seiner „Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung“ aufgestellt haben. Scht.

---

G. Castelnuovo. Sulle trasformazioni Cremoniane del piano, che ammettono una curva fissa. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 47-50.

Herr Castelnuovo stellt den Satz auf: Wenn eine Cremona'sche Transformation der Ebene jeden Punkt einer irreduciblen Curve $M$

vom Geschlecht $p(>1)$ in sich selbst überführt, so ist sie entweder auf den Jonquières'schen Typus zurückzuführen, oder cyklisch vom zweiten, dritten oder vierten Grade. E. K.

---

C. JUEL. Studie over en Transformation af Laguerre.
Nyt Tidss. for Math. III B. 10-24.

In den Jahren 1880-85 hat Laguerre eine in mehreren Richtungen merkwürdige Transformation mittels Halbstrahlen gegeben. Ein Halbstrahl ist eine mit Richtung versehene Gerade. Giebt man der Geraden die entgegengesetzte Richtung, so bekommt man einen neuen Halbstrahl. Auf ähnliche Weise werden auch geschlossene Curven mit Richtungen versehen, und eine Tangente hat immer dieselbe Richtung wie das entsprechende Element. Ein mit Richtung versehener Kreis wird ein Cyklus genannt. Man kann dann zu drei gegebenen Halbstrahlen nur einen berührenden Cyklus zeichnen.

Laguerre's Transformation ist nun die folgende:

In einer Ebene seien gegeben eine Gerade $\Omega$, ein Punkt $P$ und ein Cyklus $K$. Der einem gegebenen willkürlichen Halbstrahl $MN$ entsprechende Halbstrahl wird jetzt auf die folgende Weise construirt. Parallel mit $MN$ wird eine Tangente an $K$ gezogen, welche $K$ in $A$ berührt. Die Gerade $PA$ schneidet noch $K$ in $A'$, und die Tangente $L$ in $A'$ wird gezogen. Parallel mit $L$ wird ein Halbstrahl durch den Schnittpunkt von $\Omega$ und $MN$ gezogen, und diese ist der $MN$ entsprechende Halbstrahl.

Dem Anscheine nach ist diese Transformation ziemlich willkürlich gewählt. Herr Juel zeigt jetzt, wie man auf natürliche Weise zu dieser Transformation kommen kann, indem man eine Kugel statt einer Ebene betrachtet. Danach wird die Transformation auf eine neue Weise gegeben. In einer festen Ebene $\pi$ wird eine Axe $\Omega$ gewählt und durch diese eine Ebene $\mu$ gelegt, die einen kleineren Winkel als $45^\circ$ mit $\pi$ bildet. Um jetzt den einem Cyklus $K$ entsprechenden Cyklus zu finden, wird durch $K$ ein Umdrehungskegel gelegt, dessen Scheitelwinkel $90^\circ$ ist. Dieser Kegel wird von $\mu$ in einer Ellipse geschnitten, und durch diese

Ellipse wird ein Cylinder gelegt, der $\pi$ in einem Cyklus $K_1$ schneidet; dann ist $K_1$ der $K$ entsprechende Cyklus. Es werden jetzt die Haupteigenschaften der Transformation entwickelt, und sie wird dazu verwendet, einen Satz von Casey und den umgekehrten Satz zu beweisen.

Der Satz von Casey ist der folgende:

Wenn vier Cyklen $A$, $B$, $C$, $D$ einen fünften $E$ berühren, findet eine Identität von der folgenden Form statt:

$$(AB)(CD) \pm (AC)(BD) \pm (AD)(BC) = 0,$$

wo $(AB)$ die Länge der gemeinsamen Tangente von $A$ und $B$ ist und die anderen Bezeichnungen ähnliche Bedeutungen haben. Der Beweis beruht darauf, dass die Transformation Laguerre's solche Längen ungeändert lässt. In einem Zusatz wird noch nachgewiesen, dass der Casey'sche Satz leichter direct bewiesen werden kann.

Endlich wird die Frage untersucht: Welches ist die allgemeinste Transformation, welche Halbstrahlen in Halbstrahlen, Cyklen in Cyklen überführt? Es wird gezeigt, dass diese Transformation eine Laguerre'sche ist, in Verbindung mit einer Drehung und einer Multiplication. Es werden noch verschiedene Untersuchungen darüber angestellt, durch wie viele Elemente solche Transformationen bestimmt sind. V.

Bernès. Transformation par inversion symétrique. J. de Math. élém. (4) I. 3-5, 25-31, 49-58, 73-82, 97-101, 121-131, 145-151, 169-174, 193-200, 217-223, 241-247, 265-272.

Die ausführliche Darlegung der angewandten Methode, welche bei Besprechung des im Jahre 1891 erschienenen Teils der vorliegenden Arbeit von anderer Seite an dieser Stelle (s. F. d. M. XXIII. 600-601) veröffentlicht worden ist, enthebt den Ref. einer eingehenden Analyse des Inhalts, so dass es füglich genügt, die Titel der einzelnen Abschnitte wiederzugeben, soweit sie im vorliegenden Jahrgang behandelt sind: Ueber die Kreise, welche jeder der beiden Punkte des isogonalen Paares und zwei Ecken des Dreiecks $ABC$ bestimmen. Anwendung auf die isoptischen Punkte. Verallgemeinerung. Eigenschaften der in Bezug auf einen gegebenen Punkt complementären Punkte. Ergänzung zu den isoptischen

Punkten. Beziehungen zwischen den tripolaren, normalen und Winkel-Coordinaten zweier symmetrisch inversen Punkte. Anwendung auf verschiedene merkwürdige Punkte des Dreiecks. — Die Betrachtungen finden im folgenden Jahrgange ihren Abschluss.

Gz.

---

J. DE VRIES. Isodynamische und metaharmonische Gebilde. Wien. Ber. Cl. 66-78.

Das Dreieck $ABC$ geht durch Inversion in ein gleichschenkliges Dreieck $A'B'C'$ mit der Spitze $A'$ über, wenn das Inversionscentrum auf einer durch $A$ gehenden Kugel liegt, in deren Mittelpunkte sich $BC$ und die Tangente in $A$ an dem $ABC$ umschriebenen Kreise schneiden. Ist das $ABC$ zugeordnete Dreieck ein gleichseitiges, so durchdringen sich die den Eckpunkten entsprechenden (isodynamischen) Kugeln in einem (isodynamischen) Kreise, der in den zum Dreiecke gehörigen Apollonischen Punkten (isodynamischen Centren) rechtwinklig zu dessen Ebene steht. Vier Kugeln, von denen je drei zur vierten orthogonal sind, schneiden sich in einem metaharmonischen Punktsystem; es enthält vier dreifach harmonische Sextupel, die durch Inversion aus den sechs Ecken des regelmässigen Oktaeders hervorgehen. Configurationen isodynamischer Gebilde und ihre Beziehungen zu metaharmonischen werden auf synthetischem Wege erörtert. Js.

---

F. PALATINI. Saggio di un metodo utile per lo studio delle trasformazioni geometriche. Palermo. 1892. 12 S. 8°.

Auf Grund der eindeutigen Verwandtschaft zwischen den Punktepaaren einer Ebene und den Punkten eines Raumes von vier Dimensionen wird die ein-zweideutige Verwandtschaft zweier Ebenen behandelt, und eine allgemeine Methode abgeleitet, nach der auf unendlich viele Arten die involutorisch-algebraische Verwandtschaft zwischen den Punkten einer Ebene festgelegt werden kann. Js.

Ch. Tweedie. On the relation between the stereographic projections of points of a plane related to one another by inversion. Edinb. M. S. Proc. X. 46-50.

$C$, $C_1$ sind inverse Punkte auf dem Radius $OK$ eines Kreises mit dem Mittelpunkte $O$; sie werden aus $D$, dem Endpunkte eines auf $OK$ senkrechten Radius $OD$, auf den Kreis projicirt. Indem der Radius $OK$ unbegrenzt verlängert wird, entsteht so eine Verwandtschaft zwischen Punkten auf der Geraden und auf der Kreislinie. Dann wird die Figur um den Durchmesser $DOD_1$ gedreht. Die Beziehungen zwischen Curven in der Ebene, die durch $OK$ beschrieben wird, und den entsprechenden Curven auf der Kugelfläche werden angedeutet. Gbs. (Lp.)

M. d'Ocagne. Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane. S. M. F. Bull. XX. 49-59.

Schon 1888 hatte der Verfasser auf eine Curve, welche einer ebenen Curve in gewisser Weise adjungirt ist, hingewiesen, und zwar sowohl in dem American Journal of Math. als auch im Jornal de Sc. math., phys. e nat. de Lisboa. Die erwähnte Adjunction ist folgende. In der Ebene der gegebenen Curve nehme man zwei feste Punkte $O$ und $P$ an. Man verbinde $O$ mit einem beliebigen Punkte $M$ der Curve und ziehe durch $P$ eine Parallele zu der Normale der Curve in $M$; die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte $H$, der die adjungirte Curve beschreibt, wenn $M$ die Originalcurve durchläuft. Die vorliegende Abhandlung zeigt, wie die Kenntnis des Krümmungsmittelpunkts der adjungirten Curve den Krümmungsmittelpunkt der Originalcurve finden lässt. Scht.

B. Sporer. Jacob Steiner's Sätze über den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte einer Geraden und einer algebraischen Curve. Schlömilch Z. XXXVII. 65-78.

B. Sporer. Jacob Steiner's Sätze über die Mitten der Abschnitte, welche eine Curve auf einer Geraden bestimmt. Schlömilch Z. XXXVII. 340-365.

In eleganter Weise beweist der Verfasser in diesen beiden Abhandlungen alle Sätze, welche Jacob Steiner in den §§ 25, 26 und 27 der Abhandlung aufgestellt hat: „Ueber solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben, und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Curven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren". (Ges. Werke II. 501-596, J. für Math. XLVII. 7-108.) Einige Vermutungen von Steiner werden dabei als richtig, andere als irrig erkannt. Scht.

---

D. N. Seiliger. Aus dem Gebiete der Geometrie und der Mechanik. Odessa Math. Ges. XIV. 157-164. (Russisch.)

I. Die Krümmungsmittelpunkte eines Büschels von Isogonalen zu einer Schar ebener Curven $\alpha$, welche dem Mittelpunkt $A$ des Büschels entsprechen, liegen auf einer Geraden, der Verbindungslinie der zu $A$ gehörigen Krümmungsmittelpunkte der durch $A$ gehenden Curve $\alpha$ und der zu ihr in $A$ orthogonalen Curve.

II. Schneiden wir eine Fläche durch die Ebenen eines Bündels $S$, so liegen die Krümmungsmittelpunkte aller dieser ebenen Schnitte auf einer Fläche vierter Ordnung mit einem Tripelpunkte in $S$ und einer Doppellinie, der Normale zu $(S)$ in $S$. Si.

K. Doehlemann. Ueber die festen und involutorischen Gebilde, welche eine ebene Cremona-Transformation enthalten kann. Habil. München. 8°.

Vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 650.

---

Th. Reye. Geometrie der Lage. Vorträge. Abteilung 2 XIV + 330 S.; 3: XIV + 224 S. 3. Aufl. Leipzig. Baumgärtner. 8°.

---

## B. Besondere ebene Gebilde.

F. Bücking. Die Winkelgegenpunkte des Dreiecks. Ein Specialfall der involutorischen Verwandtschaft. Pr. (No. 522) Realsch. Metz. 31 S. 4°. Mit 4 Fig.-Taf.

Der Hauptteil der Abhandlung ist gleichzeitig als Dissertation der Universität Tübingen erschienen, nur dass die Programm-Abhandlung noch einen bemerkenswerten Anhang besitzt.

Fällt man von einem beliebigen Punkte $P$ der Ebene eines Dreiecks die Lote auf die Seiten des letzteren, legt man dann durch die Fusspunkte einen Kreis, und errichtet man endlich in den zweiten Schnittpunkten dieses Kreises mit den Seiten wiederum Lote, so schneiden sich die erhaltenen drei Lote in einem einzigen Punkte, dem sogenannten Winkelgegenpunkte des Punktes $P$ bezüglich des Dreiecks. Schon Steiner hatte sich mit der Theorie der Winkelgegenpunkte, wenn auch nicht eingehender, beschäftigt (Ges. Werke I. 189). Eine Anwendung dieser Punkte brachten dann die zahlreichen Arbeiten, welche sich mit dem Kreise von Brocard (1880) und den sich daran anschliessenden Figuren beschäftigten. Hier aber werden die Winkelgegenpunkte allgemein und um ihrer selbst willen studirt. An die Definition derselben schliesst sich die der Winkelgegengeraden und Winkelgegencurven. Die Verwandtschaft zwischen einem Punkte und dem bezüglich eines Dreiecks zugehörigen Winkelgegenpunkte ist eine birationale quadratische, also Cremona'sche. Auf die Winkelgegenpunkte, welche übrigens auch die Brennpunkte der Kegelschnitte sind, die den Seiten des Fundamentaldreiecks einbeschrieben werden können, lässt sich auch die Polarentheorie des Kreises anwenden. Der im Eingang erwähnte Anhang baut Constructionen von besonderen Kegelschnitten, von denen drei Punkte gegeben sind, auf die Resultate des Hauptteils auf. Scht.

---

P. Molenbroek. Sur quelques propriétés du triangle. Nouv. Ann. (3) XI. 121-147, 179-199.

Sind zwei Dreiecke $ABC$ und $abc$ collinear, so liegen die

sechs Schnittpunkte je einer Seite mit den beiden nicht entsprechenden auf einem Kegelschnitte $K$. Zieht man durch $A$, $B$, $C$ drei Parallelen zu $bc$, $ca$, $ab$, so sind deren Richtungen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ nicht unabhängig von der Lage des Collineationscentrums $O$. Es werden die Bedingungen untersucht, unter welchen 1) $abc$ für die Richtungen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ und ein bestimmtes Centrum $O$ collinear mit $ABC$ sein kann, 2) $K$ ein Kreis ist. Es ergiebt sich: Wenn die Summe der Neigungen von $\lambda$, $\mu$, $\nu$ gegen die Seiten von $ABC$ ein Vielfaches von $\pi$ ist, so lassen sich für ein bestimmtes $O$ zu $ABC$ collineare Dreiecke zeichnen, deren Seiten den Richtungen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ parallel sind und die nicht entsprechenden Seiten von $ABC$ in sechs Punkten eines Kreises schneiden. Aendert $O$ seine Lage, während $\lambda$, $\mu$, $\nu$ constant bleiben, so sind alle zugehörigen Kreise coaxial, in zwei Fällen concentrisch, nämlich wenn $\lambda = \mu = \nu = 1$ und wenn $\lambda = \mu = -\nu = -1$ ist. Interessante Specialfälle ergeben sich, wenn die merkwürdigen Punkte mit $O$ zusammenfallen oder auf der Axe jener Kreise liegen. Lg.

---

R. Skutsch. Ueber harmonische Strahlen. Hoppe Arch. (2) XI. 206-207.

Glaubt die der Definition zu Grunde liegende Eigenschaft am leichtesten analytisch herleiten zu können. Lg.

M. Brückner. Das Ottojano'sche Problem. Eine mathematisch-historische Studie. Pr. (Nr. 555) Realgymn. Zwickau. 25 S. 4⁰. Mit 1 Fig.-Taf.

Eine interessant geschriebene Einleitung über die am meisten umworbenen rein-geometrischen Probleme, unter denen mit Recht das Malfatti'sche in erster Linie hervorgehoben wird, führt den Verfasser auf die unter dem Namen „Castillon'sches Problem" bekannte Aufgabe, in einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen. Der im Titel genannte Mathematiker hatte nun die erste leicht ausführbare, rein geometrische Lösung nicht nur des Dreiecksproblems, sondern auch

des auf ein „Polygon von $n$ Seiten verallgemeinerten“ Problems gegeben, und zwar schon in seinem 16. Jahre (Verona 1788). Der Referent gesteht gern ein, dass er aus der anzahlgeometrisch leicht erkennbaren Zahl 2 der Lösungen zwar wusste, dass das Problem mit Zirkel und Lineal auch für ein $n$-Eck lösbar sein müsse, aber nie zu einer Lösung gelangt ist. Der Verfasser der vorliegenden Abhandlung behandelt nun ausführlich den Ursprung des Problems, die Lösungen von Castillon (1742) und Lagrange, dann die von Euler, Fuss und Lexell. Alle diese Lösungen beziehen sich nur auf ein einem Kreise einbeschriebenes Dreieck. Ottojano aber hat das Problem auf ein $n$-Eck verallgemeinert. Malfatti's Lösung ist ähnlich der von Ottojano. L'Huilier und Carnot gaben analytische Lösungen, Brianchon, Gergonne, Servois und Rochat dagegen synthetische Lösungen, wobei nicht unerwähnt bleiben darf, dass dadurch das Problem die Verallgemeinerung gewann, dass man verlangte, um einen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen. Danach werden noch die Untersuchungen von Poncelet, Steiner und Petersen behandelt. Auch Steiner behandelte das duale Analogon einer Verallgemeinerung des Problems in seiner berühmten Schrift: „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt vermittelst der geraden Linie und eines festen Kreises“. Steiner's Aufgabe lautet dort: In einen durch irgend fünf Punkte (oder Bedingungen) gegebenen Kegelschnitt ein $n$-Eck zu beschreiben, dessen Seiten zugleich nach bestimmter Ordnung durch $n$ gegebene Punkte gehen.

Scht.

J. Morawetz. Ueber die Berührung und den Winkelschnitt von Kreisen und Kugeln. Pr. K. K. Oberrealschule, II. Bezirk. Wien. 1892. 8°.

Der Verf. leitet in dieser Arbeit Eigenschaften und Constructionen derjenigen Kreissysteme ab, welche zwei oder drei Kreise berühren, zwei, drei oder vier Kreise gleichwinklig, zwei oder drei Kreise unter gegebenen Winkeln schneiden; ferner der Systeme von Kugeln, welche zwei, drei, vier Kugeln berühren, zwei, drei,

vier, fünf Kugeln gleichwinklig, zwei, drei, vier Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden.

Diese Aufgaben sind mit Ausnahme derjenigen der letzten Gruppe von Hrn. Fiedler in seiner „Cyklographie" (Leipzig 1882) nach der cyklographischen Methode gelöst. In dieser vorliegenden Arbeit werden hauptsächlich die projectiven Beziehungen der Punktreihen, Geraden- und Ebenenbüschel untersucht, welche die Kreise, bez. die Kugeln der behandelten Systeme mit den jedes Mal gegebenen bestimmen, und mittels dieser Projectivitäten lassen sich die angeführten Aufgaben leicht erledigen. Fast überall ist von dem Poncelet'schen Continuitätsprincip Gebrauch gemacht.

Der Schlussartikel zeigt, wie sich die betreffenden Constructionen durchführen lassen, wenn manche der gebrauchten Constructionselemente imaginär werden. Hau.

W. McF. Orr. The contact relations of certain systems of circles and conics. Cambr. Proc. VII. 262-264. (1891.)

Zur Kennzeichnung des Inhalts möge der folgende Satz angeführt werden: Wenn vier Kreise $X$, $Y$, $P$, $Q$ so beschaffen sind, dass durch je einen der Schnittpunkte von $X$ und $P$, $X$ und $Q$, $Y$ und $P$, $Y$ und $Q$ ein Kreis gezogen werden kann, so können die acht Kreise, welche $X$, $Y$ und $P$ berühren, und die acht Kreise, welche $X$, $Y$ und $Q$ berühren, in sechzehn Gruppen von vier Kreisen (zwei Kreisen von jeder der beiden Arten) dergestalt angeordnet werden, dass jede Gruppe ausser $X$ und $Y$ zwei gemeinsame Berührungskreise besitzt. Hieran schliessen sich andere Sätze über Berührung von Kreisen an, die auch auf Kegelschnitte ausgedehnt werden, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt doppelte Berührung besitzen. Ho.

A. del Re. Sopra diverse proposizioni nella geometria projettiva delle coniche e delle quadriche. Rivista di Mat. II. 138-142.

Der Verf. hat in seinen Vorlesungen über projective Geometrie gelegentlich bemerkt, dass die gewöhnlichen Beweise einiger wich-

tigen Sätze einer Vereinfachung fähig sind, und solche Aenderungen macht er durch den gegenwärtigen Aufsatz bekannt. Die in Rede stehenden Lehrsätze sind: I. Projicirt man die Punkte eines Kegelschnittes aus zweien seiner Punkte auf eine beliebige Gerade der Ebene, so erhält man zwei projective Punktreihen, deren Ordnungsinvolution (vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 548) von den Projectionscentren unabhängig ist. II. Jede Curve, welche durch zwei projective, in derselben Ebene befindliche Strahlenbüschel erzeugt wird, kann auch durch zwei projective, in derselben Ebene befindliche Punktreihen erzeugt werden. III. Ist im gewöhnlichen Raum eine mit einer reellen Ordnungsfläche versehene Polarität gegeben, so kann man unendlich viele Paare reciproker Bündel finden, welche durch die Durchschnitte entsprechender Elemente jene Fläche erzeugen. IV. Sind umgekehrt zwei reciproke Bündel gegeben, so ist in Folge davon eine räumliche Polarität bestimmt, deren Ordnungsfläche eben die durch jene Bündel erzeugte Fläche ist. Der vorliegende Beweis von Satz III ist schon in den „Escursioni matematiche diverse“ des Verf. enthalten (Batt. Giornale XXVIII, vgl. F. d. M. XXII. 1890. 545), während derjenige von Satz I zu einer Prioritätsreclamation seitens des Herrn Amodeo (Rivista di Mat. II. 150) Veranlassung gegeben hat. La.

R. Moskwa. Pascal'sches Sechseck und Brianchon'sches Sechsseit. I. Teil. Pr. Drohobycz. 1892. 3-42. (Polnisch.)

Bearbeitet nach Otto Dziobek. Neue Beiträge zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks. Dn.

---

E. M. Langley. A statical proof of Brianchon's theorem. Ed. Times LVI. 73. Lp.

F. Palatini. Un teorema sulle coniche e corollarii relativi. Periodico di Mat. VII. 133-136.

Einfache Anwendungen der projectiven Theorie der Kegelschnitte. La.

---

**F. Ruth.** Beitrag zur Construction der Kegelschnitte aus imaginären Elementen. Monatsh. f. Math. III. 81-86.

Sind fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben und eine durch einen dieser Punkte gehende gerade Linie, so ist nach dem Pascal'schen Satze der zweite Schnittpunkt, den diese Linie mit dem Kegelschnitte haben muss, linear construirbar. Sind aber zwei oder vier der gegebenen Punkte imaginär, so ist natürlich gleichfalls die Auffindung des zweiten Schnittpunkts auf einer Geraden, die durch einen gegebenen reellen Punkt geht, linear. Schon hatte Herr Spath in Monatsh. f. Math. I (F. d. M. XXII. 1890. 647) die linealen Constructionen für diese Fälle des Imaginärseins angegeben, auch Herr Stolz in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie die Constructionen analytisch abgeleitet. Der Verfasser aber giebt dieselben hier synthetisch, indem er den Gedanken verfolgt, die auf Geraden mit einer elliptischen Involution gegebenen imaginären Punkte durch reelle Punkte auf diesen Trägern zu ersetzen, welche mit den übrigen gegebenen reellen Punkten einen Kegelschnitt bestimmen, auf dem auch der gesuchte sechste Punkt liegt.

Scht.

**A. Breuer.** Imaginäre Kegelschnitte. — Die einfachste Lösung des Apollonischen Tactionsproblems. — Ueber Conographie. Erfurt. Bacmeister. 16, 16, 10 S.

Bereits bei früherer Gelegenheit [Zeitschr. f. Math. und Physik] hat der Referent hervorgehoben, dass er in der ersten und zweiten der Abhandlungen wesentlich Neues nicht findet. Die Anschauungen, die der Verf. über goniometrische Functionen complexer Argumente entwickelt, sind irriger Natur. Seinem Universal-Conographen schreibt Herr Breuer selbst nur eine mehr theoretische Bedeutung zu. Er beruht auf dem folgenden Satz: Verlängert man einen Brennstrahl über den Brennpunkt hinaus um $p$, das Lot auf die zugehörige Directrix über den Fusspunkt hinaus um $\varepsilon p$, so liegen diese Punkte mit dem Schnittpunkte zwischen Hauptaxe und Directrix auf einer Geraden. Für Hyperbel und Parabel werden besondere Mechanismen angegeben, von denen ersterer dem Jost'schen Ellipsographen nachgebildet ist. E. K.

K. Schober. Construction von Kegelschnittslinien aus imaginären Elementen auf Grund neuer Sätze der Polarentheorie. Innsbruck. 20 S. 8°.

K. Bobek. Zur Theorie der Kegelschnittsbüschel. Prag. Math. Ges. 1892. 100-117.

Hat ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ auf einer Geraden $\mathfrak{M}$ die Polinvolution $\{\mathfrak{C}^2\}$, deren Paare $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}\mathfrak{y}'$, ... seien, so entsprechen diesen Punktepaaren die Punktepaare $xx'$, $yy'$, ... des der $\mathfrak{M}$ nach Steiner'scher Verwandtschaft entsprechenden Kegelschnitts $\mathfrak{M}^2$ derart, dass die hierdurch bestimmte Involution $\{C^2\}$ auf $\mathfrak{M}^2$ die Gerade $\mathfrak{K}$ zur Polare hat. — Ausser dem Beweise dieses Satzes enthält die Schrift mannigfaltige Beobachtungen. H.

K. Bobek. Die Brennpunktscurve des Kegelschnittsbüschels. Monatsh. f. Math. III. 309-317.

Dieselbe ist eine Curve sechster Ordnung, welche die Ecken des allen Kegelschnitten conjugirten Poldreiecks, die Höhenfusspunkte dieses Dreiecks und die imaginären Kreispunkte der Ebene zu Doppelpunkten hat. In den Ecken des Poldreiecks sind die Doppelpunktstangenten zu einander orthogonal. H.

---

D. Montesano. Su di un sistema lineare di coniche nello spazio. Torino Atti. XXVII. 660-690.

Die alten Geometer kannten ausschliesslich die Punktgeometrie; daher beschäftigten sie sich nur mit den Eigenschaften der Punktsysteme. Vom Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts an beginnen die Untersuchungen über die Geradensysteme in der Ebene und die Ebenensysteme im Raume, und es ist nur etwa fünfzig Jahre her, seit die Forschungen über Geradensysteme im Raume begannen. Diesen folgten rasch die wichtigen und allgemein bekannten über Kugelsysteme und die etwas minder wichtigen und gewiss minder bekannten über Kreissysteme. Will man in der-

selben Richtung fortfahren, so bietet sich natürlich die Bestimmung der Eigenschaften der Kegelschnittssysteme dar. Zu der Auflösung der bezüglichen Aufgaben will die zu besprechende Abhandlung einen Beitrag liefern, der einem besonderen Kegelschnittsysteme gewidmet ist.

Es sind gegeben ein Ebenenbündel $(O)$ und ein Netz $R$ von Flächen zweiter Ordnung; zwischen beiden ist eine projective Beziehung festgesetzt. Jede Ebene $\omega$ von $(O)$ wird von der entsprechenden Fläche $S_2$ von $R_2$ in einem Kegelschnitte $\gamma_2$ geschnitten; daher bekommt man $\infty^3$ Kegelschnitte, welche ein „lineares“ System $\Sigma$ bilden, weil durch jeden Punkt des Raumes im allgemeinen eine und nur eine Curve $\gamma_2$ geht. Einem Ebenenbüschel $(r)$ von $(O)$ entspricht in $R$ ein projectiver Büschel $(K_4)$ von $S_2$; diese Büschel erzeugen eine kubische Fläche $S_3$. Die so erzeugten $\infty^2$ Flächen $S_3$ bilden ein Netz $\Xi$; zwei von ihnen schneiden sich in einem $\gamma_2$ von $\Sigma$ und ferner in einer Curve siebenter Ordnung $C_7$, welche allen Flächen des Netzes gemein ist und in Folge dessen „Leitlinie des Systems“ genannt wird. $C_7$ ist vom Geschlechte 5; sie hat keine vierfach schneidende Gerade, aber $\infty^1$ dreifach schneidende; letztere bilden eine Regelfläche 15$^{\text{ter}}$ Ordnung $\Theta_{15}$, welche als Doppellinie eine Curve von der Ordnung 10 und dem Geschlecht 6 hat. Bezeichnet man durch $i, k, \lambda, \mu, \nu, \varrho$ der Reihe nach die Zahlen der Kegelschnitte von $\Sigma$, welche den folgenden Bedingungen in gleicher Folge genügen: durch einen gegebenen Punkt zu gehen, eine gegebene Gerade als Sehne zu haben, zwei gegebene Gerade zu schneiden, eine gegebene Gerade zu schneiden und eine gegebene Ebene zu berühren, zwei gegebene Ebenen zu berühren, eine gegebene Ebene in einer gegebenen Geraden zu berühren: dann kann man sagen, dass das Charakteristiken-Problem für das System $\Sigma$ durch folgende Gleichungen aufgelöst wird:

$$i = 1, \quad k = 1, \quad \lambda = 9, \quad \mu = 12, \quad \nu = 16, \quad \varrho = 6.$$

Die Geraden, welche die Kegelschnitte $\gamma_2$ berühren, bilden einen auf den Raum eindeutig abbildbaren Complex vierten Grades, welcher als Doppellinien die Strahlen des Bündels $(O)$ und die Sehnen der Leitlinien hat. — Die Curve $C_7$ ist in Ordnung und Geschlecht allgemein. Nimmt man eine solche beliebig an, so kann man $\infty^4$ Netze von Quadriflächen finden, welche ein System $\Sigma$ erzeugen,

von dem die angenommene Curve die Leitlinie ist. Die Kegelschnitte $\gamma_2$, deren Ebenen einem Kegel $m^{ter}$ Klasse angehören, dessen Mittelpunkt $O$ ist, bilden eine Fläche $(3m)^{ter}$ Ordnung, welche die Leitlinie als $m$-fache Curve besitzt, $10m$ Gerade enthält und rational ist, wenn und nur wenn jener Kegel rational ist: ist z. B. $m = 2$, so bekommt man eine Fläche sechster Ordnung, von der Caporali beiläufig gesprochen hat (Memorie di Geometria, Neapel 1888, S. 202).

Nachdem der Verf. die birationalen involutorischen Raumtransformationen bestimmt hat, welche jeden $\gamma_2$ in sich selbst transformiren, wendet er sich zu der Verwandtschaft zwischen Punkten und Geraden, welche man erhält, wenn man jeder Geraden des Raumes ihren Pol entsprechen lässt in Bezug auf den Kegelschnitt $\gamma_2$, welcher jene Gerade als Sehne hat; eine Verwandschaft, in welcher jedem Punkt unendlich viele eine Regelschar bildende Geraden entsprechen. Zuletzt untersucht der Verf. kurz den besonderen Fall, wenn alle Kegelschnitte von $\Sigma$ einen Punkt gemein haben. Er beweist, dass unter dieser Voraussetzung eine birationale Raumtransformation (4, 5) existirt, welche das gegebene System in einen Strahlenbündel verwandelt.

Ausser diesen Resultaten, auf welche wir der Kürze wegen uns beschränken müssen, enthält die Arbeit des Herrn Montesano viele andere bemerkenswerte und liefert einen neuen Beweis von der beneidenswerten Einbildungskraft und von dem Anschauungsvermögen des Verf., sowie von seiner grossen Vertrautheit mit den eigenartigen Methoden der synthetischen Geometrie. Wer jedoch die Lectüre derselben beendet hat, wird fast unwillkürlich mit uns die Fragen aufwerfen: Wenn man „linear“ ein System von $\infty^2$ Kegelschnitten im Raume nennt, falls durch jeden Punkt des Raumes im allgemeinen nur ein Kegelschnitt des Systems geht, ist dann das von Herrn Montesano erforschte System das allgemeinste unter den linearen? und im verneinenden Falle, welchen Platz nimmt dasselbe in der Gesamtheit aller linearen $\infty^2$ Kegelschnittsysteme ein? Fragen, welche eine unzweifelhafte Wichtigkeit für die ganze Geometrie der Kegelschnitte haben, deren Antwort man in der besprochenen Arbeit nicht erhält und schwerlich von der reinen Geometrie erwarten darf. La.

W. Erler. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauch in der Gymnasialprima bearbeitet. 4. Aufl. Leipzig. B. G. Teubner. 49 S. u. 1 Taf. 8°.

Chr. Beyel. Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve zweiter Ordnung und Tangenten aus einem Punkte. Schlömilch Z. XXXVII. 316. Lp.

Sollertinsky. Exercices élémentaires sur la parabole. J. de Math. élém. (4) I. 83-91.

Es wird eine Reihe von Sätzen und Aufgaben behandelt, welche sich auf die Parabel beziehen und geeignet sind, als Uebungsstoff im Unterricht verwendet zu werden. Gz.

J. Lemaire. Solution géométrique de la question de mathématiques du concours de l'École Polytechnique en 1891. Nouv. Ann. (3) XI. 49-60.

Malo. Autre solution géométrique de la même question. Nouv. Ann. (3) XI. 61-70.

Bei einer gegebenen Parabel trage man von jedem Punkte aus auf einer Parallele zu einer gegebenen Richtung $L$ die Entfernung dieses Punktes vom Brennpunkte nach beiden Richtungen ab. Die Endpunkte dieser Abtragungen beschreiben zwei Parabeln, wenn der Punkt die Parabel durchläuft. Die Axen dieser Parabeln sind zu einander senkrecht. Die Summe der Quadrate ihrer Parameter ist unabhängig von der Richtung $L$. Beschreibt $L$ alle Richtungen, so durchlaufen die Scheitel der Parabeln eine Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Dies wird in beiden Abhandlungen geometrisch bewiesen und eingehend besprochen.

Scht.

v. Metzsch. Verzeichnung der Parabel. Centralbl. der Bauverw. XI. 144. (1891.)

Construction der Parabel, wenn eine zur Axe senkrechte Sehne

$AB$ und ein Punkt $P$ gegeben ist. Man errichte in einem Endpunkte $B$ ein Lot zur Sehne und verbinde $P$ mit dem anderen Endpunkt $A$. Die beiden so gewonnenen Linien schneiden sich in $C$. Von $P$ aus wird ein Lot $PF$ auf $AB$ gefällt und $F$ mit $C$ verbunden. Zieht man nun durch einen Punkt $F_1$ von $AB$ eine Parallele zu $FC$, welche $BC$ in $C_1$ schneiden möge, und verbindet man $A$ mit $C_1$, so erhält man in dem Schnittpunkte $P_1$ der Geraden $AC_1$ und der in $F_1$ zu $AB$ errichteten Senkrechten einen weiteren Punkt der Parabel. F. K.

---

E. Fischer. Zeichnung der Parabel, wenn drei Punkte und eine Richtung gegeben sind. Centralbl. der Bauverw. XI. 255. (1891.)

Im Anschluss an die von Herrn von Metzsch gegebene Construction giebt der Verfasser hier die Construction einer Parabel aus drei Punkten und der Axenrichtung, welche er in seinen Vorlageblättern für das „Linearzeichnen" (München 1873-1877. Teil III. Taf. 3. Abb. 9) mitgeteilt hat. F. K.

---

Th. Pierus. Parabelschnittpunkte. W. Oestr. Ing. u. Arch. XVI. 183-184. (1891.)

Es handelt sich um die Aufgabe, den Schnitt einer Parabel und einer zur Axe senkrechten Geraden zu finden, wenn die Axe und auf derselben der Scheitel sowie ein Punkt der Parabel gegeben sind. F. K.

---

A. Mannheim. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (3) XI. 431-433.

Der Verfasser behandelt zuerst eine Frage, welche die Ellipse und den umschriebenen Kreis betrifft, aber nur unvollständig angedeutet ist, und geht dann zu einer anderen Frage über, wobei er den Satz angiebt: Von einem Punkte, der beliebig in der Ebene einer geometrischen Curve gewählt ist, ziehe man alle Tangenten an diese Curve; darauf teile man den Krümmungsradius der Curve in jedem der Berührungspunkte durch den Kubus der Entfernung

dieses Berührungspunktes vom Ausgangspunkte der Tangenten; dann ist die Summe aller so erhaltenen Quotienten gleich Null. Und ferner: Legt man an eine geometrische Curve alle Tangenten, die einer und derselben Geraden parallel sind, dann ist die Summe der Krümmungsradien in den verschiedenen Berührungspunkten dieser Tangenten im allgemeinen gleich Null. Dieser letztere Satz stammt von Duhamel her (Journ. de Math. (1) VI. 364). Aus demselben hat der Verfasser durch wiederholte Anwendung des Princips reciproker Radien den ersteren Satz hergeleitet. Mz.

---

Chr. Beyel. Ueber die Ellipse mit dem Axenverhältnis $1:\sqrt{2}$. Hoffmann Z. XXIII. 323-340.

Ausführliche Behandlung eines Beispieles, durch welches im Unterrichte der innere Zusammenhang zwischen der darstellenden Geometrie und der projectiven Geometrie dargelegt werden soll. Referent hat nicht erkennen können, warum die besondere Ellipse mit dem Axenverhältnis $1:\sqrt{2}$ bevorzugt ist vor einer Ellipse mit beliebiger Excentricität. Lp.

---

A. Boulanger. Sur un théorème connu de géométrie. Démonstration élémentaire. J. de Math. spéc. (4) I. 129-132.

Es wird auf elementarem Wege der folgende, von Hrn. Mannheim (Cours de géométrie descriptive de l'École Polytechnique, 125-126) begründete Satz bewiesen: Zieht man in einer gegebenen Ellipse parallele Sehnen und beschreibt über denselben als Durchmessern Kreise, so ist die Enveloppe dieser Kreise eine Ellipse, deren Brennpunkte in den Endpunkten des zu den betrachteten Sehnen conjugirten Durchmessers liegen. Gz.

---

F. Prime. Sur le problème de Chasles. J. de Math. spéc. (4) I. 151-152.

Frau Prime giebt eine anscheinend neue Construction der Symmetrieaxen einer durch ein System conjugirter Durchmesser

bestimmten Ellipse. Die Betrachtungen werden dann noch angewandt auf die Aufgabe, die Schnittpunkte zweier Ellipsen zu construiren, welche durch je zwei conjugirte Durchmesser bestimmt sind, doch so, dass einer dieser Durchmesser beiden Ellipsen gemeinsam ist. Gz.

---

J. Neuberg, G. de Longchamps. Solution of question 11043. Ed. Times LVI. 65-67.

Zwei Gerade $t$ und $t'$ wälzen sich auf zwei gegebenen Curven $U$ und $U'$ mit solchen Winkelgeschwindigkeiten, dass die Strecke, welche sie aus einer gegebenen Geraden $\varDelta$ ausschneiden, eine constante Länge $K$ behält. Die Tangente an dem Orte des Schnittpunktes $A$ von $t$ und $t'$ zu bestimmen. Hr. de Longchamps giebt zwei Constructionen an; die des Hrn. Neuberg möge hier folgen: Sind $P$, $Q$ die Berührungspunkte von $t$, $t'$ bezw. mit $U$, $U'$, so fällt die gesuchte Tangente mit der Tangente derjenigen Hyperbel zusammen, welche der Ort des Schnittpunktes zweier um $P$, $Q$ sich drehenden und aus $\varDelta$ die Strecke $K$ herausschneidenden Strahlen ist. Diese Hyperbel geht durch $P$, $Q$ und hat die Gerade $\varDelta$ zur Asymptote. Bei dem der Hyperbel eingeschriebenen Viereck $APXQ$, wo $X$ der Punkt im Unendlichen auf $\varDelta$ ist, schneiden sich die in $A$ und $X$ gezogenen Tangenten auf der Geraden, welche die Schnittpunkte $Q'$, $P'$ der Gegenseiten $AP$ und $XQ$, $AQ$ und $PX$ verbindet. Schneidet also $P'Q'$ die Gerade $\varDelta$ in $S'$, so ist $AS'$ die gesuchte Tangente. Lp.

---

J. C. Malet, J. C. St. Clair, D. Edwardes. Solution of question 11231. Ed. Times LVI. 97.

Die Tangenten in den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte treffen diese Curven ausser in jenen Schnittpunkten noch in acht Punkten; diese acht Punkte liegen auf einem dritten Kegelschnitte. Lp.

---

W. Binder. Neue Axenconstructionen eines durch fünf beliebige Bedingungen gegebenen Kegelschnittes nach projectivischer Methode. Wiener Neustadt. 21 S. 8°.

---

W. Panzerbieter. Ueber einige Lösungen des Trisections-Problems mittels fester Kegelschnitte. Pr. Falk-Realgymn. Berlin. 25 S. 4°.

Die Mitten der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und der Scheitel des rechten Winkels bestimmen eine gleichseitige Hyperbel; der Umkreis des Dreiecks hat mit ihr drei Schnittpunkte, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden, und welche für die spitzen Winkel des Dreiecks sowie für die Nebenwinkel Trisections-Geraden ergeben. Dieser schon im Vorjahre mitgeteilte Satz (F. d. M. XXIII. 1891. 676) wird auf anderem Wege nochmals bewiesen, und es wird gezeigt, wie mit ihm eine grössere Zahl der bisher bekannten Lösungen des Trisections-Problems in Zusammenhang gebracht werden kann. R. M.

---

W. Panzerbieter. Dreiteilung jedes Winkels mittels fester Kegelschnitte. Hoppe Arch. (2) XI. 349-351, 408-411.

Wenn man bei einem rechtwinkligen Dreiecke die eine der beiden Katheten $CB \equiv a$ in zwölf, die andere $CA \equiv b$ in vier gleiche Teile teilt und vom Scheitel $C$ des rechten Winkels aus den fünften Teilpunkt $E$ auf $a$, den dritten Teilpunkt $F$ auf $b$ als Ausgangspunkt von Parallelen zu den Katheten betrachtet, den Schnittpunkt $O$ beider Parallelen bestimmt, wenn man dann ferner $FA$ durch $A$ bis $G$ verlängert, so dass $FG$ die Grösse der Höhe eines über $\frac{b}{2}$ errichteten gleichseitigen Dreiecks erreicht, $OB_1$ und $OB_2$ gleich $OG$ und $OA_1$ und $OA_2$ zu Höhen des über $B_1B_2$ errichteten gleichseitigen Dreiecks macht, so wird der dem Dreieck $ACB$ umschriebene Kreis von der Ellipse, deren Axen $A_1A_2$ und $B_1B_2$ sind, in $C$ und ausserdem in den drei Punkten $P_1$, $P_2$, $P_3$ derartig geschnitten, dass $AP_1$, $BP_3$ Trisectionslinien der Dreieckswinkel $BAC$ und $ABC$ sind, $AP_2$, $BP_2$ Trisectionslinien der entsprechenden Nebenwinkel und $MP_1$, $MP_3$ Trisectionslinien der Winkel $BMC$ und $AMC$ sind (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 676). Die Resultate der zweiten Abhandlung beziehen sich auf die Schnittpunkte noch anderer zwei Kegelschnitte, die mit dem Fun-

damental-Dreieck zusammenhängen, und lassen sich nicht mit der in diesem Jahrbuch erforderlichen Kürze ausdrücken. Scht.

---

J. Griffiths. Note on finding the $G$-points of a given circle with respect to a given triangle of reference. Lond. M. S. Proc. XXIII. 96-99.

$G$-Punkt eines Kreises für ein Dreieck ist hier Brennpunkt eines Kegelschnitts, welcher die Seiten des Dreiecks und den Kreis, letzteren doppelt berührt, während die Berührungssehne der Verbindungslinie von $G$ mit seinem Inversen parallel geht; so sind z. B. die beiden Brocard'schen Punkte ein Paar $G$-Punkte für den Umkreis. Lg.

---

Ed. Weyr. Construction von Osculationskegelschnitten der durch krumme projectivische Reihen und Büschel erzeugten Curven. Rozpravy. I. No. 5. (Böhmisch mit einem ausführlichen deutschen Résumé.)

Schröter hat (J. für Math. LIV) für die Curve, welche durch Verbindungslinien homologer Punkte von auf zwei Kegelschnitten liegenden projectivischen Reihen erzeugt wird, die Bestimmung der Berührungspunkte gelehrt; in dieser Arbeit wird ein Schritt weiter vorwärts gethan, indem die Construction des osculirenden Kegelschnitts gegeben wird.

Die Lösung gelingt nach Erledigung eines Problems der Raumgeometrie, nämlich der Construction der Osculationshyperboloide zu der durch die Verbindungsgeraden zweier irgend wie im Raume liegenden projectivischen Punktreihen zweiten Grades erzeugten Regelfläche. Lh.

---

R. Russel. Ruler constructions in connexion with cubic curves. Dublin Trans. XXX. (Part VI). 295-302.

Das zuerst von Sir Andrew Hart gelöste Problem (Cambr. and Dublin Math. J. VI. 181), mit Hülfe des Lineals allein den neun-

ten Punkt zu bestimmen, der allen ebenen kubischen Curven durch acht gegebene Punkte gemeinsam ist, wird hier nach einer anderen Methode gelöst. Es ist ein bekannter Satz, dass eine, und nur eine, kubische Curve durch acht gegebene Punkte so gelegt werden kann, dass der Punkt 8 der corresiduale (nach Sylvester's Ausdrucksweise) der anderen sieben werde. Denn eine solche kubische Curve, wenn sie beschrieben ist, wird durch jede andere kubische Curve, welche durch die acht Punkte geht, in einem festen Punkte 9 geschnitten, der noch unbestimmt ist, und nach den Bedingungen trifft die Linie $\overline{89}$ die kubische Curve abermals in 8; mit anderen Worten, sie ist eine Tangente in 8 an der verlangten Curve, die somit eindeutig bestimmt ist. Eine Construction zur Bestimmung der Linie $\overline{89}$ und des Punktes 9 auf ihr und somit der kubischen Curve selbst wird dann gegeben. Nimmt man drei der gegebenen Punkte (1, 2, 3) als Ecken des Bezugsdreiecks, $(x', y', z')$ als die Coordinaten von 8, die übrigen vier aber als die gemeinsamen Punkte der Kegelschnitte $vy - wz = 0$, $wz - ux = 0$, $ux - vy = 0$, so können die Linien $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ leicht bestimmt werden. Denn fünf Punkte auf dem Kegelschnitte $ux - vy = 0$ sind bekannt, nämlich 4, 5, 6, 7 und $(x = 0, y = 0)$; mithin kann nach dem Pascal'schen Satze der zweite Punkt gefunden werden, in welchem $y = 0$ ihn schneidet, und dieser Punkt liegt auf $u = 0$. In ähnlicher Weise lässt sich der Punkt auf $u = 0$ finden, in welchem $z = 0$ den Kegelschnitt $wz - ux = 0$ schneidet. Dieses Dreieck $u, v, w$ steht im Mittelpunkte der Discussion. Es wird gezeigt, dass die Tangente der kubischen Curve und der Punkt 9 durch Constructionen bestimmt werden können, die vom Pascal'schen Satze abhängen und also bloss des Lineals benötigen.

Danach wird gezeigt, wie eine beliebige Zahl von Punkten auf der kubischen Curve bestimmt werden kann. Zuletzt wird nachgewiesen, wie bei neun gegebenen Punkten mit Hülfe des Lineals allein derjenige Punkt gefunden werden kann, welcher der corresiduale zu sieben ist, die beliebig ausgewählt werden können, so dass die allgemeine Aufgabe, eine kubische Curve zu beschreiben, auf die vorangehende zurückgeführt ist. In einer Note am Ende des Aufsatzes wird eine elementare Construction zur Auffindung

der Schnittpunkte zwischen einer kubischen Curve und einer Geraden gegeben, die sich um einen festen Punkt dreht.

Gbs. (Lp.)

---

W. G. Alexejew. Ueber die durch einen Büschel von Curven dritter Ordnung bestimmte Verwandtschaft. Mosk. Math. Samml. XVI. 256-258.

Wird ein Büschel von Curven dritter Ordnung $u_3 - \lambda v_3 = 0$ gegeben, so schneiden sich die Polargeraden $\Delta_2 u_x - \lambda \Delta_2 v_x = 0$ eines Punktes $x$ in Bezug auf alle Curven des Büschels in einem Punkte $y$, und alle polaren Kegelschnitte des Punktes $y$: $\Delta_2^2 u_y - \lambda \Delta_2^2 v_y = 0$ in vier Punkten $x'$, $x''$, $x'''$, $x^{\mathrm{IV}}$. Somit wird zwischen den Punkten $x$ und $y$ eine ein-vierdeutige Verwandtschaft bestimmt, welche mit der von demselben Verfasser früher betrachteten (F. d. M. XXIII. 1891. 647) übereinstimmt.

Si.

---

H. Valentiner. Om Konstruktionen af Curver af 3die og 4de Orden, bestemte ved at skulle gaae gjennem henholdsvis 9 og 14 Punkter. Nyt Tidss. for Math. III B. 33-48.

Ueber die Construction der Curven dritter und vierter Ordnung, die beziehungsweise durch 9 und 14 Punkte bestimmt sind.

Die erste der genannten Aufgaben ist schon oft behandelt worden und hier nur der Vollständigkeit wegen mitgenommen.

Die zweite wird dadurch gelöst, dass gezeigt wird, wie man mit Hülfe des Lineals, des Zirkels und eines festen Kegelschnitts die drei Punkte construiren kann, durch welche alle Curven vierter Ordnung gehen, die durch 13 gegebene Punkte gehen.

Die meisten Sätze, welche zu der Construction verwendet werden, handeln von Curven vierter Ordnung $\varphi_4$, welche durch 11 gegebene Punkte gehen. Diese 11 Punkte werden die Grundpunkte genannt.

Wenn durch die Grundpunkte zwei Curven vierter Ordnung $\varphi_4$ und $\psi_4$ gelegt werden, so schneiden sich diese in 5 weiteren Punkten. Durch diese 5 Punkte wird ein Kegelschnitt gelegt,

welcher $\varphi_4$ in drei Punkten schneidet. Diese drei Punkte, die Restpunkte, sind auf $\varphi_4$ völlig bestimmte und von der zufälligen $\psi_4$ unabhängige Punkte.

Die Construction beruht jetzt auf den folgenden Sätzen: Zwei willkürliche Gruppen dreier Restpunkte liegen immer auf demselben Kegelschnitte. Die Verbindungslinien zweier Punkte einer Restpunktgruppe hüllen einen Kegelschnitt ein. Die Verbindungslinie zweier Restpunkte einer Restpunktgruppe, welche einer $\varphi_4$ angehört, schneidet $\varphi_4$ in zwei weiteren Punkten $P_1$ und $P_2$, welche so liegen, dass jede Curve, welche durch die Grundpunkte und $P_1$ geht, auch durch $P_2$ gehen muss. Solche Punkte, wie $P_1$ und $P_2$, werden specielle Schnittpunkte genannt. Der geometrische Ort für die speciellen Schnittpunkte ist eine Curve siebenter Ordnung, welche in allen Grundpunkten Doppelpunkte hat. Alle Curven vierter Ordnung, welche durch die Grundpunkte gehen und einen gemeinsamen Restpunkt haben, bilden einen Bündel. Im übrigen muss Referent auf die Abhandlung selbst verweisen.

V.

---

B. Sporer. Construction einer Tangente in einem Punkte einer Curve dritten Grades. Schlömilch Z. XXXVII. 191.

---

Frau W. J. Schiff. Ueber Symmetrieaxen der centrischen Curven vierter Ordnung. Charkow Ges. (2) III. 163-172. (Russisch.)

Im Anschluss an den Aufsatz des Hrn. Portnikow (Nachr. Phys.-Math. Ges. Kasan (1) VII. 111-158), der einige Eigenschaften der genannten Curven in elementarer Weise untersucht hat, giebt Frau Schiff eine andere Methode zur Auffindung der Symmetrieaxen derselben Curven auf Grund der Betrachtung der diametralen Curven.

Si.

---

W. Rulf. Geometrische Bestimmung der Tangente der Cassini'schen Linie. Hoppe Arch. (2) XI. 438-439.

Die mitgeteilte, im Princip nicht neue Tangentenconstruction

(vgl. z. B. Pohlke, Darst. Geom. II. 187), wird in einer Form ausgesprochen, in der eine gewisse äusserliche Aehnlichkeit mit der Tangentenconstruction der Ellipse zu Tage tritt. Hk.

---

W. Rulf. Geometrische Bestimmung des Krümmungsmittelpunkts der algebraischen Spiralen. Monatsh. f. Math. III. 211-216.

Ist $O$ der Pol, $P$ ein Punkt der algebraischen Spirale, $T$ die Tangente, $N$ die Normale in $P$, und schneidet die Senkrechte in $O$ auf $OP$ die Tangente $T$ in $R$, die Normale $N$ in $Q$, so ist $OQ$ die Polar-Subnormale, $OR$ die Polar-Subtangente. Die Polar-Subnormalen der algebraischen Spiralen kann man als Fahrstrahlen einer neuen Spirale ansehen, die der Verfasser untersucht. Ist $t$ die Tangente in $Q$ zur Subnormalenspirale, und $D$ der Schnittpunkt der Normale $N$ mit der Berührungssehne $BC$ der beiden Tangenten $t$ und $T$, d. h. der Linie, die in $O$ auf der Verbindungsgeraden von $O$ mit dem Schnitt von $t$ und $T$ senkrecht steht, so ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt zu $P$ der vierte harmonische Punkt zu $D$ bezüglich der conjugirten Punkte $Q$ und $P$.

Scht.

---

H. Pilleux. Sur les centres de courbure. Nouv. Ann. (3) XI. 384-386.

Der Verfasser untersucht das Erzeugnis der beweglichen Verbindungsgeraden der Schnittpunkte zweier Curven mit den Schenkeln eines sich um einen festen Punkt als Scheitel drehenden rechten Winkels und gelangt dadurch zu den Krümmungsmittelpunkten von Fusspunktencurven und Antifusspunktencurven, insbesondere zu denen der Pascal'schen Schnecken und der Konchoiden.

Scht.

---

X. Antomari. Sur les podaires et sur les courbes polaires réciproques. J. de Math. spéc. (4) I. 99-102.

An zwei elementare und bekannte Sätze über die im Titel

genannten Curven werden einige naheliegende einfache Betrachtungen geknüpft. Gz.

---

Loucheur. Sur le lieu des sommets des angles constants circonscrits ou normaux à une épicycloïde. Application à la démonstration purement géométrique de propriétés de la cycloïde, de la cardioïde et des hypocycloïdes à trois et quatre rebroussements. Nouv. Ann. (3) XI. 374-384.

Chasles hatte in seinem Aperçu historique (2me édition, p. 125, 1875) den Satz aufgestellt, dass der Ort der Scheitel der constanten Winkel, die einer gewöhnlichen Epicykloide umschrieben werden können, wiederum eine Epicykloide sei. Dem Beweise dieses Satzes folgen Beweise von Eigenschaften specieller Curven. Die Beweismethode ist kinematisch. Scht.

---

## C. Besondere räumliche Gebilde.

H. Schröter. Elementare Construction der Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder. J. für Math. CIX. 341-357.

Bekanntlich nennt man drei Tetraeder in „desmischer" Lage befindlich, wenn je zwei derselben auf vierfache Weise perspectiv liegen, und die vier Perspectivitätscentra die Ecken des dritten Tetraeders sind. Schon früher war die Figur dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder mehrfach untersucht, nämlich von: 1) O. Hermes: Das Fünfflach und Fünfeck im Raume (J. für Math. LVI. 247. 1859); 2) L. Cremona: Teoremi stereometrici, dai quali si deducono le proprietà del esagrammo di Pascal (R. Accadem. dei Lincei; 1879); 3) C. Stephanos: Sur les systèmes desmiques de trois tetraèdres (Darboux Bull. (2) III. 1879); 4) H. Schröter: Einige Sätze über das Tetraeder (Tageblatt der Naturforschervers. zu Baden-Baden; 1879); 5) H. Schröter: Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species (J. für Math. XCIII. 169; 1882);

6) O. Schlömilch in der Zeitschr. für Math. und Phys. XXVII. (1882), „Kleinere Mittheilungen", Art. 24 u. 25 u. Bemerkungen von H. Schröter, S. 380; 7) E. Hess: Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder (Math. Ann. XXVIII. 167; 1886); 8) L. Klug: Ueber mehrfach perspective Tetraeder (Hoppe Arch. (2) VI. 93; 1887).

Die vorliegende Abhandlung des leider inzwischen der Wissenschaft durch den Tod entrissenen Verfassers giebt die Eigenschaften der Figur von drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern in übersichtlicherer Gestalt und mit einfacherer Herleitung, indem an das räumliche Fünfeck angeknüpft wird, und dadurch gewisse Analoga zu den Eigenschaften des vollständigen ebenen Vierecks geschaffen werden. Hierdurch wird die oben genannte Abhandlung von O. Hermes in gewissem Sinne ein Vorläufer der Schröter'schen Abhandlung. Zu der näheren Auseinandersetzung der Resultate dieser Abhandlung dürfte wegen der bei dem Gegenstande notwendigen Bezeichnungs-Symbolik hier nicht der Raum sein. Doch soll eins der wichtigsten Resultate Schröter's hier Platz finden, dass nämlich die 12 Seitenflächen dreier in desmischer Lage befindlichen Tetraeder eine Eigenschaft aufweisen, die derjenigen dualistisch gegenübersteht, welche die 12 Ecken zeigen. Wenn man nämlich die Lage zweier Tetraeder „perspectiv" nennt, wenn die vier Ecken des einen, verbunden mit den vier Ecken des anderen, vier Strahlen liefern können, die durch einen Punkt gehen, das Perspectivitäts-Centrum, so ist man berechtigt, „complanar" die Lage zweier Tetraeder zu nennen, wenn die vier Seitenflächen des einen von denen des andern in vier Geraden geschnitten werden können, die in einer und derselben Ebene liegen. Wenn man nun von drei in desmischer Lage befindlichen Tetraedern irgend zwei herausnimmt, so sind dieselben in vierfacher Weise complanar, und die Ebenen, welche diese Lage liefert, sind nichts anderes, als die vier Seitenflächen des dritten Tetraeders.

Scht.

---

## M. Bauer u. O. Böklen. Auflösung einer Aufgabe.

Böklen Mitt. V. 18-28.

Die genannten Verfasser geben jeder eine Lösung der folgenden Aufgabe: „Gegeben sind vier Ebenen und eine Gerade $g$, welche dieselben in $m$, $n$, $p$, $q$ schneidet. Man verlangt eine zweite Gerade $g'$, welche die Ebenen so in $m'$, $n'$, $p'$, $q'$ schneidet, dass $m'n' = mn$, $n'p' = np$, $p'q' = pq$ ist, und eine dritte Gerade $g''$, welche die Ebenen in $m''$, $n''$, $p''$, $q''$ so schneidet, dass

$$m''n'' : n''p'' : p''q'' = mn : np : pq$$

ist, und dass die Strecken $m''n''$, $n''p''$, $p''q''$ die kleinsten Werte annehmen.

Scht.

---

E. Müller (Wien). Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Monatsh. f. Math. III. 365-402.

Die Grundlage der vorliegenden Untersuchungen bilden die von Grassmann in der $A_2$ gegebenen kurzen Erörterungen über Kreisfunction, Kreisverwandtschaft und Doppelabstand eines Punktes von einer Kugel. Hiermit lässt sich, wie der Verf. zeigt, diejenige Geometrie, in welcher die Kugel (von übrigens beliebiger Dimensionenzahl) als Raumelement, Punkt und Ebene als ihre Specialfälle erscheinen, vollständig und auf kürzestem Wege gewinnen. Den Wert der Behandlung dieses Gegenstandes durch Grassmann's Methoden erblickt der Verf. mit Recht darin, dass durch Specialisirung der gewonnenen allgemeinen Sätze und durch Deutung derselben in verschiedenen Gebieten der organische Zusammenhang zwischen Sätzen dargelegt wird, zwischen denen man sonst keinen Zusammenhang vermutet. Hier, wie überall, wo man mit der Ausdehnungslehre arbeitet, zeigt sich die Wirkung ihrer Methoden zunächst darin, dass sie bekannte, zerstreut gefundene Thatsachen in ein einheitliches grosses System einordnet, in die Fülle der Resultate Ordnung und Uebersicht bringt, die organischen Zusammenhänge aufdeckt und nebenbei die zusammenhanglose, den Charakter der zufälligen Entstehung überall an sich tragende Symbolik der neueren Mathematik auf wenige einfache Grundprincipien zurückführt. Im Besitz eines derartigen Werkzeuges ist es dann in zweiter Linie leicht, zu den als Kriterium für die Brauchbarkeit einer Methode betrachteten „neuen Resul-

taten" zu gelangen. Man braucht z. B. nur, nach dem Vorgange des Verf., irgend einen geometrischen Satz in die Sprache der Ausdehnungslehre zu übersetzen und den so erhaltenen allgemeinen Satz in den verschiedenen Gebieten zu deuten.

Der vorliegende erste Teil der ganzen Arbeit behandelt im ersten Capitel die Zahlbeziehungen zwischen Kugeln. In diesen Beziehungen, die unmittelbar aus allgemeinen Sätzen der $A_2$ folgen, sind gleichzeitig alle Lagenbeziehungen der Kugeln enthalten. Das zweite Capitel giebt eine Uebersicht über die Kugelgebiete verschiedener Stufen (Büschel, Bündel, Gebüsch) und ihre Eigenschaften, sowie die der Orthogonalkugeln. Hier erweist sich die Kugelgeometrie im wesentlichen als identisch mit derjenigen des linearen vierdimensionalen Raumes. Auch lässt sich auf dieser Grundlage die projective Geometrie des Kugelraumes analog mit dem von v. Staudt für den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum gegebenen Beispiel entwickeln. Das „äussere" Product von $n$ unabhängigen Kugeln (Capitel 3) stellt das durch dieselben bestimmte Kugelgebiet dar, und gleichzeitig einen Zahlenwert, der gleich dem Werte des äusseren Productes ihrer Mittelpunkte ist. Ausserdem hat es noch eine anschauliche geometrische Bedeutung. Das „innere" Product zweier Kugeln (Capitel 4) ist gleichbedeutend mit ihrer gemeinschaftlichen Potenz. Die Bemerkung des Verf., dass der Productcharakter dieses Ausdrucks, ebenso wie der des negativen halben Quadrats der Entfernung zweier Punkte, auch von anderer Seite her erkannt wurde, beweist im Verein mit ähnlichen Thatsachen schlagend, wie sehr die Entwickelung der modernen Geometrie von selbst der durch Grassmann gegebenen Formulirung entgegenstrebt. Aus den allgemeinen Sätzen über innere Producte ergeben sich ferner mit Leichtigkeit die meisten der von Darboux, Frobenius u. a. gefundenen Sätze der Kugelgeometrie. Ueber den zweiten Teil der Abhandlung wird im nächsten Jahrgang der F. d. M. berichtet werden. Schg.

---

J. Thomae. Lineare Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten. Leipz. Ber. XLIV. 543-555.

Otto Hesse hatte im J. für Math. XXIV eine Fläche $F$ zweiter Ordnung dadurch linear construirt, dass er zu einem beliebigen Punkte des Raumes die ihm für die gesuchte Fläche zugehörige Polarebene fand. Diese Constructionsmethode, welche die Construction einer Reihe von Hyperboloiden oder je dreier Erzeugenden derselben erfordert und dadurch sehr umständlich wird, vereinfacht der Verfasser dadurch, dass er die Polarebene eines besonderen Punktes sucht, deren Auffindung die erwähnten Hülfs-Hyperboloide umgeht. Der Verfasser findet zur Lösung seiner Aufgabe in zwei Ebenen je fünf Punkte der Fläche, also die Elemente, welche die lineare Construction von zwei Kegelschnitten in einfachster Weise ergeben. Scht.

---

L. Ravier. Construction du dixième point d'une quadrique. Nouv. Ann. (2) XI. 289-291.

Die im Titel genannte Construction wird in einfachster Weise auf die Aufgabe zurückgeführt, den zweiten Schnittpunkt einer Geraden mit einer Fläche zweiter Ordnung zu suchen, welche durch einen bekannten Punkt dieser Geraden, fünf weitere gegebene Punkte gehen und eine gegebene Gerade als Erzeugende haben soll. Die Lösung dieser Aufgabe sowie die der ursprünglich gegebenen Aufgabe hat Analogien mit dem Pascal'schen Satze für sechs Punkte eines Kegelschnitts. Scht.

---

A. Tresse. Sur l'intersection de deux quadriques, dans le cas où elle se décompose. Nouv. Ann. (3) XI. 216-227.

Der Verfasser behandelt das Problem des Durchschnitts zweier Flächen zweiten Grades, indem er eine Uebertragung der Fläche zweiten Grades auf die Ebene benutzt, wie sie in der Geometrie von Clebsch sich findet. Dabei giebt er den Worten: Punkt, Gerade, Ebene den allgemeinsten Sinn, den sie in der analytischen Geometrie haben; er macht also keinen Unterschied zwischen dem Reellen und Imaginären und betrachtet eine Fläche zweiten Grades immer als eine mit geraden Linien behaftete Fläche. Die Ueber-

tragung auf die Ebene geschieht nun in folgender Weise: Ist $S$ die Fläche zweiten Grades, $O$ ein Punkt auf ihr, $OI$ und $OJ$ die beiden Geraden der Fläche durch $O$, die als getrennt vorausgesetzt werden, $P$ irgend eine Ebene, die nicht durch $O$ geht, so entspricht jedem Punkte $M$ der Fläche ein bestimmter Punkt $\mu$ (Bild von $M$) der Ebene und umgekehrt, nämlich in der Weise, dass immer $O$, $M$, $\mu$ in gerader Linie liegen. Eine Ausnahme findet nur insofern statt, dass, wenn $M$ nach $O$ gelangt, der Punkt $\mu$ ein unbestimmter Punkt der Geraden $IJ$ ist, und wenn $\mu$ nach $I$ oder $J$ kommt, der Punkt $M$ ein unbestimmter Punkt von $OI$ resp. $OJ$ wird. Auf der Fläche werden nun Curven betrachtet und die Abbildungen derselben in $P$. Dann betrachtet der Verfasser im besonderen die Curve, die eine zweite Fläche zweiten Grades in die erste hineinschneidet, sowie deren Abbild in $P$ und discutirt die hierbei auftretenden Fälle. Er findet schliesslich: Soll der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades zerfallen, so ist nötig und hinreichend, dass diese Flächen sich in zwei Punkten berühren, die entweder getrennt oder zusammenfallend sind. Haben zwei solche Flächen einen Kegelschnitt gemein, so haben sie noch einen zweiten gemein. Schneiden sie sich in zwei Geraden eines und desselben Systems, so schneiden sie sich noch in zwei Geraden des resp. anderen Systems. Mz.

---

V. Reyes y Prosper. Nota acerca de la geometría proyectiva sobre la superficie esférica. Progreso mat. II. 7-10.

Der Verfasser liefert einen von metrischen Beziehungen und von der Betrachtung des Unendlichen befreiten Beweis des auf zehn Ebenen bezüglichen Satzes, der in der projectiven Geometrie auf der Kugelfläche dieselbe Rolle spielt wie das Theorem von Desargues in der projectiven Geometrie der Ebene. Tx. (Lp.)

---

G. Kober. Nachtrag zu dem Aufsatze: „Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades“ in Math. Ann. XXXIII. Math. Ann. XL. 153-154.

Berichtigung eines Irrtums. Scht.

---

D. Valeri. Proprietà metriche delle cubiche gobbe. Modena Mem. (2) VIII. 385-413.

Das von Schröter eingeschlagene Verfahren, metrische Eigenschaften der kubischen Parabel zu entwickeln (F. d. M. XVII. 1885. 651), wird hier auf beliebige Raumcurven dritter Ordnung ausgedehnt. Jede Sehne hat auch hier ein Schmiegungs-Tetraeder, und die ihr gegenüberliegende Kante desselben kann als ihre „conjugirte" bezeichnet werden. So bestimmen drei beliebige Punkte der Curve drei Sehnen und drei conjugirte Strecken, es giebt also neun Tetraeder, welche je eine Sehne und je eine conjugirte Strecke zu Gegenkanten haben. Auf die Verhältnisse der Volumina dieser Tetraeder beziehen sich die ersten Sätze des Verf.'s. Wenn man aber die Schmiegungsebenen zweier Dreiecksecken mit der Tangente der dritten Ecke zum Schnitt bringt, so wird auf dieser Tangente eine neue begrenzte Strecke gewonnen, welche (wie schon bei Schröter) zur Bildung von Tetraedern herangezogen werden kann, welche mit den Schmiegungs-Tetraedern eine höchst elegante Relation eingehen.

Die gewonnenen Theoreme enthalten natürlich die Schröter'schen Sätze in sich; der Verf. specialisirt sie im zweiten Teil seiner Arbeit auch für die kubische Ellipse. Ref. möchte darauf verzichten, diese Resultate näher zu präcisiren, und will nur erwähnen, dass dabei als Grundlagen diejenigen beiden Curvenpunkte dienen, deren Schmiegungsebenen parallel sind. R. M.

---

J. Cardinaal. Over het ontstaan van oppervlakken van den vierden graad met dubbelrechte door middel van projectieve bundels van kwadratische oppervlakken. Amst. Akad. Verh. Sect. I, Deel I, No. 6. 63 S.

Vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 847; der Bericht über die vorliegende Arbeit erfolgt später.

---

A. Sucharda. Ueber die bei einer Gattung centrischer Rückungsflächen der vierten Ordnung auftretende Reciprocität. Wien. Ber. CI. 585-596.

Schon 1888 hatte der Verfasser in den Wien. Ber. eine Arbeit veröffentlicht, welche die Singularitäten einer Gattung von Rückungsflächen vierter Ordnung behandelt, und in welcher nachgewiesen wurde, dass jede von solchen Flächen eine Reihe von Singularitäten aufweist, die sich derart in Paare ordnen lassen, dass neben einer jeden Singularität stets auch ihre reciproke vorhanden erscheint. In der vorliegenden Abhandlung wird diese Reciprocität in aller Ausführlichkeit beleuchtet. Scht.

---

H. Drasch. Beitrag zur constructiven Theorie der windschiefen Regelflächen mit zwei Leitgeraden und einem Leitkegelschnitt. Wien. Ber. CI. 171-183.

Verschiedene Erzeugungsarten einer Regelfläche vierter Ordnung mit zwei Leitgeraden und einem Leitkegelschnitt, sowie eine Construction ihrer Inflexionstangenten in den Punkten der Doppelerzeugenden werden kurz besprochen. Js.

---

P. H. Schoute. On a certain locus. Edinb. Proc. XIX. 208-211.

Wenn die beiden Enden eines Papierstreifens zusammengeklebt werden, nachdem das eine um 180° gedreht ist, so erhält man eine Oberfläche mit nur einer Seite. Diese Oberfläche (marrowbone genannt, also Markknochen) ist der Ort einer Geraden, welche einen gegebenen Kreis orthogonal schneidet, falls die Beziehung 2 : 1 zwischen zwei gewissen Winkelgeschwindigkeiten besteht. Der Verf. betrachtet den allgemeineren Fall einer Oberfläche, für welche das Verhältnis zwischen den beiden Winkelgeschwindigkeiten $m:n$ ist. Cly. (Lp.)

---

R. Sturm. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. I. Teil. Leipzig. B. G. Teubner. XIV + 386 S. 8°.

Abgesehen von einigen Vorarbeiten von Grassmann (Ausdehnungslehre 1844 und 1862), Cayley, Sylvester, Kummer (1866:

Ueber algebraische Strahlensysteme) und Battaglini, war Plücker der erste, der mit voller Schärfe eine Geometrie aufstellte, die nicht den Punkt oder die Ebene, sondern den „Strahl“ als erzeugendes Element auffasst, und dies geschah in seinem berühmten Werke „Neue Geometrie des Raumes, begründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement“ (Leipzig 1868-1869). Da zu den Schülern Plücker's ein Felix Klein gehörte, so waren nur wenige Jahre nötig, um aus der Saat Plücker's einen kräftigen Baum aufschiessen zu lassen, die „Liniengeometrie“. Zahlreich sind die Abhandlungen, welche im nächsten Jahrzehnt nach dem Erscheinen von Plücker's Werk die Liniengeometrie immer mehr ausbildeten und vertieften. Doch waren die Untersuchungsmethoden in diesen Abhandlungen fast ausschliesslich analytisch-geometrisch, oder, wie bei den Arbeiten des Referenten, anzahl-geometrisch, also im wesentlichen algebraisch, jedenfalls aber nicht synthetisch im Sinne von Steiner, v. Staudt, Schröter, Reye, Sturm. Hier aber liegt nun mit synthetischem Aufbau das erste zusammenfassende Werk über Liniengeometrie vor.

Im Gegensatz zu anderen Synthetikern benutzt der Verfasser, wo es nur irgend von Nutzen ist, die vom Referenten ausgebildeten Methoden. Man könnte sagen, dass dadurch der Verfasser mehr oder weniger Principien benutzt, die schliesslich der Algebra entstammen, aber doch der „Algebra“, keinenfalls der analytischen Geometrie. Wenn daher jemand deshalb bestreiten wollte, dass die Untersuchungsmethode synthetisch ist, so müsste derselbe doch jedenfalls zugeben, dass sie nicht „analytisch“ ist.

Die einleitenden Betrachtungen des Verfassers beziehen sich auf die Oerter, welche von einem Strahl erzeugt werden können. In algebraischem Zusammenhang bilden $\infty^1$ Strahlen eine Regelfläche, $\infty^2$ Strahlen eine Congruenz, $\infty^3$ Strahlen einen Complex, und erst $\infty^4$ Strahlen bedecken den ganzen Strahlenraum. Nahe liegende Strahlenörter, z. B. der Ort der drei Raumcurven treffenden Strahlen, werden schon in der Einleitung betrachtet. Ebenso gehören zu den vorbereitenden Untersuchungen die von Chasles, Zeuthen und dem Referenten gefundenen allgemeinen Correspondenz-Formeln, sowie auch die Formeln zwischen den elementaren

Bedingungszahlen und den Ausartungsanzahlen bei Systemen von $\infty^1$ Kegelschnitten oder von $\infty^1$ Flächen zweiten Grades.

Naturgemäss beginnt der Verfasser, da er die Regelschar schon in der Einleitung behandelt hat, mit den Regelflächen dritten und vierten Grades, die mit Rücksicht auf alle möglichen Vorkommnisse bezüglich einer Doppelcurve behandelt werden. Dann folgt die Untersuchung des linearen Strahlencomplexes, wofür der Verfasser den besseren Namen Strahlengewinde einführt, und der linearen Congruenz, wofür der bessere Name Strahlennetz wohl Beifall finden wird. Hierbei werden natürlich auch das Nullsystem und die Büschel von Strahlengewinden mit eingehender Schärfe behandelt. Es wird nunmehr genügen, wenn von den weiteren grösseren Abschnitten des umfangreichen Buches nur noch die Titel folgen: Die linearen Systeme zweiter und dritter Stufe (Netz und Gebüsche) von Strahlengewinden. Das lineare System vierter Stufe (Gewebe) von Gewinden und der Inbegriff aller Gewinde. Erzeugnisse zweier oder mehrerer linearen Systeme von Gewinden, welche collinear sind. Orthogonale Gewinde. Die Gruppen von zwei bis sechs Gewinden, welche gegenseitig in Involution sind. Das Gebüsch der Trägerflächen der Regelscharen eines Strahlennetzes. Abbildung des Strahlengewindes in den Punktraum. Abbildung des Strahlenraumes in lineare Systeme vierter Stufe. Abbildung des Strahlenraumes in ein quadratisches Kegelschnittsystem vierter Stufe und aller Gewinde in die Kegelschnitte einer Ebene. Das System sechster Stufe der Regelscharen in einem Strahlengewinde. Collineationen und Correlationen, welche ein Gewinde in sich selbst überführen. Das zu einer kubischen Raumcurve gehörige Strahlengewinde. Endlich sind die letzten 50 Seiten des Buches ausschliesslich dem Reye'schen oder tetraedralen Complex gewidmet, der unter den Complexen zweiten Grades der einfachste ist.

Der zweite, auch schon vorliegende Teil des grossen Werkes ist den Congruenzen erster und zweiter Ordnung oder Klasse gewidmet, der dritte den Complexen zweiten Grades, von denen nur der Reye'sche Complex wegen seines Zusammenhangs mit den Congruenzen zweiter Ordnung schon am Schluss des ersten Teils behandelt ist.

Scht.

K. ZINDLER. Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume; lineare Complexe und Strahlensysteme in demselben. Wien. Ber. CI. 215-299.

In der reinen Geometrie ist es bekanntlich von der grössten Wichtigkeit, die Gesetze des linearen Raumes beliebig hoher Dimension in irgend einer Weise vorstellbar und damit beweisbar zu machen. Gewöhnlich interpretirt man den Raum durch ein lineares System genügend hoher Stufe (Involution $k^{ter}$ Stufe auf einem rationalen Träger, Netz ebener Curven derselben Ordnung etc.) und hat die Teilräume durch Netze entsprechend niedrigerer Stufe, die dem Hauptnetz angehören, zu ersetzen. Herr Z. betritt einen neuen Weg, bei dem, wie er sich ausdrückt, jedem reellen Punkte von $R_n$ etwas völlig Reelles entspricht.

Hierzu wird (§ 1) das Gesetz nochmals dargelegt, das zur Bildung linearer Mannigfaltigkeiten führt. Irgend zwei beliebige von $\infty^r$ gleichartigen geometrischen Gebilden mögen nach einem einheitlichen Gesetz auf $\infty^1$ dieser Elemente führen, die nach dem gleichen Gesetz aus irgend zwei von ihnen abgeleitet werden können. Verbindet man alle Elemente dieser „Geraden“ $R_1$ mit einem Elemente ausserhalb derselben, so entstehe eine „Ebene“ $R_2$, d. h. irgend zwei der erhaltenen $\infty^2$ Elemente mögen einen $R_1$ bestimmen, der dem $R_2$ völlig angehört, und irgend zwei derartige $R_1$ ein Element gemein haben. Ist dies allgemein erfüllt, so liegen alle Elemente in einem linearen Raum $r^{ter}$ Stufe $R_r$. Die $R_1$, welche die Elemente eines $R_2$ mit einem Elemente ausserhalb verbinden, ergeben einen linearen Raum $R_3$ mit $\infty^3$ $R_2$, von denen je $\infty^1$ einen $R_1$ und je $\infty^2$ ein Element gemein haben. Ist ausserhalb $R_3$ noch ein Element vorhanden, so kommt man in analoger Weise auf einen $R_4$ etc.

So kann man aus drei linearen Complexen unseres Raumes $\infty^2$ andere in der Art ableiten, dass die einem festen Punkte entsprechenden Ebenen einen Bündel bilden und alle diese Bündel unter einander collinear sind. Da man diese Mannigfaltigkeit als einen $R_2$ auffassen kann, so bilden alle linearen Complexe unseres Raumes eine lineare Mannigfaltigkeit fünfter Dimension. Die Ebe-

nen dieses Raumes sind collinear auf diejenigen unseres Raumes bezogen. Allgemein wird dies bei einem linearen Raum nicht der Fall sein, da dem Staudt'schen Beweis des Fundamentalsatzes topologische Voraussetzungen zu Grunde liegen, die in einem linearen $R_3$ nicht erfüllt zu sein brauchen. Ist es aber der Fall, so kann der $R_n$ in sich collinear und reciprok bezogen werden. Man kann dann, falls $n$ ungerade ist, ein Nullsystem und damit einen linearen Complex mit Hülfe eines $(2n-1)$-Ecks genau so definiren, wie es in unserem Raum mit Hülfe eines räumlichen Fünfecks geschieht. Es wird zuerst jeder Ecke des räumlichen $(2n-1)$-Ecks ein $R_{n-1}$ zugeordnet, der alle Ecken mit Ausnahme der beiden enthält, die die gegenüberliegende Seite begrenzen; hernach wird bewiesen, dass bei der so festgelegten reciproken Beziehung jedes Element in seinem zugehörigen $R_{n-1}$ liegt. Aus drei derartigen linearen Complexen kann man nun $\infty^2$ andere in der Art ableiten, dass die je demselben Punkte von $R_n$ angehörenden $R_{n-1}$ unter einander collineare Bündel bilden. Daher bilden alle linearen Complexe in $R_n$ eine lineare Mannigfaltigkeit [von der Dimension $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$]. Legt man als Element ein räumliches Nullsystem zu Grunde, so kommt man also zu einem linearen Raum 14^ter^ Dimension. Betrachtet man alle Nullsysteme, die in einem $R_{13}$ dieses Raumes möglich sind, so gelangt man zu einer linearen Mannigfaltigkeit 90^ster^ Dimension. Von ihm aus steigt man zu einem Raum 2002^ter^ Dimension auf etc. Wie man sieht, ist der Process, der auf Räume beliebig hoher Dimension führt, ein ziemlich complicirter. Um aber die Gesetze des Projicirens und Schneidens im Raume $n^{\text{ter}}$ Dimension für unseren Raum nutzbar zu machen, braucht man in der That nur das eine zu wissen, dass es lineare Mannigfaltigkeiten beliebig hoher Ordnung überhaupt giebt, und dass unser Raum sich auf einen $R_3$ derselben collinear beziehen lässt. E. K.

---

D. Montesano. Su di un complesso di rette di 3° grado. Nota. Potenza. Stab. Tip. C. Spera. 32 S.

Ist $R$ ein allgemeines Netz von Flächen zweiten Grades, so bilden die $\infty^3$ Erzeugenden der darin enthaltenen Flächen einen

Strahlencomplex $\Gamma$ dritten Grades, welcher von den Herren Sturm (J. für Math. LXX; Math. Annalen VI) und Reye (Geometrie der Lage) schon untersucht worden ist: es ist dieser Complex, welcher das Thema der zu besprechenden Abhandlung bildet; dem Verf. gelingt es darin, wie der Leser sehen wird, den genannten Complex mit der Theorie der Abbildungen und der eindeutigen Raumtransformationen zu verbinden.

Der Complex $\Gamma$ enthält die acht Strahlenbündel, deren Mittelpunkte die Grundpunkte $B_i$ ($i = 1, \ldots, 8$) des Netzes sind; ferner die Congruenzen (2,6), welche durch die Sehnen der „Curven des Netzes“ (d. h. der Durchschnitte der Flächen des Netzes zu je zwei) gebildet sind, insbesondere die Sehnen der kubischen Raumcurven, welche durch sechs Punkte $B_i$ bestimmt sind, und die Geraden, welche eine derselben und die Verbindungsgeraden der übrigen Grundpunkte zugleich schneiden; endlich die durch die Erzeugenden der Kegel des Netzes gebildete Congruenz (4,12), deren Brennfläche die Singularitätenfläche des Complexes $\Gamma$ ist. Umgekehrt: jeder Complex dritten Grades, welcher acht Strahlenbündel enthält, deren Mittelpunkte zu je vier in keiner Ebene liegen, besteht aus den Erzeugenden der Flächen zweiten Grades eines Netzes.

Man nehme drei Grundpunkte $B_h$, $B_k$, $B_l$ willkürlich. Lässt man einem beliebigen Raumpunkte $P$ denjenigen Strahl $p$ von $\Gamma$ entsprechen, welcher $P$ mit dem Punkte $P'$ verbindet, in dem die Ebene $\omega \equiv B_h B_k B_l$, ausser in diesen Punkten $B$, von der durch $P$ gehenden Curve des Netzes geschnitten wird, so bekommt man eine eindeutige perspective Abbildung $X$ des Complexes $\Gamma$ auf den Punktraum. Durch eine Untersuchung derselben und durch andere vorgängige Betrachtungen, welche wir der Kürze wegen unterdrücken, findet der Verf. alle im Complexe enthaltenen Regelscharen und die Eigenschaft, dass die Klasse jeder Congruenz von $\Gamma$ notwendig ein Vielfaches von 3 ist.

Im ganzen hat man $\binom{8}{3} = 56$ Verwandtschaften vom Typus $X$; das Erzeugnis zweier derselben ist eine gewisse eindeutige Raumtransformation, welche drei verschiedene Formen darbieten kann. Ferner führt das Erzeugnis eines $X$ mit einer eindeutigen Raum-

transformation $T$, in welcher eines der homaloidischen Systeme durch die kubischen Flächen gebildet wird, welche vier Punkte $B$ als Doppelpunkte haben, auf eine neue eindeutige, nicht perspective Abbildung $Z$ des Complexes $\Gamma$ auf den Punktraum.

Dass $\Gamma$ 70 $\infty^1$ Systeme von Congruenzen (2,6) erster Art und 28 zweiter Art enthält, sieht man ohne Mühe auf Grund einer neuen eindeutigen perspectiven Abbildung $Y$ von $\Gamma$ auf den Punktraum, welche wie folgt erzeugt wird: man wähle einen $B_h$ der Grundpunkte des Netzes willkürlich und lasse dann einem beliebigen Strahl $p$ von $\Gamma$, welcher der Fläche $S_2$ des Netzes angehöre, den Punkt $P$ entsprechen, in welchem $p$ durch die Erzeugenden des entgegengesetzten Systems von $S_2$ geschnitten wird, welches durch $B_h$ geht. Die Anzahl der Abbildungen $Y$ ist 8; das Product je zweier derselben führt auf eine neue Reihe eindeutiger Raumtransformationen, welche sich in zwei Klassen verteilen lassen. Andere Transformationen derselben Art geben das Product einer $Y$ mit einer $X$ oder $Z$.

Endlich bestimmt jeder Quadrikegel, welcher einen Grundpunkt des Netzes als Mittelpunkt hat und durch fünf andere desselben geht, eine eindeutige involutorische Raumtransformation; jedes Paar entsprechender Punkte derselben liegt auf einem Strahl von $\Gamma$.

La.

---

D. Montesano. La rappresentazione su di un piano delle congruenze di rette di secondo ordine dotate di linea singolare. Nota. Potenza. Stab. Tip. C. Spera. 25 S.

Diese Abhandlung ist einerseits mit zwei älteren Arbeiten desselben Verf. verknüpft (Torino Atti XXVII, Roma Acc. L. Rend. (5) I; vgl. F. d. M. Abschnitt IX, Cap. 4 dieses Bandes), andererseits schliesst sie sich den neueren Untersuchungen an, in denen die Herren Sturm (Math. Ann. XXXVI; F. d. M. XXII. 1890. 678) und Schumacher (Math. Ann. XXXVIII; F. d. M. XXII. 1890. 818) die berühmte Kummer'sche Abhandlung „Ueber die algebraischen Strahlensysteme" ergänzen wollten. Sie führt dazu, die Abbildbarkeit jeder mit einer singulären Curve versehenen Congruenz

auf einen Kegel zu erschliessen; insbesondere die ebene Abbildbarkeit gewisser fünf der von den oben citirten Geometern entdeckten Congruenzen, welche wir jetzt der Reihe nach beschreiben wollen.

I. Man betrachte eine Curve vierter Ordnung erster Art $K_4$ und einen der $\infty^1$ Kegel $\Gamma_3$, welcher dieselbe aus einem ihrer Punkte projicirt. Es ist möglich, ein eindeutiges Entsprechen zwischen den Punkten von $\Gamma_3$ und den Sehnen $g$ von $K_4$ festzustellen, wenn man der Sehne $g$ ihren Durchschnitt $G$ entsprechen lässt mit der durch den Mittelpunkt des Kegels gehenden Erzeugenden $d$ der Fläche zweiter Ordnung, welche durch $K_4$ und $g$ geht; $g$ und $d$ gehören natürlich zu verschiedenen Regelscharen der Fläche. In dem Falle, dass $\Gamma_3$ rational ist, und nur in diesem, kann er auf eine Ebene eindeutig abgebildet werden. Damit dies nun geschehe, ist es notwendig und hinreichend, dass $K_4$ rational sei, d. h. einen Doppelpunkt besitze: in diesem Falle ist die Sehnencongruenz auf eine Ebene abbildbar und sogleich abgebildet. Die Abbildung wird vom Verf. näher erforscht, in dem allgemeinen wie in dem besonderen Falle, wenn $K_4$ in zwei Kegelschnitte zerfällt.

II. Eine Raumcurve $C_n$ $n^{\text{ter}}$ Ordnung und eine $(n-2)$-fache Schneidende $k$ derselben sind gegeben; die Geraden, welche beide Linien schneiden, bilden eine Congruenz $(2, n)$. Wählt man einen Kegel $\Gamma$ beliebig, welcher des Geschlechtes von $\Gamma$ sei, so kann man ein eindeutiges Entsprechen zwischen den Punkten von $C_n$ und den Erzeugenden von $\Gamma$ herstellen; man nehme ferner einen Ebenenbüschel, dessen Axe durch den Mittelpunkt von $\Gamma$ nicht geht, und man bestimme eine Projectivität zwischen seinen Elementen und den Punkten von $k$. Dies vorausgesetzt, wenn $r$ eine Gerade der Congruenz ist, welche die Punkte $C$ von $C_n$ und $K$ von $k$ verbindet, so entspreche der Geraden $r$ der Durchschnittspunkt der Erzeugenden des Kegels $\Gamma$, welche $C$ entspricht, mit der Ebene des Büschels, welche $K$ entspricht: man bekommt auf diese Weise eine eindeutige Abbildung der Geraden der Congruenz auf die Punkte des Kegels $\Gamma$. Ist dieser und daher $C_n$ rational, und bildet man $\Gamma$ auf eine Ebene eindeutig ab, so erhält man eine eindeutige Abbildung der Congruenz auf eine Ebene.

III. Die Geraden, welche eine Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer

$(n-2)$-fachen Geraden in Punkten ausserhalb $k$ berühren und $k$ schneiden, bilden eine Congruenz zweiter Ordnung und $2(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse, welche man sogleich auf eine Ebene eindeutig abbilden kann. Es ist dazu hinreichend, die Punkte $P$ der Fläche den Punkten $P'$ einer Ebene entsprechen zu lassen und dann $P'$ auch als Bild der Geraden der Congruenz zu betrachten, welche die Fläche in $P$ berührt.

IV. Punkte und Ebenen einer Geraden seien in einer algebraischen $(n,2)$-Correspondenz. Die $\infty^1$ durch je zwei entsprechende Elemente bestimmten Strahlenbüschel bilden eine Congruenz $(2,n)$, von der $k$ eine singuläre Linie ist. Nimmt man in einer Ebene zwei Strahlenbüschel willkürlich an, von denen der eine zur Punktreihe $k$, der andere zum Ebenenbüschel $k$ projectiv sei, so sind sie daher in einer algebraischen $(n,2)$-Correspondenz und erzeugen eine gewisse Curve. Hat diese das Geschlecht $p$, so kann man die gegebene Congruenz auf einem Kegel vom Geschlecht $p$ darstellen; ist insbesondere $p=0$, so ist, und nur dann, die Congruenz auf eine Ebene abbildbar.

V. Ein nicht zerfallender Quadrikegel $k$ und eine rationale Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung $C_n$ sind gegeben; man setze voraus, dass jeder Punkt $P$ von $C_n$ eindeutig einer durch ihn gehenden Ebene $\pi$ von $\Gamma$ entspreche. Die $\infty^1$ Strahlenbüschel, welche zwei entsprechende Elemente $P$, $\pi$ bestimmen, bilden eine Congruenz $(2, n)$; man kann dieselbe sogleich auf eine Berührungsebene $\tau$ des Kegels $\Gamma$ eindeutig abbilden, wenn man jeden Punkt $M$ von $\tau$ als Bild des einzigen Strahles $m$ der Congruenz betrachtet, welche durch $M$ geht und dem Strahlenbüschel nicht angehört, den die Congruenz in $\tau$ hat. Diese Abbildung wird, wie die vorigen, vom Verf. eingehend untersucht. La.

---

H. Oppenheimer. Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems. Horb. Diss. Jena. 8°.

## D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

G. Fano. Sui postulati fondamentali della geometria projettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. Batt. G. XXX. 106-132.

In seinen Vorlesungen des akademischen Jahres 1890-91 hat Herr Segre die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, einen $n$-dimensionalen Raum nicht durch Coordinaten, sondern durch ein System von Eigenschaften zu erklären, welche zu der Darstellung durch Coordinaten führen. Von derselben sprach er auch öffentlich bei einer anderen Gelegenheit, indem er bemerkte (Rivista di Mat. I. 59), man habe noch nicht ein System von unter einander unabhängigen Postulaten gefunden, welche fähig sind, einen $n$-dimensionalen linearen Raum vollständig zu bestimmen, und insbesondere zur Bestimmung der Punkte desselben durch Coordinaten genügen. Diese Aufgabe wurde nach einander behandelt durch Herrn Amodeo (Torino Atti XXVI, vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 694) und Herrn Fano in der zu besprechenden Abhandlung: da in dieser die Berührungspunkte und die Verschiedenheiten der beiden Auflösungen sorgfältig gekennzeichnet werden, so ist eine Vergleichung der beiden Abhandlungen überflüssig.

Es ist gegeben eine Gesamtheit von Elementen, welche wir der Kürze wegen „Punkte" nennen. Als erste Grundeigenschaft dieser Mannigfaltigkeit wählen wir die folgende: „zwei beliebige Punkte derselben bestimmen immer eindeutig ein neues Gebilde, welches wir „Gerade" nennen wollen." Enthält die Mannigfaltigkeit einen Punkt ausserhalb einer in ihr enthaltenen Geraden, und verbindet man den Punkt mit den Punkten der Geraden, so wird ein neues Gebilde erzeugt, die „Ebene", welches wir als mit den folgenden Eigenschaften versehen voraussetzen wollen: „eine durch zwei Punkte einer Ebene bestimmte Gerade ist ganz in der Ebene enthalten; zwei Gerade derselben Ebene haben immer einen Punkt gemeinschaftlich". Wie die Gerade zur Erzeugung der Ebene diente, so kann man die Ebene zur Erzeugung des gewöhnlichen Raumes benutzen, u. s. w. (Erzeugung der linearen Räume durch Projection).

Eine Gerade enthält nach dieser Erklärung gewiss und mindestens zwei Punkte; man wird voraussetzen, dass „jede Gerade mehr als zwei Punkte enthalte“. Nimmt man dann auf einer Geraden drei Punkte $A$, $B$, $C$ beliebig an, so kann man die allgemein bekannte Construction des vollständigen Vierecks anwenden, um aus derselben einen vierten Punkt $D$ derselben Geraden zu erlangen; $D$ bildet mit $A$, $B$, $C$ einen „harmonischen Wurf“. Nun folgt aus den vorigen Voraussetzungen in keiner Weise, dass $D$ verschieden von $C$ sei; daher ist es notwendig, einen neuen Grundsatz anzunehmen, nach welchem man behaupten kann: „es existirt ein durch vier verschiedene Elemente gebildeter harmonischer Wurf“; in Folge dessen enthält jeder harmonische Wurf vier verschiedene Elemente. Aber man ist noch nicht sicher, dass es unmöglich sei, die Würfe $ABCD$ und $ADBC$ zugleich harmonisch anzunehmen. Um diese Möglichkeit im allgemeinen auszuschliessen, ist es notwendig und hinreichend, vorauszusetzen: „es existirt ein harmonischer Wurf $ABCD$ von solcher Beschaffenheit, dass $ADBC$ kein harmonischer Wurf ist“.

Man nenne mit De Paolis (Sui fondamenti della geometria projettiva; Lincei Mem. (3) IX. 1880-81) „harmonisches System“ die Gesamtheit der Punkte einer Geraden, welche man durch Construction vierter harmonischer Punkte aus drei Punkten derselben (Grundpunkten des Systems) erhalten kann; und „harmonische Reihe“ die Gesamtheit der Punkte $A_k$ einer Geraden, welche man aus drei Punkten $O$, $A_1$, $A_2$ derselben der Reihe nach durch die Bedingung erhält, dass $OA_{k-1}A_kA_{k+1}$ ein harmonischer Wurf sei. Durch die vorigen Postulate ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass eine harmonische Reihe eine endliche Zahl von Elementen enthalte; daher nimmt der Verf. ferner an: „es existirt keine in sich zurückkehrende harmonische Reihe“; daraus folgt, dass jede harmonische Reihe unendlich viele Elemente enthält. So hat man hinreichende Gründe, um die reelle ganze Variable auf die Gerade auszubreiten; wendet man die Methode an, welche De Paolis a. a. O. gelehrt hat, so kann man dasselbe für die reelle rationale Variable bewirken. Will man aber dasselbe für die reelle allgemeine (rationale oder irrationale) Veränderliche erreichen, so ist es

nötig, einen letzten Grundsatz anzunehmen: „jede irrationale Zahl entspricht auf jeder Geraden einem immer eindeutig bestimmten Punkte“.

Durch obige Grundsätze ist die Gerade (und daher auch die aus derselben durch Projectionen ableitbaren linearen Räume) vollständig bestimmt. Dass sie notwendig und unter einander unabhängig seien, folgt aus der Existenz gewisser Punktsysteme, bei denen nur einzelne derselben statt haben. Die vom Verf. begonnene Erforschung dieser sonderbaren Systeme macht sogar den Hauptwert der besprochenen Arbeit aus. La.

---

F. Amodeo. Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni. Rivista di Mat. II. 145-149.

Beantwortung einiger Einwände des Hrn. Fano (Sui postulati fondamentali della geometria projettiva di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, Batt. G. XXX. 106-132; vergl. den vorangehenden Bericht) gegen die frühere Arbeit des Verfassers: Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di uno $S_r$, Torino Atti XXVI. 741-770 (F. d. M. XXIII. 1891. 694). Insbesondere wendet sich Herr Amodeo gegen die Aussage der Herren Fano (a. a. O.) und Zindler (Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume; lineare Complexe und Strahlensysteme in denselben. Wien. Ber. CI; Bericht S. 612 dieses Bandes), dass die Definition der linearen $r$-dimensionalen Mannigfaltigkeit noch nicht gegeben worden sei, indem er nachweist, wie eine solche Definition in der oben angeführten Schrift implicite enthalten ist. Vi.

---

P. Predella. Sulla teoria generale delle omografie. Torino Atti XXVII. 270-288.

Eine collineare Beziehung eines Raumes $n^{\text{ter}}$ Stufe in sich heisst allgemein, wenn die Räume entsprechend gemeinsamer Punkte:

$$F(h_1'-1),\ F(h_1''-1),\ \ldots,\ F(h_1^{(\sigma)}-1)$$

(von $h_1'^{\text{ter}}$, $h_1''^{\text{ter}}$, ..., $h_1^{\sigma\,\text{ter}}$ Stufe) den Raum $n^{\text{ter}}$ Dimension

festlegen; bestimmen sie einen Raum niedrigerer Dimension, so wird sie als eine specielle Beziehung bezeichnet. Im ersten Fall kann man das fundamentale $n$-eder aus entsprechend gemeinsamen Punkten zusammensetzen und hat in den Gleichungen

$$rx_i = r^{(i)} x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die $h_1'$ ersten $r^{(i)}$ der $h_1'$-fachen Wurzel der determinirenden Gleichung $D(r) = 0$ gleich zu setzen, die $h_1''$ folgenden der $h_1''$-fachen u. s. w.

Die Verhältnisse $r' : r'' : \ldots : r^{(\sigma)}$ sind absolute Invarianten der Beziehung. Zu jedem Raum $F(h_1^{(i)} - 1)$ ist ein Raum $G(n - h_1^{(i)})$ conjugirt, der durch die Beziehung in sich transformirt wird. $G(n - h_1')$ enthält die Centren der perspectivischen Beziehungen zwischen zwei Räumen $h_1$ ter Dimension, die $F(h_1' - 1)$ entsprechend gemein haben. Im allgemeinen, aber nicht im speciellen Fall, ist er durch $F(h_1'' - 1)$, $F(h_1''' - 1)$, ..., $F(h_1^{(\sigma)} - 1)$ festgelegt. Im letzteren Falle kann er ausser den genannten noch einen anderen Raum $F(h_2' - 1)$ entsprechend gemeinsamer Punkte haben, der $F(h_1' - 1)$ angehört. Zu $F(h_2' - 1)$ ist in $G(n - h_1')$ ein $G(n - h_1' - h_2')$ conjugirt, der mit $F(h_2' - 1)$ ein $F(h_3' - 1)$ gemein haben kann. Auf diese Weise kommt man zu einer Reihe von Räumen

$$F(h_1' - 1),\ F(h_2' - 1),\ \ldots,\ F(h_{p'}' - 1),$$

von denen jeder alle folgenden enthält. Hierzu gehören als conjugirte Räume

$$G(n - h_1'),\ G(n - h_1' - h_2'),\ \ldots,\ G(n - h_1' - h_2' - \cdots - h_{p'}');$$

der letzte ist conjugirt zu $F(h_{p'}' - 1)$ in der Beziehung, die $G(n - h_1' - h_2' - \cdots - h_{p'-1}')$ in sich überführt und hat mit $F(h_1' - 1)$ nichts gemeinsam. Hingegen enthält er $F(h_1'' - 1)$, ..., $F(h_1^{\sigma} - 1)$, und man kann mit ihm und $F(h_1'' - 1)$ denselben Process wiederholen. So kommt man zu der Charakteristik der Beziehung:

$$\{(h_1', h_2', \ldots, h_{p'}')(h_1'', h_2'', \ldots, h_{p''}'') \ldots (h_1^{(\sigma)}, h_2^{(\sigma)}, \ldots, h_{p^{(\sigma)}}^{(\sigma)})\}.$$

Die Wurzeln der determinirenden Gleichung sind nun $g'$-, $g''$-, ..., $g^{(\sigma)}$-fach, wo $g^{(i)} = h_1^{(i)} + h_2^{(i)} + \cdots + h_{p^{(i)}}^{(i)}$.

Um eine solche Beziehung zu geben, nimmt der Verf. beispielsweise

$$p' = 4,\quad h_1' = \alpha,\quad h_2' = \beta,\quad h_3' = \gamma,\quad h_4' = \delta,\quad p_1' = 4$$

und wählt zunächst in dem $F(\alpha-1)$ $\alpha$ unabhängige Punkte, von denen bezw. die $\delta$, $\gamma$, $\beta$ ersten in $F(\delta-1)$, $F(\gamma-1)$, $F(\beta-1)$ liegen. In $G(n-\alpha-\beta-\gamma)$, aber ausserhalb $G(n-\alpha-\beta-\gamma-\delta)$ kann man $\delta$ Paare entsprechender Punkte $B_1 B'_1$, $B_2 B'_2$, ..., $B_\delta B'_\delta$ wählen, deren Verbindungslinien $A_1$, ..., $A_\delta$ treffen. Weiter nehme man in $G(n-\alpha-\beta)$, aber ausserhalb $G(n-\alpha-\beta-\gamma)$ die Punktepaare

$$B_{\delta+1} B'_{\delta+1},\ \dots,\ B_\gamma B'_\gamma,\ C_1 C'_1,\ \dots,\ C_\delta C'_\delta$$

so an, dass sie mit

$$A_{\delta+1},\ \dots,\ A_\gamma,\quad B_1,\ \dots,\ B_\delta$$

auf Geraden liegen.

Zuletzt kann man ausserhalb $G(n-\alpha-\beta)$, aber in $G(n-\alpha)$ die Punktepaare

$$B_{\gamma+1} B'_{\gamma+1},\ \dots,\ B_\beta B'_\beta,\quad C_{\delta+1} C'_{\delta+1},\ \dots,\ C_\gamma C'_\gamma,\quad D_1 D'_1,\ \dots,\ D_\delta D'_\delta$$

so annehmen, dass ihre Verbindungslinien

$$A_{\gamma+1} \dots A_\beta,\quad B_{\delta+1} \dots B_\gamma,\quad C_1 \dots C_\delta$$

treffen. $A_1 \dots A_\alpha$, $B_1 \dots B_\beta$, $C_1 \dots C_\gamma$, $D_1 \dots D_\delta$ bestimmen dann einen Raum $H(g'-1)$, der ebenso wie $G(g'-1)$ sich selbst entspricht und von diesem unabhängig ist. Die Gleichungen für den Fall, dass die erwähnten Punkte und die analogen für $G(n'-g')$ Fundamentalpunkte sind, werden aufgestellt. E. K.

---

F. Enriques. Le omografie cicliche negli spazii ad $n$ dimensioni. Batt. G. XXX. 311-318.

F. Enriques. Le omografie armoniche negli spazii lineari ad $n$ dimensioni. Batt. G. XXX. 319-325.

Diese zwei Aufsätze stehen in engem Zusammenhange mit einer früheren Arbeit desselben Verf. (F. d. M. XXII. 1890. 816) und daher mit den Abhandlungen der Herren Segre, Bertini und Predella, als deren Ergänzung sie angesehen werden können.

Der erste behandelt die cyklische Projectivität. „Cyklisch von der Ordnung $m$“ nennt der Verf. eine Projectivität $\pi$, wenn ihre $m^{\text{te}}$ Potenz die Eigenschaft besitzt, dass je zwei in ihr entsprechende

Elemente incident sind. Ist daher $\pi$ eine cyklische Collineation, so ist $\pi^m$ die Identität; ist $\pi$ eine cyklische Correlation, so ist $\pi^m$ die Identität oder ein Nullsytsem, je nachdem $m$ gerade oder ungerade ist. Der Verf. bestimmt zuerst die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine Projectivität cyklisch sei, und drückt dieselben auf verschiedene Weisen aus. Dann löst er einige Aufgaben auf, welche die cyklischen Projectivitäten im allgemeinen betreffen, und betrachtet endlich die Collineationen und Correlationen getrennt.

In dem zweiten Aufsatze bildet der Verf., Herrn Stephanos (vgl. Math. Ann. XXII) folgend, die Projectivitäten zwischen zwei $n$-dimensionalen Räumen auf die Punkte eines $n(n+2)$-dimensionalen Raumes eindeutig ab und benutzt diese Abbildung und andere Mittel, um auf die höheren Räume die wohlbekannten Untersuchungen der Herren Rosanes (J. für Math. LXXXVIII und C), Pasch (Math. Ann. XXIII) und Segre (J. für Math. C) über die Projectivitäten im binären Gebiete auszudehnen. Er findet unter anderem ein Resultat wieder, welches der letzte der angeführten Geometer im XXIV. Bd. der Math. Ann. bekannt machte.

Die ein wenig nachlässige und etwas unfertige Redaction der besprochenen Arbeit macht das Lesen derselben schwieriger und minder angenehm, als es auf Grund der Natur des Themas und des Wertes der bewiesenen Sätze und aufgelösten Aufgaben sein sollte. La.

---

A. Milesi. Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni. Rivista di Mat. II. 103-106.

Der Verf. setzt einen neuen Beweis auseinander für den bekannten Lehrsatz: Eine Verwandtschaft zwischen Räumen verschiedener Dimension kann nicht zugleich eindeutig und stetig sein. Der Beweis stützt sich auf das folgende G. Cantor'sche Theorem: Wenn in einem endlichen oder unendlichen $n$-dimensionalen Raum eine Gruppe von Gebilden enthalten ist, die alle $n$-dimensional,

stetig und vollkommen unter einander getrennt sind, und deren jede einen gewissen Raum einnimmt, so ist diese Gruppe von erster Mächtigkeit oder abzählbar. La.

---

A. Puchta. Ueber die allgemeinsten abwickelbaren Räume, ein Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie. Wien. Ber. CI. 355-388.

Zunächst bespricht der Verfasser analytisch-geometrisch die Herleitung eines in einem $n$-dimensionalen linearen Raume gelegenen $(n-1)$-dimensionalen abwickelbaren Raumes. Dann betrachtet er das Problem speciell für $n=4$ und reducirt es auf eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Darauf werden diese Betrachtungen verallgemeinert, und insbesondere wird nachgewiesen, dass die Kenntnis eines einzigen particulären Integrals der genannten Differentialgleichung genügt, um ohne weiteres das allgemeine Integral angeben zu können. Schlussbetrachtungen lassen noch weitere Arbeiten in der vom Verfasser eingeschlagenen Untersuchungsrichtung erwarten. Scht.

---

Z. G. de Galdeano. Nota acerca de los poliedros de cuatro dimensiones. Progreso mat. II. 223-229.

Angaben über die Modelle zu den sechs regelmässigen vierdimensionalen Körpern des Hrn. V. Schlegel nebst einer Liste von Schriften über die Körper von mehr als drei Dimensionen. Tx. (Lp.)

---

V. Schlegel. Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à $n$ dimensions. S. M. F. Bull. XX. 97-103.

Der Verfasser, den wir schon öfter bei interessanten $n$-dimensionalen Verallgemeinerungen von Problemen und Anschauungen getroffen haben, liefert uns hier eine Verallgemeinerung der Formation des alten Problems der magischen Quadrate. So wie das Quadrat in $r^2$, der Würfel in $r^3$ Zellen zerlegbar ist, so ist der

$n$-dimensionale Würfel in $r^n$ Zellen zerlegbar, wo $r$ die Ordnung der Teilung genannt werden soll. Die Summe, die in jeder Reihe herauskommen muss, wenn den $r^n$ Zellen die Zahlen von 1 bis $r^n$ zugewiesen sind, ist gleich $\frac{r(1+r^n)}{2}$. Der Verfasser lehrt nun auf eine neue Weise die Formation solcher $n$-dimensionalen magischen Würfel $r^{\text{ter}}$ Ordnung, indem er die Zellen durch passend an einander gereihte Quadrate ersetzt, so dass er damit in der Ebene operiren kann. Als Beispiel dient u. a. der vierdimensionale magische Würfel von $3^4$ Zellen, der in seiner planaren Abbildung aus neun Quadraten von je neun der Zahlen zwischen 1 und 81 besteht. Scht.

H. Fontené. L'hyperespace à $(n-1)$ dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale. Paris. Gauthier-Villars et Fils. XVIII + 133 S. gr. 8°.

---

## E. Abzählende Geometrie.

H. G. Zeuthen. Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. Math. Ann. XL. 99-124.

Das von Cayley gefundene, von Herrn Brill zuerst algebraisch bewiesene, dann von Brill und Junker eingehender behandelte, in anderem Zusammenhange auch vom Referenten, von den Herren Bobek, Lindemann und Hurwitz bewiesene Correspondenzprincip auf Curven von beliebigem Geschlechte wird hier von Herrn Zeuthen noch einmal behandelt, und zwar hauptsächlich deshalb, um bei einem vom Standpunkte der abzählenden Geometrie aus geführten Beweise die präcisen Regeln zu erkennen und zu entwickeln, nach welchen die Abzählung der Coincidenzen bei Anwendung des Princips zu geschehen hat. Dem genauen Ausspruch dieser Regeln folgt ein Beweis, der auf dem Chasles'schen Correspondenzprincip

beruht, und dann ein zweiter Beweis, der auf dem Princip beruht, dem der Referent den Namen „Princip von der Erhaltung der Anzahl“ gegeben hat. Bei diesem Beweise dehnt Herr Zeuthen das Cayley-Brill'sche Correspondenzprincip auch auf den Fall aus, wo man der „Wertigkeit“, die bei der Correspondenz auftritt, einen negativen Zahlenwert zu erteilen hat. Die hier entwickelten Methoden werden am Schluss der Abhandlung angewandt, namentlich auf die bei Steiner'schen Polygonen entstehenden Abzählungsfragen.

Scht.

---

H. G. Zeuthen. Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. Study. (Extrait d'une lettre à M. Klein.) Math. Ann. XXXVII. (1890.) 461-464.

E. Study. Entgegnung. Math. Ann. XL. (1892.) 559-562.

H. G. Zeuthen. Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée. Math. Ann. XLI. (1893.) 539-544.

Die Lehre der Charakteristiken scheint das nicht beneidenswerte Privilegium zu besitzen, von Zeit zu Zeit der Zunder zu lebhaften Polemiken zu werden: es genüge, an die zwischen Chasles und de Jonquières, an die zwischen Halphen und Schubert zu erinnern. Jetzt hat sie zu einer solchen zwischen den Herren Study und Zeuthen Anlass gegeben: der Funke, welcher den neuen Feuerbrand angezündet hat, ist die Abhandlung des ersteren, über welche einer der Hauptbegründer der abzählenden Geometrie hier berichtet hat (F. d. M. XVIII. 1886. 629). Der Meinungsunterschied zwischen den genannten Gelehrten besteht im Folgenden: Hr. Zeuthen hält die Modification für richtig, welche Halphen an der wohlbekannten Chasles'schen Formel $\alpha\mu+\beta\nu$ angebracht hat; Hr. Study dagegen meint, dass man der letzteren ein unbeschränktes Vertrauen schenken könne, wenn man nur die uneigentlichen Lösungen der Frage, welche jene Formel auflösen will, auf richtige Weise berechnet. Die Ursache der Uneinigkeit besteht darin, dass Herr Zeuthen, Halphen folgend, als existirend die Kegelschnitte betrachtet, deren Axen $a$, $b$ unendlich klein, aber von solcher Be-

schaffenheit sind, dass $\frac{a^m}{b^n}$ (wo $m$ und $n$ gewisse positive Zahlen sind) endlich ist, während Herr Study dieselben aus der Geometrie verbannen zu wollen scheint. Nachdem wir so die Streitfrage erläutert haben, meinen wir, die Worte wiederholen zu sollen, durch welche die Redaction der Mathematischen Annalen die Discussion schloss: „Nachdem in der zwischen den Herren Study und Zeuthen schwebenden Streitfrage beide Autoren ihre Ansicht ausführlich dargelegt haben, kann die Redaction der Mathematischen Annalen von ihrem Standpunkte aus die Discussion um so mehr als abgeschlossen ansehen, da die beiderseitigen Ansichten in sachlicher Hinsicht nicht mehr so sehr differiren, — hat doch Hr. Study die Correctheit sämtlicher Entwickelungen von Halphen ausdrücklich zugestanden und andererseits Hr. Zeuthen wiederholt Study's eigenen Standpunkt als einen möglichen anerkannt“. La.

---

E. Study. Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene auf einen Punktraum. Math. Ann. XL. 551-558.

Im Zusammenhange mit der im vorangehenden Referate besprochenen Streitfrage sucht der Verf. durch Abbildung der Kegelschnitte einer Ebene auf einen Raum fünfter Dimension und durch Betrachtung des Schnittes einer einstufigen und einer vierstufigen Mannigfaltigkeit in diesem Raume klarzulegen, wie die Halphen'sche Auffassung des Kegelschnitts sich von derjenigen unterscheidet, bei welcher der Chasles'sche Satz $\alpha\mu+\beta\nu$ richtig ist. Lp.

---

F. Amodeo. Un'osservazione sulle condizioni lineari della geometria. Annali del R. Ist. Tecn. e Naut. di Napoli. 1892. 5 S.

Ausgehend von dem Umstande, dass ein Punkt eines linearen Raumes $R_r$ $r^{\text{ter}}$ Dimension einer Bedingung genügen muss, um einem $R_{r-1}$ anzugehören, leitet Herr Amodeo andere fundamentale Anzahlen ab, z. B.: ein Raum $R_i$, der sich auf einen $R_j$ stützen soll,

muss $r-i-j$ Bedingungen genügen ($r-i-j>0$). Ein Raum $R_k$ ist durch $(k+1)(r-k)$ einfache Bedingungen festgelegt etc.

E. K.

H. Schubert. Beitrag zur Liniengeometrie in $n$ Dimensionen. Hamb. Mitt. III. 86-97.

Nachdem der Verfasser in Math. Ann. XXVI die Grundlagen für eine abzählende Geometrie in $n$ Dimensionen geschaffen hatte, waren es nicht deutsche, sondern viele italienische Mathematiker, welche in der angegebenen Untersuchungsrichtung weiter arbeiteten und neue schöne Resultate fanden; vor allem seien die Herren Segre und Pieri genannt neben mehreren anderen, welche Abzählungsfragen in $n$ Dimensionen behandelten und dabei auf die Resultate des Verfassers Rücksicht nahmen. Wohl hatte derselbe schon in der genannten Abhandlung für den Strahl das symbolische Product zweier in allgemeiner Gestalt gegebenen Lage-Bedingungen als Summe von einzelnen Lage-Bedingungen dargestellt. Herr Segre aber hatte 1891 dem Verfasser die damit vorbereitete, aber doch damit noch lange nicht erledigte Frage gestellt: „Wieviel Strahlen giebt es in einem $n$-dimensionalen linearen Raume, welche die Bedingungen $(a_1\alpha_1)$, $(a_2\alpha_2)$, ..., $(a_q\alpha_q)$ erfüllen, wo, damit die Frage Sinn hat,

$$(a_1+\alpha_1)+(a_2+\alpha_2)+\cdots+(a_q+\alpha_q)=(2n-1)(q-1)+1$$

sein muss?"

Der Verfasser beweist nun hier ausführlich die Formel, welche die Frage beantwortet. Für die weniger eingeweihten Leser sei gesagt, dass $(a_i\alpha_i)$ die Bedingung bedeutet, dass der gesuchte Strahl in einem $\alpha_i$-dimensionalen linearen Raum liegen und dabei einen in diesem Raum gelegenen $a_i$-dimensionalen linearen Raum einpunktig schneiden soll. Die die Frage beantwortende Hauptformel lässt sich in folgender Weise darstellen. Es werde $\alpha_i-a_i$ durch $d_i$ bezeichnet, und $\frac{1}{2}d_1+\frac{1}{2}d_2+\cdots+\frac{1}{2}d_q+\frac{1}{2}q-2$ durch $e$; ferner sei $s$ gleich dem Binomialcoefficienten $e_{q-2}$, $s_i$ gleich dem Binomialcoefficienten $(e-d_i)_{q-2}$, $s_{ik}$ gleich dem Binomialcoefficienten $(e-d_i-d_k)_{q-2}$ u. s. w. Dann ist die von Herrn Segre gewünschte

Anzahl gleich

$$s-(s_1+s_2+\cdots+s_q)+(s_{12}+s_{13}+\cdots)$$
$$-(s_{123}+\cdots)+\cdots+(-1)^q s_{123\ldots q}.$$

Es folgen dann noch zwei Anwendungen des Resultats und die Erweiterung desselben vom Strahl auf den $p$-dimensionalen linearen Raum, aber nur für $i=2$. Scht.

---

H. Schubert. Mitteilungen aus der abzählenden Geometrie $p$-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades.
Deutsche Math. Ver. I. 48-49.

Es werden die Grundlagen und einige Resultate der Ausdehnung von Aufgaben der abzählenden Geometrie auf mehrdimensionale Räume mitgeteilt. Schg.

---

M. Pieri. Sopra un problema di geometria enumerativa.
Batt. G. XXX. 133-140.

Die von Herrn Pieri in diesem Aufsatze behandelte Aufgabe ist: „Im $n$-dimensionalen Raume $R_n$ sind zwei algebraische Systeme gegeben: das eine, $\Sigma_i$, besteht aus $\infty^i$, das zweite, $\Sigma_{i'}$, aus $\infty^{i'}$ $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten; man soll bestimmen: erstens die Ordnung $X_{(i,i')}^{(n)}$ der $(i+i'-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, von der jeder Punkt ein Berührungspunkt zwischen zwei Mannigfaltigkeiten ist, deren jede einem der gegebenen Systeme angehört; zweitens die Klasse $Y_{(i,i')}^{(n)}$ der Einhüllungsmannigfaltigkeit der $\infty^{i+i'-1} R_{n-1}$, von der je zwei Mannigfaltigkeiten die zwei gegebenen Systeme in demselben Punkt berühren". Die Fälle dieses Problems, welche den Voraussetzungen $i=1$, $i'=1$, $n=2$ oder 3 entsprechen, wurden resp. durch Chasles und Zeuthen (Math. Ann. III. 153) und de Jonquières und Brill (C. R. LVIII und LXVI; Math. Ann. VIII. 534) behandelt; während die Fälle $n=3$, $i'=1$ und $i=1$ oder 2 durch Schubert (Math. Ann. X. 109) und Fouret (C. R. LXXX. 805) studirt wurden. Um den allgemeinen Fall zu erledigen, wendet der Verf. den Schubert'schen Bedingungscalcul sehr geschickt an und gelangt so zu zwei Ausdrücken der gesuchten Zahlen in Functionen der „Grundzahlen"

der gegebenen Systeme. Die auf das erste System bezüglichen Grundzahlen mögen durch $\theta_{0,i-1}$, $\theta_{1,i}$, ..., $\theta_{n-i-1,n-2}$ und $\theta_{n-i,n-1}$ bezeichnet werden; eine derselben, $\theta_{l,i+l-1}$, drückt die Zahl der Mannigfaltigkeiten des Systems $\Sigma_i$ aus, welche einen gegebenen $R_{i+l-1}$ in Punkten eines auf diesem gegebenen $R_l$ berühren; wenn $i=1$, ist $\theta_{l,l}$ die Zahl der genannten Mannigfaltigkeiten, welche einen gegebenen $R_l$ berühren: es erweist sich endlich als nützlich, $\theta_{l,i-l-1}$ gleich 0 anzunehmen, wenn $l<0$ oder $l>n-i$ ist. Hat $\theta'_{l,i'+l-1}$ eine ähnliche Bedeutung in Bezug auf $\Sigma'_{i'}$, so ist die Pieri'sche Auflösung der in Frage stehenden Aufgabe durch die Formeln ausgedrückt:

$$X_{(i,i')}^{(n)} = \sum_{a=0}^{a=n-i-i'+1} \theta_{n-i-i'+1-a,\, n-i'-a} \quad (\theta'_{a-1,i'-a} + \theta'_{a,\,i-1-a}),$$

$$Y_{(i,i')}^{(n)} = \sum_{a=0}^{a=n-i-i'+1} \theta_{i'-1+a,\, i+i'-2+a} \quad (\theta'_{n-i'-a+1,\, n-a} + \theta'_{n-i'-a,\, n-a-1}).$$

Um dieses Ziel zu erreichen, hält der Verf. es für nötig, eine neue Coincidenz-Formel zu beweisen, welche eine algebraische Reihe von $\infty^{n-1}$ Punktepaaren in $R_n$ betrifft, eine Formel, welche uns bemerkenswert scheint und auf viele geometrische Resultate führt, die wir nur der Raumersparnis halber aus der Originalarbeit nicht abschreiben. La.

# Neunter Abschnitt.

# Analytische Geometrie.

## Capitel 1.

## Lehrbücher, Coordinaten.

C. A. Laisant. Recueil de problèmes de Mathématiques. Géométrie analytique à deux dimensions (et géométrie supérieure) à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Paris. Gauthier-Villars et Fils. X + 311 S. 8°. (1893.)

In den französischen Zeitschriften, welche die Bedürfnisse des mathematischen Unterrichtes berücksichtigen, sind seit der Gründung der Nouvelles Annales im Jahre 1842 sehr viele Aufgaben, zum Teil von hervorragenden Mathematikern, gestellt, und ihre Lösungen sind in späteren Nummern angegeben worden. Hr. Laisant hat diese Aufgaben gesammelt, geordnet und diejenigen ausgewählt, welche sich nach den für die französischen Classes de Mathématiques spéciales geltenden Programmen zur Bearbeitung in denselben eignen. Ausser den Nouvelles Annales sind benutzt worden: Nouvelle correspondance mathématique (1875-1880), Journal de mathématiques élémentaires et spéciales (1877-1881), Journal de mathématiques élémentaires (seit 1882), Journal de mathématiques spéciales (seit 1882), Mathesis (seit 1881). Der vorliegende Band bringt die Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, denen auch die aus der neueren synthetischen Geometrie beigefügt sind, so weit sie in den Rahmen des Werkes passen.

Die Anzahl der fortlaufend bezifferten Aufgaben beträgt 1183; doch hat Ref. einige Wiederholungen derselben Aufgabe bemerkt. Bei jeder Aufgabe ist der Urheber und der Ort angemerkt, wo sie zuerst gegeben ist, sowie Verfasser und Stelle einer veröffentlichten Lösung. Wenn Aufgaben bisher noch nicht gelöst sind, so erbietet sich Hr. Laisant zur Vermittelung des Druckes einer an ihn eingesandten Lösung. Der Inhalt ist nach vielen Unterabteilungen geordnet, damit man die einen zusammengehörigen Kreis bildenden Aufgaben schnell auffinden kann. — Obgleich die Beschränkung der Aufgabensammlung auf die in französischer Sprache geschriebenen Zeitschriften an sich willkürlich ist, und die Quelle mancher Aufgabe ausserhalb dieses Sprachgebietes liegt, so ist durch diese Begrenzung die Arbeit des Verfassers bedeutend erleichtert und hat ihm einen schnellen Abschluss ermöglicht. Auch in der jetzigen Gestalt erhält man ein vortreffliches Material für den Unterricht sowie in gewissem Sinne ein Bild der mathematischen Leistungen auf dem vorgeführten Gebiete während eines halben Jahrhunderts bei einem Volke, das auf dem Felde des mathematischen Unterrichtes seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts lange Zeit die Muster aufgestellt hat; insbesondere zeigt uns auch dieses Buch, dass noch heute die analytische Geometrie in den Classes de Mathématiques spéciales auf bewundernswerte Weise den Schülern gelehrt wird, so dass diese den Stoff in ausgedehntem Masse beherrschen. Lp.

---

M. Simon (Strassburg). Leitfaden der analytischen Geometrie der Ebene. Zum Gebrauche für höhere Lehranstalten. Berlin. Weidmann'sche Buchhdl. 71 S. 8°.

Zum Gebrauche in der Prima der Gymnasien gemäss den neuen Lehrplänen verfasst, verbindet die Schrift die analytische Behandlung mit der synthetischen. Die Gerade und der Kreis werden rein analytisch vorgeführt, dann die Parabel und die Ellipse vorzugsweise synthetisch, zuletzt die Hyperbel wieder mehr analytisch. Aufgaben sind nicht beigefügt. Lp.

H. Lieber und F. von Lühmann. 1. Grundlehren von den Coordinaten und den Kegelschnitten. 2. Propädeutischer Unterricht in der Körperlehre. Pensum der Untersecunda. Berlin. L. Simion.

Beide Schriften sind Sonderausgaben aus dem Leitfaden derselben Verfasser und stimmen mit diesem auch in den Seitenzahlen, den Nummern der Tafeln und den Nummern der Figuren vollkommen überein. Lg.

R. Zimmermann. Analytische Geometrie der Ebene in leichteren Aufgaben dargestellt. Pr. (No. 77) Gymn. Fürstenwalde. 55 S. 8°.

In den 61 vorgeführten Aufgaben wird annähernd das geboten, was man in jedem Lehrbuch finden kann, ohne die erforderliche Genauigkeit und Schärfe in sprachlicher und sachlicher Beziehung. Lg.

G. Salmon. Traité de géométrie analytique à trois dimensions. Traduit de l'anglais, sur la quatrième édition, par O. Chemin. III^e Partie: Surfaces dérivées de quadriques. Surfaces du troisième et du quatrième degré. Théorie générale des surfaces. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

Ch. Brisse. Recueil de problèmes de géométrie analytique, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. Solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'École Centrale depuis 1862. 2^e éd. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

E. Mosnat. Problèmes de géométrie analytique. Paris. Nony et Co. Tome II. [Progreso mat. II. 123, Teixeira J. XI. 5.]

J. O. Gandtner. Elemente der analytischen Geometrie, für den Schulunterricht bearbeitet. 8. Aufl. Herausgegeben von E. Gruhl. Berlin. Weidmann'sche Buchhdlg. VII + 103 S. 8°.

RICHARD. Notice sur les coordonnées rectangulaires. Règles pratiques, exemples d'application. Bray-sur-Seine. 43 S. 8°.

---

H. VON JETTMAR. Versuch der Einführung homogener Punkt- und Liniencoordinaten in die Elemente der analytischen Geometrie. XLII. Jahresbericht über das K. K. Staatsgymnasium im VIII. Bezirke Wiens. 1892. 45 Seiten. Mit Fig.-Taf. 8°.

Das Ziel dieser Arbeit ist, eine elementare Behandlung der Dreieckscoordinaten und die Anwendung derselben auf Punkt und Gerade, anhangsweise auch auf die Kegelschnitte zu geben. Die vom Verf. eingeführten Coordinaten sind identisch mit den Möbius'schen barycentrischen Coordinaten.

Der Einführung der homogenen Coordinaten in den Schulunterricht bringt Ref. ernste Bedenken entgegen. Die unmittelbare Anschaulichkeit der cartesischen Coordinaten fehlt den Dreieckscoordinaten, und deshalb sind sie schwer verständlich. Die cartesischen Coordinaten müssen aber dem Schüler ganz vertraut sein, ehe an eine Erweiterung des Coordinatenbegriffs gedacht werden kann. Der mathematische Unterrichtsstoff, welcher in knapp bemessener Zeit bewältigt werden soll, ist schon umfangreich genug; auch eignet sich manche andere mathematische Disciplin, wie die darstellende Geometrie, mehr für den Schulunterricht. Hau.

M. D'OCAGNE. Sur la corrélation entre les systèmes de coordonnées ponctuelles et les systèmes de coordonnées tangentielles. Nouv. Ann. (3) XI. 70-75.

Mit Hülfe eines Tetraeders $OABC$ werden für Punkt und Ebene zwei Coordinatensysteme aufgestellt, welche, wenn die Ebene $ABC$ ins Unendliche rückt, bez. in 1) cartesische und 2) Plücker'sche, und wenn der Punkt $O$ ins Unendliche rückt, in 3) parallele Punkt- und 4) parallele Tangenten-Coordinaten übergehen. Vollständige Reciprocität besteht zwischen 1) und 4), sowie zwischen 2) und 3). Die Coordinaten des Verf. stehen in engster Beziehung zu den Grassmann'schen Tetraeder-Coordinaten. Schg.

J. Lefèvre. La symétrie en coordonnées polaires. Nouv. Ann. (3) XI. 302-314, 353-374.

Eine auf ein System von Polarcoordinaten ($\varrho$, $\omega$) bezogene Curve kann in Bezug auf eine durch den Pol gelegte Axe zweierlei Arten von Symmetrie besitzen, je nachdem in der Curvengleichung die Uebergänge von $\omega$ in $\alpha \pm \omega'$ auf gleiche oder entgegengesetzte Werte von $\varrho$ führen. Ebenso kann der Pol auf dreierlei Arten Symmetriepunkt sein, indem entweder die Curvengleichung durch Vertauschung von $\omega$ mit $(2\lambda+1)\pi+\omega$, oder mit $2\lambda\pi+\omega$ unter gleichzeitigem Uebergang von $\varrho$ in $-\varrho$, ungeändert bleiben kann, oder indem zu jedem Werte von $\omega$ zwei gleich grosse, aber entgegengesetzte Werte von $\varrho$ gehören. Der Verf. untersucht im ersten Teile seiner Arbeit die verschiedenen Combinationen dieser Fälle und zeigt, wie man jedesmal den kleinsten Bogen der Curve findet, aus welchem durch Wiederholung die ganze Curve zusammengesetzt werden kann. Im zweiten Teile werden die allgemeinen Gleichungen für die diesen Fällen entsprechenden Curven aufgestellt.

Schg.

---

Vogt. Sur les angles et les distances en coordonnées trilinéaires. Nouv. Ann. (3) XI. 148-158.

Es werden die Principien der Theorie der trilinearen Coordinaten nebst den dazu nötigen Einführungen erklärt und die dabei stattfindenden Werte und Relationen aufgestellt, insbesondere auch die Winkel und Distanzen bestimmt. H.

---

F. Aschieri. Sopra un metodo per stabilire le coordinate omogenee projettive del piano e dello spazio. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 381-397.

Einem Punkte $P$ in der Ebene eines Kegelschnitts entspricht eine involutorische Paarung seiner Punkte. Die Constanten der zugehörigen Gleichung heissen homogene Coordinaten von $P$, sie führen unmittelbar zur Bestimmung der homogenen Coordinaten einer Geraden als Axe einer auf dem Kegelschnitte gelegenen qua-

dratischen Punktinvolution. Einem Punkte ist auf einer Raumcurve dritter Ordnung ein lineares System zweiter Stufe von quadratischen Involutionen beigeordnet, deren Gleichung die Bestimmung seiner homogenen Coordinaten und die einer Ebene gestattet. Js.

---

F. Prym. Ueber orthogonale, involutorische und orthogonal-involutorische Substitutionen. Gött. Abh. XXXVIII. 42 S.

Cayley hat bekanntlich die Coefficienten einer allgemeinen orthogonalen Substitution durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängige Parameter dargestellt. Die Thatsache nun, dass zwischen den Coefficienten einer involutorischen Substitution ähnliche Relationen wie zwischen denen einer orthogonalen bestehen, liess den Verf. vermuten, dass auch für die Coefficienten einer allgemeinen involutorischen Substitution eine Darstellung der angegebenen Art möglich sei, und gab den Anstoss zu den vorliegenden Untersuchungen, welche die Richtigkeit der Vermutung bestätigten. Es zeigte sich, dass derselbe Grundgedanke sowohl zur Darstellung des Coefficientensystems einer allgemeinen orthogonalen wie zur Darstellung desjenigen einer allgemeinen involutorischen Substitution führt.

Sind nämlich $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$ irgend welche $n^2$ Grössen, so hat von den $2^n$ Determinanten:

$$A_{(\varepsilon)} = \begin{vmatrix} a_{11}+\varepsilon_1 & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}+\varepsilon_n \end{vmatrix} \qquad (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1)$$

immer wenigstens eine einen von Null verschiedenen Wert, und man kann die $n^2$ Grössen $a$ mit Hülfe von $n$ solchen Grössen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, für welche $A_{(\varepsilon)}$ von Null verschieden ist, und von $n^2$ passend gewählten Grössen $b_{\mu\nu}$ mit nicht verschwindender Determinante $B$ darstellen in der Form:

$$a_{\varrho\sigma} = \varepsilon_\varrho \left( \frac{2\beta_{\varrho\sigma}}{B} - \delta_{\varrho\sigma} \right) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \dots, n),$$

wenn man mit $\beta_{\varrho\sigma}$ die Adjuncte von $b_{\varrho\sigma}$ in der Determinante $B$ bezeichnet, und $\delta_{\varrho\sigma} = 1$, wenn $\varrho = \sigma$, $= 0$, wenn $\varrho \gtrless \sigma$ ist. Auf Grund dieser Darstellung erhält man unmittelbar:

1. die Coefficientensysteme $a_{\mu\nu}$ aller orthogonalen Substitu-

tionen, für welche die mit irgend $n$ fest angenommenen zweiten Einheitswurzeln $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ gebildete Determinante $A_{(\varepsilon)}$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, und nur diese allein, auch jedes derselben nur einmal, wenn man die $n^2$ Grössen $b$ den Bedingungen

$$b_{11} = \cdots = b_{nn} = 1, \quad b_{\lambda\varkappa} = -b_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa < \lambda;\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

und der weiteren, dass ihre Determinante $B$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, unterwirft und alsdann an Stelle des Systems der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Grössen $b_{\varkappa\lambda}$ ein jedes die Bedingung $B \gtrless 0$ nicht verletzende System von Werten treten lässt;

2. die Coefficientensysteme $a_{\mu\nu}$ aller involutorischen Substitutionen, für welche die mit irgend $n$ fest angenommenen zweiten Einheitswurzeln $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ gebildete Determinante $A_{(\varepsilon)}$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, und nur diese allein, auch jedes derselben nur einmal, wenn man die $n^2$ Grössen $b$ den Bedingungen:

$$b_{11} = \cdots = b_{nn} = 1, \quad b_{\varkappa\lambda} = 0, \quad \text{wenn } \varepsilon_\varkappa = \varepsilon_\lambda$$
$$(\varkappa \gtrless \lambda;\ \varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

und der weiteren, dass ihre Determinante $B$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, unterwirft und alsdann an Stelle des Systems der $n^2$ Grössen $b$ ein jedes den genannten Bedingungen genügende System von Werten treten lässt.

Es werden dadurch die Coefficienten einer involutorischen Substitution, bei der von den $n$ Grössen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, für welche die zugehörige Determinante $A_{(\varepsilon)}$ nicht verschwindet, $m$ den Wert $-1$, $n-m$ den Wert $+1$ besitzen, durch $2m(n-m)$ Parameter dargestellt. Eine solche Substitution wird eine zur Zahl $m$ gehörige genannt, und es beschäftigen sich die Art. 4-6 mit der Parameterdarstellung der Coefficienten der allgemeinsten zur Zahl $m$ gehörigen involutorischen Substitution. Das am Ende des Art. 4 angegebene Resultat wurde auf anderem Wege von Herrn Cornely (Inaug. Dissert. Würzburg 1891; F. d. M. XXIII. 1891. 722), der auf Veranlassung des Verf. die Eigenschaften der Coefficienten einer involutorischen Substitution eingehend untersucht hat, abgeleitet.

Die aus dem Früheren unmittelbar sich ergebende Parameterdarstellung der Coefficienten einer orthogonal-involutorischen Substitution wird in Art. 7 angegeben. Kr.

G. Rost. Untersuchungen über die allgemeine lineare Substitution, deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden. Leipzig. B. G. Teubner. 28 S. 4°.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit jenen linearen Substitutionen, welche der Bedingung:

$$A^p = \varDelta$$

genügen, bei der $\varDelta$ die identische Substitution bezeichnet. Im Falle $p = 2$ sind dieselben mit den von den Herren Cornely (Inaug. Diss. Würzburg 1891, F. d. M. XXIII. 1891. 722) und Prym (Gött. Abh. XXXVIII, F. d. M. XXIV. 1892, vergl. das vorangehende Referat) eingehend untersuchten involutorischen Substitutionen identisch, und es verdankt der Anregung des Letzteren auch die vorliegende Abhandlung ihre Entstehung.

In Art. 1 werden einige für das Folgende wichtige Definitionen und Bezeichnungsweisen zusammengestellt. In Art. 2 werden gewisse Haupteigenschaften des Systems $A$ durch Betrachtung der zu demselben gehörigen charakteristischen Function $f(z) = |A - z\varDelta|$ abgeleitet. Art. 3 beschäftigt sich mit der Bildung und den Eigenschaften einer aus den Coefficienten des Systems $A$ und $p^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln $\tau$ in eigentümlicher Weise zusammengesetzten Determinante $D_{(\tau)}$, welche im allgemeinen Falle dasselbe leistet wie die Determinante $A_{(\varepsilon)}$ im Falle $p = 2$. Art. 4 bringt die Reduction des Systems $A$ auf die kanonische Form. Nachdem noch in Art. 5 der innere Zusammenhang zwischen dem Systeme $A$ und der auf dasselbe bezogenen Determinante $D_{(\tau)}$ eingehend erörtert worden, wird schliesslich in Art. 6 die endgültige Darstellung des Systems $A$ durch eine geringste Anzahl unabhängiger Parameter gegeben.

Kr.

---

H. S. White. On generating systems of ternary and quaternary linear transformations. American J. XIV. 274-282.

Es wird gezeigt, wie eine beliebige ternäre Linearsubstitution durch wiederholte Anwendung von fünf einfachsten erzeugenden Substitutionen hergestellt werden kann. Drei dieser fünf Substitutionen sind, in geometrischer Redeweise, Rotationen, die beiden

anderen Translationen (der Ebene). Analog hat man im Raume sieben „Erzeugende" einer quaternären Substitution: vier (axiale) Rotationen und drei Translationen. Und entsprechend allgemein. Der Beweis ist sehr anschaulich, indem er rein geometrisch verfährt.

Es wird aber auch die Rechnung vorgeführt, die erforderlich ist, wenn man bei irgendwie vorgegebenen Substitutionscoefficienten die zugehörigen Erzeugenden ermitteln will.

Die Abhandlung ist instructiv, wenngleich die Resultate nicht eigentlich neu sind (vgl. Kronecker, Deruyts u. a.). My.

---

R. Le Vavasseur. Sur une correspondance entre les formes cubiques binaires et les points de l'espace à trois dimensions. J. de Math. spéc. (4) I. 145-147, 169-172.

Den Ausgangspunkt der Betrachtung bildet die Gleichung einer Ebene, deren Coefficienten einen Parameter $\lambda$ in gewisser Weise enthalten. Es werden die Eigenschaften dieser Ebene erörtert, und des weiteren wird sie zu einer kubischen binären Form in Beziehung gesetzt. Die geometrische Interpretation einer Correspondenz, welche zwei Parameter enthält und sich auf die betrachtete kubische Form bezieht, führt dann zu einer Reihe von Betrachtungen, deren Wiedergabe an dieser Stelle zu weit führen würde. Gz.

---

R. Russell. The geometry of the cubic. Dublin Proc. (3) III. 170-174.

Nimmt man in der kubischen Gleichung $az^3+3bz^2+3cz+d=0$ die Coefficienten $a$, $b$, $c$, $d$ als complexe Zahlen an und stellt sie in üblicher Weise durch Punkte in einer Ebene dar, so ergeben sich einige einfache Beziehungen zwischen Punkten in einer Ebene, die der algebraischen, durch die Gleichung hergestellten Relation entsprechen. Glr. (Lp.)

---

A. Henschel. Versuch einer räumlichen Darstellung complexer ebener Gebilde. Pr. (No. 674) Realgymn. Weimar. 15 S. 4°, auch Diss. Jena.

Ist in der $xy$-Ebene der Einheitskreis $x^2+y^2=1$ und ein beliebiger Punkt $P(x_1, y_1)$ gegeben, so bestimmt der Büschel $(P)$ auf der Abscissenaxe eine Punkt-Involution, deren Doppelpunkte $x=\lambda_1, \lambda_2$ imaginär sind, wenn $P$ in der Kreisfläche liegt oder complexe Coordinaten hat. Für den letzten Fall fügt der Verf. die $xz$-Ebene hinzu und trägt auf der $x$-Axe den reellen, auf der $z$-Axe den imaginären Teil der Coordinaten $\lambda=\mu+\nu i$ ab. Dann entspricht dem Punkte $P$ das Punktepaar $(\mu_1, \nu_1)$, $(\mu_2, \nu_2)$. Dieses Punktepaar wird sodann durch Projection aus dem Punkte $z=1$ auf die durch Rotation des Einheitskreises um die $y$-Axe entstandene Kugel übertragen. Dann entspricht die Verbindungslinie der beiden Kugelpunkte dem Punktepaare und dem Punkte $P$, und die vierfach unendliche Schar der complexen Punkte einer Ebene ist auf die vierfach unendliche Schar der Raumgeraden abgebildet. Nach Feststellung der Eigenschaften dieser Abbildung behandelt der Verf. im Anschluss an Kummer's „Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“ die complexe Function $\varphi(x, y)=0$, wobei die Gerade, der Kreis und die Kegelschnitte als Beispiele herangezogen werden. Schg.

C. Segre. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. Math. Ann. XL. 413-467.

Betrachtet man in einem beliebigen algebraischen Gebilde nicht nur die reellen, sondern auch die complexen Elemente und die reelle Darstellung der letzteren, so erhält man ein neues geometrisches Gebilde, welches nicht nur von dem ursprünglichen, sondern auch von der gewählten Darstellung abhängt und daher unendlich viele Anblicke gewähren kann. Wohl bekannt sind z. B. drei verschiedene reelle Abbildungen der complexen Elemente eines Grundgebildes erster Stufe: hat dieses als Träger eine reelle Gerade, so bekommt man die bekannte Darstellung auf den reellen Punkten einer reellen Ebene; ist der Träger eine imaginäre Gerade zweiter Art, so bekommt man die Staudt'sche Darstellung auf den reellen Geraden einer linearen Congruenz; ist endlich das Grundgebilde eine Regelschar von imaginären Geraden erster Art, so bekommt man die von

Riemann entdeckte und von C. Neumann entwickelte Darstellung auf den Punkten einer Fläche zweiter Ordnung (insbesondere einer Kugelfläche). Die einfachsten Beziehungen, welche zwischen diesen drei Darstellungsweisen statt haben, können leicht durch Projiciren und Schneiden abgeleitet werden. Dieselben Darstellungen (welche der Verf. als Einleitung und Vorbereitung zu seinen eigenen Untersuchungen in Erinnerung bringt) sind einer breiten Verallgemeinerung fähig; zu derselben gelangt man durch Betrachtungen, auf welche wir die Aufmerksamkeit des Lesers lenken; denn sie bilden die Grundlagen des Gebäudes, dessen Umrisse zu zeichnen wir jetzt versuchen werden.

Man betrachte ein Grundgebilde zweiter Stufe, z. B. eine reelle Ebene $\pi$. Um die complexen Punkte $M$ derselben auf einen vierdimensionalen linearen Raum $R_4$ abzubilden, betrachte man erstens in $R_4$ die $\infty^4$ Ebenen $\mu$, welche durch eine imaginäre Gerade $r$ zweiter Art gehen, und beziehe dieselben auf die Punkte $M$ eindeutig. Jede Ebene $\mu$ wird von ihrer conjugirt imaginären in einem reellen Punkt $M'$ geschnitten, welcher als Bild von $M$ angesehen wird. $M'$ ist im allgemeinen durch $M$ eindeutig bestimmt; dessen ungeachtet hat dieses eindeutige Entsprechen eine Ausnahme, deren Bestimmung höchst wichtig ist, und welche der Leser in der Originalarbeit selbst findet. Wenn man zweitens als Grundgebilde eine imaginäre Ebene $\pi$ wählt, so kann man jedem ihrer Punkte die reelle Gerade entsprechen lassen, welche durch ihn geht; die so entstehende Abbildung bietet sich verschiedentlich dar, je nachdem $\pi$ mit ihrer conjugirt imaginären Ebene $\pi'$ sich in einer dreidimensionalen Ebene befindet, oder dieselbe in einem oder in keinem Punkte schneidet. In diesem letzteren Falle hat die Abbildung kein Ausnahmeelement, und die Bestimmung ihrer Eigenschaften folgt aus der Untersuchung der Mannigfaltigkeit, welche die Geraden bilden, die die Punkte zweier Ebenen von $R_4$ verbinden (vgl. die Arbeit des Verf., über welche wir im vorigen Bande der F. d. M. 696 berichtet haben); sind insbesondere $\pi$ und $\pi'$ conjugirt imaginär, so ist die erhaltene Abbildung die natürliche Verallgemeinerung der oben erwähnten Darstellung auf der Riemann'schen oder Neumann'schen Kugelfläche.

Was wir eben über die Gebilde zweiter Stufe sagten, ist eine

so treue Verallgemeinerung von Bekanntem über Gebilde erster Stufe, dass man natürlich angeregt wird, die Ausdehnung weiter zu treiben. Man gelangt auf diese Weise zu drei Abbildungen der Elemente eines Gebildes $n^{\text{ter}}$ Stufe, d. h.: a) Abbildung auf die $\infty^{2n}$ reellen Punkte eines $R_{2n}$; b) Abbildung auf $\infty^{2n}$ reelle Gerade von $R_n$; c) Abbildung auf die $\infty^{2n}$ reellen Punkte einer Mannigfaltigkeit der Ordnung $\binom{2n}{n}$ in $R_{n(n+2)}$.

Um diese Abbildungen vom projectiven Standpunkte genauer zu charakterisiren, wird der Verf. auf die Aufgabe geführt, die Transformationsgruppe zu bestimmen, welche in dem reellen Bilde $\Phi$ eines Gebildes $F$ den projectiven Transformationen in $F$ entspricht. Indem er dieselbe auflöst, wird er gezwungen, bei jedem geometrischen Gebilde diejenigen Transformationen zu betrachten, welche er schon neben den Projectivitäten eingeführt und mit dem Namen der „Antiprojectivitäten“ (Anticollineationen und Anticorrelationen) bezeichnet hat: die Eigenschaften dieser neuen Verwandtschaft sind vom Unterzeichneten schon beschrieben in dem Berichte über die ältere Arbeit desselben Verf. „Un nuovo campo di ricerche geometriche“ (F. d. M. XXII. 1890. 609). Es möge gestattet sein, die Entwickelungen des Verf. zu übergehen, welche die Antiinvolutionen und die Ketten, die Antipolaritäten, die Hyperkegelschnitte, die Hyperquadriflächen u. s. w. betreffen, da dieselben teils dazu bestimmt sind, die Sätze des oben angeführten „Saggio“ zu beweisen, teils den Zweck haben, dieselben auf höhere Räume zu übertragen. — Uebrigens sind diese Resultate nur besondere Fälle anderer sehr allgemeiner, welche die Methoden des Verf. zu erreichen scheinen, wie wir jetzt andeuten wollen. Man betrachte die Mannigfaltigkeit $\Phi$, deren reellen Punkten die Punkte von $F$ entsprechen, und in $\Phi$ eine untergeordnete Mannigfaltigkeit $\Phi'$; $\Phi'$ wird das Bild einer gewissen Mannigfaltigkeit $F'$, welche in $F$ enthalten ist, und deren Eigenschaften aus denen von $\Phi'$ abgeleitet werden können: der Verf. wendet diese allgemeine Bemerkung an, um einige Untersuchungen über die Tangenten und den Zusammenhang, die verschiedenen Geschlechter und die Moduln der Mannigfaltigkeiten $F'$ durchzuführen. Ist $\Phi'$ algebraisch oder ana-

lytisch, so wird $F'$ „hyperalgebraisch", resp. „hyperanalytisch" genannt; die Coordinaten eines Punktes eines hyperalgebraischen Gebildes haben ihre reellen Componenten durch algebraische Gleichungen verknüpft. Als „hyperalgebraische Correspondenzen" in $F$ nimmt man ferner diejenigen an, welchen in $\Phi$ algebraische Correspondenzen entsprechen.

Ausser den Geschlechtern und den Moduln, welche Invarianten in Bezug auf hyperalgebraische Correspondenzen sind, besitzen die hyperalgebraischen Gebilde einige Charaktere, welche projectiv sind, und zu denen man folgendermassen geführt wird. Jede hyperalgebraische Mannigfaltigkeit $V_r$ ist immer in einer algebraischen Mannigfaltigkeit enthalten, deren complexe Dimension nicht grösser als das Doppelte der reellen Dimension von $V_r$ sein kann. Verbindet man jeden Punkt von $V_r$ mit seinem conjugirt imaginären, so erhält man die reellen Punktepaare einer reellen Mannigfaltigkeit von Punktepaaren; je zwei conjugirte Punkte derselben können als entsprechende Punkte in einer gewissen algebraischen Verwandtschaft angesehen werden, welche man zu $M_k$ „adjungirt" nennen kann. Eine andere analoge Verwandtschaft ist das Erzeugnis der obigen mit der „Conjugation" (vgl. F. d. M. XXII. 1890. 610). Dies vorausgesetzt, sind die Charaktere von $M_k$ und diejenigen dieser beiden Verwandtschaften ebensoviele Charaktere von $V_r$. Die Entwickelung dieses Gedankens ist in der Originalabhandlung zu finden.

Diese Erklärungen der Charaktere einer hyperalgebraischen Mannigfaltigkeit sind alle unzweifelhaft indirect; will man dieselben in directe Erklärungen umformen, so wird man zu der Unterscheidung unzähliger Fälle genötigt auf Grund der Forderung, dass die Bildgebilde immer reell sein sollen. Da nun dies eine vollkommene Analogie mit dem darbietet, was eintritt, wenn man sich bei den Untersuchungen über algebraische reelle Mannigfaltigkeiten auf reelle Elemente beschränken will, so ist die Frage ganz natürlich, ob man sich nicht helfen kann durch die Betrachtung von Elementen, welche in Bezug auf complexe Elemente etwas Aehnliches vorstellen wie die complexen Elemente in Bezug auf die reellen. Diese Elemente werden in der That vom Verf. mit dem Namen „bicomplexe Elemente" eingeführt und weiter auf eine Weise erklärt, welche an

die Staudt'sche Definition der gewöhnlichen complexen Elemente erinnert; endlich zeigt der Verf., wie sie dazu dienen, die oben genannten Ausnahmen zu beseitigen. Wir wollen nur auch noch bemerken, dass die Erforschung der bicomplexen Punkte eines Grundgebildes $F$ auf die Erforschung der complexen Punkte zweier Grundgebilde $F_1$ und $F_2$ zurückgeführt wird.

Die Einführung der complexen Elemente in die Geometrie entspricht vollständig jener der complexen Zahlen in die Analysis. Der Analogie folgend, führt der Verf. die Betrachtung der bicomplexen Zahlen parallel derjenigen der bicomplexen Elemente in die Analysis ein: eine bicomplexe Zahl kann durch $x_1+hx_2+iy_1+ihy_2$ dargestellt werden, wenn $x_1, x_2, y_1, y_2$ reelle Zahlen, $i$ und $h$ zwei verschiedene Wurzeln aus $-1$ sind. Unter Anwendung einiger Sätze, welche man Gauss, Hankel, Lipschitz, Weierstrass, Schwarz, Dedekind u. a. verdankt, beschäftigt sich neuerdings Herr Segre mit den sogenannten „Nullteilern“, um neue Beweise früherer Resultate zu erhalten.

Betrachtet man das Verfahren aufmerksam, durch welches man von den reellen Elementen zu den complexen und dann zu den bicomplexen gelangt, so wird man gewiss von seiner Einförmigkeit betroffen und kommt auf den Gedanken, dass es fernerer Anwendungen fähig sei. Entwickelt man diese Bemerkung, so steigt man zu den tricomplexen Elementen auf, dann zu den quadricomplexen u. s. w.; parallel dazu laufen die tricomplexen, quadricomplexen u. s. w. Zahlen. Der Verf., welcher alle diese Verallgemeinerungen andeutet, verhehlt sich nicht, dass die folgerichtige unermessliche Ausbreitung der ganzen Mathematik zum Verzicht auf die Hoffnung nötigt, von den neuen Elementen einen wirklichen Vorteil zu ziehen; dessen ungeachtet ist er überzeugt, dass „die neuen Elemente nützlich sein können, um das Bekannte zu verallgemeinern und zu vereinfachen und Neues zu erhalten“. Und wir können diesen Bericht nicht besser schliessen als mit dem Wunsche, dass die Zukunft für die rosenfarbigen Voraussagen des Herrn Segre die glänzendste Bestätigung liefere. La.

G. Sforza. Contributo alla geometria complessa. Nota I^a^.
Batt. G. XXX. 159-187.

Wie die Ueberschrift voraussehen lässt, steht dieser Aufsatz in Zusammenhang mit den Arbeiten der Herren Juel und Segre, über welche in den vorigen Bänden der Fortschritte (F. d. M. XXI. 1889. 595; XXII. 1890. 607 und 609) berichtet worden ist. Der Verf. nimmt eine Mannigfaltigkeit $C_n$ als gegeben an, von der jedes Element durch die Verhältnisse von $n$ unabhängigen Veränderlichen bestimmt sei, d. h. einen $(n-1)$-dimensionalen linearen Raum, in welchem man ein System homogener Coordinaten festgesetzt habe. Er betrachtet nicht nur die gewöhnlichen analytischen Transformationen der Elemente von $C_n$, sondern auch diejenigen, welche als Producte derselben mit der „Conjugation" angesehen werden können; jene werden erster Art, diese zweiter Art genannt; insbesondere betrachtet er ausser den Collineationen diejenige Verwandtschaft, welche nach Segre's Vorgang Anticollineation genannt wird. Bemerkenswert sind die Collineationen, welche zu sich selbst oder zu ihren inversen antiprojectiv sind; erstere heissen „neutral" und sind zu reellen Collineationen projectiv, letztere heissen „antireciprok": die Involutionen sind die einzigen Collineationen, welche zugleich neutral und antireciprok sind. Noch bemerkenswerter sind die Anticollineationen, welche zum Quadrate die Identität haben; sie sind die „Antiinvolutionen" und können in zwei getrennte Klassen verteilt werden, die „positiven" und die „negativen". Jede $C_n$ enthält sowohl positive als negative Antiinvolutionen; $\infty^{n^2-1}$ Collineationen und Anticollineationen sind mit einer beliebig gegebenen Antiinvolution vertauschbar, ebensoviele können zwei Antiinvolutionen desselben Zeichens in einander verwandeln. Daraus folgt, dass der einzige invariante Charakter einer Antiinvolution sein Zeichen ist. Dieser letzte Satz findet eine Erklärung in demjenigen, welcher sagt, dass jede positive Antiinvolution in $C_n$ $\infty^{n-1}$ (eine „Kette" bildendo) Ordnungspunkte besitzt, jede negative keine. Bemerken wir noch, dass das Product zweier Antiinvolutionen eine antireciproke Collineation ist. Endlich wendet sich der Verf. zu den zerfallenden Anticollineationen und Ketten und beschäftigt sich besonders ein-

gehend mit den reellen Abbildungen, deren diese letzteren fähig sind.

Während die oben angeführten Abhandlungen der Herren Juel und Segre grösstenteils in der Sprache der reinen Geometrie der Lage geschrieben sind, werden die Untersuchungen des Herrn Sforza fast ausschliesslich durch die analytische Methode geführt; ferner macht der Verf. einen breiten und geschickten Gebrauch von der Rechnung mit Symbolen von geometrischen Verwandtschaften, eine Rechnung, deren Wichtigkeit und Fruchtbarkeit durch die mannigfachen und sich immer vermehrenden Anwendungen jeden Tag klarer wird. La.

---

Abel Transon. Une lettre. S. M. F. Bull. XX. 104-106.

Der bereits im Jahre 1868 geschriebene Brief enthält Betrachtungen über den Nutzen des Verfahrens, Länge und Richtung einer Strecke durch einen einzigen Buchstaben auszudrücken, über die naturgemässe Deutung von $i$ als Factor, welcher eine Strecke um einen rechten Winkel dreht, und über die im Zusammenhange hiermit von der Quaternionen-Theorie noch zu erwartenden Vorteile.

Schg.

---

E. Carvallo. La méthode de Grassmann. Nouv. Ann. (3) XI. 8-37.

Die vorliegende Arbeit ist die erste, durch welche ein französischer Mathematiker die Grundlinien der Ausdehnungslehre dem Verständnisse näher zu bringen sucht, nachdem er kurz vorher in zwei Artikeln (F. d. M. XXIII. 1891. 145 u. 146) die Bedeutung dieser Disciplin für die Determinanten dargelegt hatte. In rückhaltloser Begeisterung erkennt er die fundamentale Wichtigkeit der gleichzeitig synthetischen und analytischen Methode für Geometrie und Mechanik an, verschweigt aber auch nicht die grossen Schwierigkeiten, durch welche Grassmann selbst vermöge der Form seiner Darstellung den Leser zurückschreckt. Carvallo's Darstellung ist eigenartig und pädagogisch wohl durchdacht, wie er denn auch die ganze Disciplin als natürliche Grundlage des Elementar-Unterrichtes bezeichnet. Vom Tetraeder ausgehend, führt er die Ein-

heiten und die aus zwei und drei Factoren bestehenden äusseren Producte als Formen erster bis dritter Ordnung ein (einfache und Massenpunkte, Linienteile und Ebenenstücke), stellt die erforderlichen Rechnungsregeln auf und gelangt so zu den Grundlagen der Geometrie und Mechanik. Es folgt die Streckenrechnung mit dem Hinweis auf Kräfte und Kräftepaare, Reduction und Specialisirung der drei vorher aufgestellten Formen, endlich der Zusammenhang mit Coordinaten, Determinanten, Homographie und Dualität. Neue Bezeichnungen und Benennungen werden vermieden. Diesen neuen äusseren Erfolg verdankt die Ausdehnungslehre in erster Linie den ihre Vorteile so schlagend darlegenden Arbeiten des Hrn. Caspary, in zweiter den einführenden Werken des Hrn. Peano. Schg.

R. Mehmke. Kleine Beiträge zu den Anwendungen der Methoden von Grassmann. Schlömilch Z. XXXVII. 305-310.

Besitzt eine Punkttransformation einen Fundamentalpunkt $p$, und wendet man diese Transformation auf eine durch $p$ gehende Curve $C$ an, so zerfällt die Transformirte durch Absonderung einer Geraden, welche in einer bestimmten Ebene liegt und durch einen bestimmten Punkt geht, im übrigen aber willkürlich ist. Analoges gilt von der Transformirten einer Fläche. Schg.

V. Schlegel. Introduction aux méthodes géométriques de H. Grassmann. Progreso mat. II. 281-288, 332-336; III. 48-57.

Der Verf. entwickelt die Theorie der Operationen der Addition, Subtraction, inneren, äusseren und algebraischen Multiplication zweier Punkte und giebt einige einfache Anwendungen dieser Theorie. Dem Artikel ist eine Liste von Schriften über den Gegenstand angehängt. Tx. (Lp.)

A. McAulay. Quaternions as a practical instrument of physical research. Phil. Mag. (5) XXXIII. 476-495.

A. McAulay. Utility of quaternions in physics. London. Macmillan. XIV + 107 S. (1893).

Die Frage nach dem Nutzen der Quaternionen als eines Werkzeuges zu physikalischer Forschung erregt gegenwärtig in England ein grosses Interesse, und nicht leicht dürfte ein lebhafteres Eintreten für eine Entscheidung zu Gunsten der Quaternionen sich geltend gemacht haben als in den beiden oben in der Ueberschrift genannten Veröffentlichungen. Die erste ist ein Vortrag vor der Australischen Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften im Januar 1892, während die zweite ursprünglich im December 1887 zur Bewerbung um den Smith'schen Preis in Cambridge eingereicht wurde. Referent fühlt sich ganz und gar nicht befähigt, in eine Kritik der vorgebrachten Ansichten einzugehen; doch hält er es nur für angemessen, sich dahin zu äussern, dass die Kraft und Klarheit, mit der sie vorgetragen werden, der Gleichgültigkeit, um nicht zu sagen dem Vorurteil einen argen Stoss versetzt haben, womit er sonst auf die Quaternionenstudien herabgesehen hat. Die Schriften verdienen es durchaus, mit Sorgfalt gelesen zu werden.

Gbs. (Lp.)

---

C. H. Chapman. Application of quaternions to projective geometry. American J. XIV. 115-140.

Der Verf. verwendet in dieser Arbeit die Hamilton'schen Einheiten $i$, $j$, $k$ zur Unterscheidung der drei Richtungen, welche die senkrechten Abstände ($x$, $y$, $z$) eines in der Ebene des Fundamentaldreiecks liegenden Punktes $P$ von den Seiten dieses Dreiecks besitzen. Der Punkt $P$ ist dann durch seinen „Affix" $xi+yj+zk$ vollständig bestimmt. In dieser Deutung werden nun die Begriffe und Gesetze der Quaternionentheorie dazu benutzt, um die Gleichung der Geraden aufzustellen, die Affixe auf ein neues Dreieck zu beziehen und projectivische Eigenschaften der Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung zu entwickeln. Die vereinfachende Kraft des Verfahrens wird durch das beständige Auftreten der drei Coordinaten $x$, $y$, $z$ wesentlich verringert, und es erscheint von diesem Gesichtspunkte aus die Idee des ganzen Versuches nicht besonders glücklich.

Schg.

---

# Capitel 2.
# Analytische Geometrie der Ebene.

## A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

E. Goedseels. Sur la définition de longueur des lignes courbes et l'aire des surfaces courbes. Brux. S. sc. XVI A. 79-80.

Es sei $L$ eine Linie, $A$ einer ihrer Punkte, $A_r$ eine Normale zu $L$ von der Länge $r$, $v_r$ das Volumen des Vollringes, welcher der Ort aller Normalen ist, $h_r$ die Höhe des Cylinders vom Volumen $v_r$ von der Basis $\pi r^2$. Gemäss der Definition ist die Länge $L$ die Grenze von $h_r$, wenn $r$ der Null zustrebt. Eine entsprechende Definition kann man für den Inhalt einer Oberfläche geben und diese Begriffe sogar auf den Fall ausdehnen, in welchem die Curven keine Tangenten, die Oberflächen keine Berührungsebenen besitzen. Mn. (Lp.)

---

G. Peano. Generalizzazione della formula di Simpson. Torino Atti XXVII. 608-612.

Wenn bei der mechanischen Quadratur die Anfangsordinate $y_0$ und die Endordinate $y'$ gegeben werden, so hat man, wenn $h$ die Differenz der zugehörigen Abscissen ist, als angenäherte Ausdrücke für das den Curveninhalt wiedergebende Integral $J$:

$$(1)\qquad J=\tfrac{1}{2}h(y_0+y'),$$
$$(2)\qquad J=\tfrac{1}{6}h(y_0+y'+4y_m),$$

wo in (2) $y_m$ für die mittlere Ordinate gesetzt ist. Der Verfasser zeigt, wie zwischen $y_0$ und $y'$ weitere Ordinaten einzuschalten sind, damit die erhaltenen Formeln dem Werte von $J$ möglichst nahe kommen, und berechnet das Fehlerglied. Ausser der Abhandlung von Turazza: „Intorno all'uso dei compartimenti diseguali nella ricerca del valore numerico di un dato integrale“ (Ven. Ist. V. 277-278. 1855), welche am Schlusse des Artikels citirt ist, musste noch angeführt werden die Abhandlung von Radau im Journ. de

Math. (2) VI. 283-286 (F. d. M. XII. 1880. 229), in welcher dieselbe Rechnung für eine grössere Anzahl von Ordinaten durchgeführt, die Resultate in einer Tafel zusammengestellt und die Fehlerglieder ebenfalls berechnet sind. Lp.

---

A. Kneser. Einige allgemeine Sätze über die einfachsten Gestalten ebener Curven. Math. Ann. XLI. 349-376.

Kriterien für die Existenz einer gemeinsamen Tangente oder eines Schnittpunktes zweier nirgends singulären Bogen, sowie für die Anzahl Tangenten, die bei einem von ihnen durch einen beliebigen Punkt gehen, liefern u. a. folgende Sätze. Durch den einen Endpunkt eines nirgends singulären Bogens geht, ausser seiner, keine weitere Tangente; durch die des anderen wird der Bogen nicht wieder getroffen. Schneidet die Tangente des ersteren den Bogen noch in $m$ Punkten, so gehen durch den letzteren ausser seiner eigenen noch $m$ Tangenten. Für $m>0$ heisst der erstere Eckpunkt „innerer", der letztere „äusserer". Gerade, die mit einem nirgends singulären Bogen gleich viel Punkte gemein haben, bilden ein einziges Continuum. Gehen durch den äusseren Eckpunkt ausser seiner Tangente noch $m$ andere des Bogens, so hat er mit einer Geraden höchstens $m+2$ Punkte gemein. Gerade, die ihn in irgend einer geringeren Anzahl Punkte schneiden, sind ebenfalls vorhanden. Eine geschlossene, nirgends singuläre Curve schneidet eine Gerade höchstens in zwei Punkten, und durch einen beliebigen Punkt gehen höchstens zwei Tangenten. Ein Bogen, dessen Singularitäten nur Doppelpunkte oder Doppeltangenten sind, ist auf mannigfaltige Weise in zwei nirgends singuläre Teile zu zerlegen. Die Doppeltangenten und Doppelpunkte sind gemeinsame Tangenten und Punkte der beiden Teilbogen. Geschlossene Curven können niemals Doppelpunkte und Doppeltangenten allein zu Singularitäten haben. Geschlossene Curven mit einem Doppelpunkte oder einer Doppeltangente haben, wenn sie sonst keine anderen Singularitäten aufweisen, nur diese Doppeltangente und diesen Doppelpunkt. Beweise der Möbius'schen Sätze über die Wendepunkte geschlossener Curvenzüge vervollständigen den ersten Teil der Untersuchung;

was folgt, beruht auf der Vergleichung zweier Bogen, die durch stetige Deformation aus einander hervorgehen. Doppeltangenten bleiben hierbei erhalten, so lange sie getrennte Berührungspunkte haben. Die Deformation einer Curve in der Umgebung eines Selbstberührungspunktes ändert die Zahl der Doppeltangenten um zwei; das Gleiche tritt ein, wenn bei Deformation einer Curve eine Wendetangente noch ausserhalb ihres Wendepunktes in einem nicht singulären Punkte berührt. Treten bei Deformation eines anfangs von Singularitäten freien Bogens zwei Wendepunkte auf, die aus unendlicher Nähe aus einander rücken, so tritt gleichzeitig eine Doppeltangente auf. Bestehen die Singularitäten eines paaren Zuges aus $2\mathfrak{w}$ Wendepunkten und $\mathfrak{d}$ Doppeltangenten, so gilt $\mathfrak{d} \equiv \mathfrak{w}$ (mod. 2); die gleiche Bedingung besteht für einen unpaaren Zug mit $2\mathfrak{w}+3$ Wendepunkten und $\mathfrak{d}$ Doppeltangenten, dem weitere Singularitäten mangeln. Js.

---

W. Dyck. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. (Zweite Mitteilung.) Münch. Ber. XXII. 101-138.

Um über den Gesamtverlauf der Integralcurven einer Differentialgleichung erster Ordnung Aufschluss zu erhalten, betrachtet der Verfasser die einzelne Differentialgleichung als Glied einer Reihe von continuirlich in einander übergehenden Differentialgleichungen und studirt die Aenderungen, welche die Integralcurven durch eine solche stetige Abänderung der Differentialgleichung erleiden. Das zu Grunde gelegte System von Differentialgleichungen ist von der Gestalt

$$F(x, y, y')-k=0,$$

wo $k$ der Parameter und $F(x, y, y')$ eine reelle eindeutige Function der Veränderlichen $x, y, y'$ ist, welche nur für endliche Werte dieser Veränderlichen verschwindet und an jeder Stelle $x_0, y_0, y'_0$ nach ganzen Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$, $y'-y'_0$ entwickelbar ist. Der Verfasser deutet nun $x, y, y'$ als Coordinaten eines Punktes im Raume, so dass jene Gleichung ein System von ganz im End-

lichen gelegenen, einander nicht schneidenden, geschlossenen Flächen darstellt, die den Raum gerade einfach durchsetzen. Auf jeder dieser Flächen ist das ihr entsprechende System von Integralcurven einfach darüber gelagert. Mittels der Substitution

$$x-x_0=\xi,\quad (y-y_0)-y'_0(x-x_0)=\eta,\quad y'-y'_0=\eta'$$

ergiebt sich die Entwickelung:

$$F(x,y,y')-k_0\equiv(F_1+y'_0F_2)\xi+F_2\eta+F_3\eta'+\tfrac{1}{2}\{(F_{11}+2y'_0F_{12}+y'^2_0F_{22})\xi^2+2(F_{12}+y'_0F_{22})\xi\eta+F_{22}\eta^2\}+(F_{13}+y'_0F_{23})\xi\eta'+F_{23}\eta\eta'+\tfrac{1}{2}F_{33}\eta'^2+\cdots.$$

Der erste Abschnitt behandelt die wesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen, d. h. diejenigen Stellen, für welche gleichzeitig die drei Gleichungen

$$F-k_0=0,\quad F_1+y'_0F_2=0,\quad F_3=0$$

statthaben. Zur näheren Untersuchung derselben verhilft nun die geometrische Anschauung, insofern die letzteren Gleichungen auf den Flächen des Systems Curven bestimmen, die von einfacher geometrischer Bedeutung sind. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den ausserwesentlich singulären Stellen der Differentialgleichungen des Systems, d. h. mit denjenigen Stellen, für welche

$$F_3=0,\quad F_{33}=0$$

wird; der Verfasser untersucht insbesondere das Zusammenfallen zweier ausserwesentlichen Stellen; er erhält somit schliesslich einen vollständigen Ueberblick über das Verhalten des Integralsystems gegenüber allen denjenigen Aenderungen des Flächensystems, welche im Sinne der Analysis situs wesentlich sind, und gelangt auf diesem Wege zu einer Bestätigung der Relation $K=s_0+s_\infty-s_2$, welche zwischen der Zusammenhangszahl $K$ einer Fläche $F-k=0$ und den Anzahlen $s_0$, $s_\infty$, $s_2$ der singulären Stellen von gewisser Art besteht. Die gewonnenen Resultate werden durch zahlreiche Figuren veranschaulicht. Ht.

---

F. J. van den Berg. Over zelfwederkeerige poolkrommen.
Nieuw Archief XIX. 80-97.

Wegen der projectiven Beziehung zwischen einer Curve und

ihrer reciproken Polare in Bezug auf einen festen Kegelschnitt betrachtet der Verfasser zunächst nur den Fall, wo dieser Kegelschnitt der Kreis $x^2+y^2=a^2$ ist. Ist nun $f(x,y)=0$ die Gleichung der gegebenen Curve mit dem Differential $Pdx+Qdy=0$, so wird die reciproke Polare erhalten, indem $x$ und $y$ eliminirt werden zwischen

$$\frac{x'}{P}=\frac{y'}{Q}=\frac{a^2}{R} \quad \text{und} \quad f(x,y)=0, \text{ wo } R=xP+yQ.$$

Hieraus lässt sich sogleich schliessen, dass eine parabolische Curve

$$y^m=Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+Ix^2+Kx+L \qquad (m^2 \gtrless n)$$

nur mit ihrer reciproken Polare zusammenfallen kann, falls sämtliche Coefficienten $B, C, \ldots, L$ verschwinden. Für $m=n=2$ oder $y^2=Ax^2+2Bax+Ca^2$ findet man als Bedingung der Selbstreciprocität, dass entweder $B=0$, $A(A^2-1)=0$, $C(C^2-1)=0$ oder $B^2-AC=0$, $(A-C)^2=1$ oder schliesslich $B^2=A^2-1$, $C=A$ sein muss. Hieraus ergeben sich sechs Fälle, deren merkwürdigster zum Kegelschnitt

$$(1) \qquad a^2(x-b)^2+(bx-a^2)^2-(a^2-b^2)y^2=0$$

führt. Ersetzt man hierin $b$ durch $\frac{a^2}{b}$, so entsteht ein zweiter selbstreciproker Kegelschnitt:

$$a^2(x-b)^2+(bx-a^2)^2+(a^2-b^2)y^2=0,$$

und diese beiden bilden mit dem Fundamentalkreise und der selbstreciproken gleichseitigen Hyperbel $x^2-y^2=a^2$ ein beachtenswertes System. Denkt man dasselbe nämlich perspectivisch auf ein anderes bezogen, so erhält man das von Steiner betrachtete „System harmonisch zugeordneter Kegelschnitte".

In einem zweiten Teile wird die Aufgabe behandelt: Aus der gegebenen Enveloppe der Verbindungsgeraden zweier einander zugeordneten Punkte einer selbstreciproken Curve die letztere zu bestimmen. Die Enveloppe wird nach Monge in der Form

$$X=f\sin\alpha+f'\cos\alpha, \quad Y=-f\cos\alpha+f'\sin\alpha,$$

wo $f$ eine willkürliche Function der Grösse $\alpha$ ist, gegeben vorausgesetzt. Sind $r$, $r'$ die Entfernungen des Punktes $X$, $Y$ von den beiden einander zugeordneten Punkten $x, y$ und $x', y'$, so lauten

die Bedingungen des Problems folgendermassen:

$$(r+f')(r'+f')+f^2=a^2,\quad fr-(r'+f')\left(f+f''+\frac{dr}{da}\right)=0,$$

$$fr'-(r+f')\left(f+f''+\frac{dr'}{da}\right)=0.$$

Die Elimination von $r'$ ergiebt nun die Differentialgleichung für $r$:

$$fr^2+ff'r+(f^2-a^2)(f+f'')+(f^2-a^2)\frac{dr}{da}=0,$$

welche ebenfalls für $r'$ gültig ist. Die daraus sich ergebenden Werte für $r$ und $r'$ können nur in den Integrationsconstanten verschieden sein, welche sodann, nachdem $r$ und $r'$ in $x, y, x', y'$ ausgedrückt sind, derart bestimmt werden können, dass sich die nämliche Gleichung für $x, y$ und $x', y'$ ergiebt. Anwendung auf den Fall, wo die gegebene Enveloppe ein Punkt $X=\frac{a^2}{b}$, $Y=0$ ist, somit $f=\frac{a^2}{b}\sin\alpha$. Man wird sodann zum vorher schon betrachteten Kegelschnitt (1) geführt. Ist die gegebene Enveloppe ein Kreis $X^2+Y^2=b^2$, so hat man es mit einer transcendenten selbstreciproken Curve zu thun. Mo.

---

F. J. Van den Berg. Over krommingskegelsneden van vlakke kromme lijnen. Amst. Versl. en Meded. (3) IX. 85-103.

Es seien $A$, $B$, $C$, $D$ vier auf einander folgende Punkte einer beliebigen Curve derart gewählt, dass $BC$ parallel zu $AD$ ist. Der Mittelpunkt jedes durch diese Punkte gehenden Kegelschnittes ist sodann in der Verbindungsgeraden der Mitten der Seiten $BC$ und $AD$ enthalten. Indem zu jenen Punkten einmal der unmittelbar vorangehende und nachher der unmittelbar folgende Punkt der Curve herangezogen wird, erhält man den Satz: Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche eine beliebige Curve fünfpunktig berühren, wird von der Verbindungsgeraden eines beliebigen Mittelpunktes mit dem correspondirenden Punkte der Curve umhüllt. Allgemein wird nun die Gleichung aller Kegelschnitte aufgestellt, die nur je drei auf einander folgende

Punkte mit der Curve gemeinsam haben, derart dass der geometrische Ort der Mittelpunkte derselben durch die Verbindungsgerade eines beliebigen Mittelpunktes mit dem correspondirenden Punkte der Curve umhüllt wird. Es folgt eine Anwendung auf den Krümmungskreis und auf den fünfpunktig berührenden Kegelschnitt. Bestimmung der Summe der Quadrate der Halbaxen und des Productes derselben. Grösse der Deviation, d. h. des Winkels zwischen der Normalen an die Curve und dem Durchmesser des in dem nämlichen Punkte der Curve dieselbe fünfpunktig berührenden Kegelschnittes. Gleichung der Deviationscurve, d. h. des geometrischen Ortes der Mittelpunkte sämtlicher fünfpunktig berührenden Kegelschnitte. Anwendung auf die logarithmische Spirale.

Im zweiten Teile werden Kegelschnitte betrachtet, die eine beliebige Curve dreipunktig berühren, derart dass der Ort der Brennpunkte durch die Gerade, welche einen Brennpunkt mit dem correspondirenden Punkte der Curve verbindet, umhüllt wird. Der Verfasser denkt einen vollkommen biegsamen Faden mit den beiden Endpunkten an zwei verschiedenen Curven $C$ und $C'$ befestigt und betrachtet nun die Curve $K$, welche von einem Stift beschrieben wird, während der Faden fortwährend gespannt bleibt. Sind $F$ und $F'$ die momentanen Berührungspunkte des Fadens mit den beiden Curven $C$ und $C'$, denen eine bestimmte Stellung $P$ des Stiftes entspricht, so wird der durch $P$ gehende Kegelschnitt, dessen Brennpunkte in $F$ und $F'$ liegen, drei auf einander folgende Punkte mit der Curve $K$ gemeinsam haben. Hieraus folgt nun die Relation:

$$\frac{2}{R} = \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\cos\varphi,$$

wo $R$ den Krümmungsradius der Curve $K$ im Punkte $P$ bedeutet, während $FP = u$, $F'P = v$, $\angle FPF' = 2\varphi$ gesetzt wird. Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes der betrachteten Art.

Mo.

Cl. Servais. Sur l'aberration de courbure. Mathesis (2) II. 129-130.

Diese Note enthält einen geometrischen Beweis der Transon'-

schen Formel bezüglich der „Aberration“ der Krümmung in einem Curvenpunkte. Der Verf. verwendet diese Formel zum Beweise des folgenden Satzes: Ist $F$ der Brennpunkt der Parabel, welche dem aus der Tangente, der Normale und der Directrix der osculirenden Parabel in einem Curvenpunkte gebildeten Dreiecke einbeschrieben ist, so ist der Berührungspunkt auf der Normale der Krümmungsmittelpunkt $C$ der Curve, und vom Punkte $F$ aus erscheint der Krümmungsradius $CC_1$ der Evolute unter einem rechten Winkel. Dml. (Lp.)

---

M. d'Ocagne. Note sur le centre de courbure des podaires et antipodaires. Nouv. Ann. (3) XI. 532-534.

Der Verfasser vergleicht eine von H. Pilleux gefundene Beziehung zwischen den Krümmungsmittelpunkten der zwei Curven, welche die Fusspunkte der von einem festen Punkte auf die Tangente und Normale einer Urcurve gefällten Lote erzeugen, mit einer bereits in Nouv. Ann. II. 256 (F. d. M. XV. 1883. 622) von ihm selbst aufgestellten gleichbedeutenden Beziehung und giebt einen neuen Beweis dafür. H.

---

H. de la Goupillière. Détermination du centre des moyennes distances des centres de courbure des développées successives d'une ligne plane quelconque. C. R. CXV. 856-861.

G. Fouret. Sur le lieu du centre des moyennes distances d'un point d'une épicycloïde ordinaire et des centres de courbure successifs qui lui correspondent. Ibid. 1055-1056.

Auf Grund der vom ersten Verf. schon 1859 gegebenen Formeln für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts einer Evolute beliebiger Ordnung berechnet er jetzt den Schwerpunkt des Systems der $k$ ersten Krümmungscentren. Die erforderlichen Integrationen werden durchgeführt an den Beispielen der logarithmischen Spirale und der Epicykloiden; der Ort des Schwerpunkts ist dabei eine congruente Spirale resp., wie in der zweiten Abhandlung (auch

unabhängig vom Vorangegangenen) nachgewiesen wird, eine gewöhnliche, verlängerte oder verkürzte Epicykloide desselben Geschlechts. R. M.

---

**G. Pirondini.** Sur la conique osculatrice des lignes planes. Teixeira J. XI. 9-41.

Zuerst bestimmt der Verf. den osculirenden Kegelschnitt der ebenen Curven, indem er zu Coordinatenaxen eine der Tangenten der betrachteten Curve und die zugehörige Normale wählt. Auf diese Weise findet er die Bedingung dafür, dass dieser Kegelschnitt Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist; danach bestimmt er den Mittelpunkt und die Axen dieses Kegelschnittes.

Hierauf werden einige Aufgaben über die Bestimmung von Curven gelöst, deren osculirender Kegelschnitt gegebenen Bedingungen genügt. Als Anwendung der dargelegten Theorie wählt der Verfasser die Behandlung der logarithmischen Spirale. Er zeigt, dass die osculirenden Kegelschnitte dieser Curve Ellipsen sind, und findet einige interessante Eigenschaften derselben. In einem Nachtrage wird die Gleichung der Kegelschnitte in den Coordinaten $R$ und $s$ ermittelt, wo $R$ den vom Ursprung der Axen ausgehenden Fahrstrahl und $s$ den Bogen der Curve bedeutet. Tx. (Lp.)

---

**W. Burnside.** Note on a paper relating to the theory of functions. Cambr. Proc. VII. 126-128. (1890.)

In der Arbeit von J. Brill „on the geometrical interpretation of the singular points of equipotential curves“ (Cambr. Proc. VI.), über welche F. d. M. XXI. 1889. 688 berichtet wurde, werden vom Verf. obiger Note einige Unrichtigkeiten bezeichnet. Ho.

---

**F. Balitrand.** Sur un problème de M. Laisant. J. de Math. spéc. (4) I. 51-54.

Es handelt sich um die von Hrn. Laisant (S. M. F. Bull. XVI, F. d. M. XX. 1888. 702) und dann von Hrn. Mannheim (Nouv. Ann. (3) VIII, F. d. M. XXI. 1889. 859) behandelte Aufgabe: die Curve

zu bestimmen, welche die Mitte einer Strecke beschreibt, wenn die letztere sich so bewegt, dass die von ihren Endpunkten beschriebenen Bogen gleich sind. Die hier gegebene Lösung ist wesentlich elementarer als die früheren. Gz.

---

M. d'Ocagne. Extrait d'une lettre à M. Craig. American J. XIV. 389.

Berichtigung zu American J. XI. 55, cf. F. d. M. XX. 1888. 698.

---

## B. Theorie der algebraischen Curven.

J. Puzyna. Einige Bemerkungen zu der allgemeinen Theorie der algebraischen Curven. Krak. Abh. XXII. 1-29. (Polnisch.)

Es sei

$$G(x, y) = \sum_{\mu+\nu=0}^{n} a_{\mu,\nu} x^{\mu} y^{\nu} = 0$$

($\mu = 0, 1, \ldots, n$; $\nu = 0, 1, \ldots, n$) eine vollständige algebraische Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades; man gebe den darin befindlichen Producten $x^{\mu}y^{\nu}$ die Form

$$(1) \qquad x^{\mu}y^{\nu} = \alpha_1 x_1 y_1 + \alpha_2 x_2 y_2 + \cdots + \alpha_n x_n y_n,$$

wo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ die Coordinaten der $k = \frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte sind, welche die algebraische Curve $C_n$ eindeutig bestimmen; die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ aber Parameter sind, die von den Coordinaten $(x, y)$ und den $k$ genannten Punkten abhängen. Die Formen (1) waren schon von Paul Serret in seiner „Géométrie de direction" und in den Comptes Rendus (LXXXVI und LXXXVII) benutzt, um die Focaleigenschaften algebraischer Curven zu studiren. Sie haben aber noch andere bemerkenswerte Eigenschaften, deren Untersuchung und Anwendung auf die Theorie der Curven der Zweck dieser Abhandlung ist.

Der Verfasser beweist, dass die $\alpha_s$ absolute Invarianten in Bezug auf ganze nicht homogene Substitutionen sind; er leitet die

allgemeinen Formen ab, durch welche man sie darstellen kann, und interpretirt diese Formen geometrisch. Die eine von ihnen hat folgende geometrische Bedeutung. Es sei $\gamma_s(x, y) = 0$ die Gleichung einer beliebigen durch die $k-1$ Punkte

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{s-1}, y_{s-1}), (x_{s+1}, y_{s+1}), \ldots, (x_n, y_n)$$

hindurchgehenden algebraischen Curve $n^{\text{ten}}$ Grades; durch $(x, y)$ und $(x_s, y_s)$ ziehen wir zwei parallele Transversalen, bilden die Producte der $n$ zwischen $(x, y)$ resp. $(x_s, y_s)$ und den Durchschnittspunkten mit $\gamma_s(x, y) = 0$ liegenden Segmente, dann wird das Verhältnis dieser zwei Producte constant, nämlich gleich $a_s$. Jedes $a_s$ nimmt jeden Wert $n^2$-mal an, wenn man den Punkt $(x, y)$ die Curve $C_n$ durchlaufen lässt.

Wir heben noch den Satz hervor: Ist $C_n$ die gegebene Curve, und teilt man ihre Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ in zwei Gruppen, die eine von $p$, die zweite von $r$ Punkten, so kann man eine unendliche Anzahl rationaler Functionen der $x$ und $y$ bilden, welche ihren Wert nicht ändern, wenn man statt der der zweiten Gruppe angehörenden Punkte irgend andere $r$ Punkte der $C_n$ nimmt. Dieser Satz lässt eine interessante geometrische Interpretation zu.

Dn.

---

L. S. Hulburt. Topology of algebraic curves. New York M. S. Bull. I. 197-202.

Der Verf. berichtet über den ersten Teil des Aufsatzes des Herrn Hilbert: „Ueber die reellen Züge algebraischer Curven“ (F. d. M. XXIII. 1891. 753) und stellt insbesondere mit eigenen Bemerkungen den Beweis des Satzes dar: Für jeden positiven ganzen Wert von $n$ giebt es eine nicht-singuläre Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Maximalzahl reeller Züge $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)+1$ besitzt und $\frac{1}{2}(n-2)$ oder $\frac{1}{2}(n-3)$ eingeschachtelte Züge, je nachdem $n$ gerade oder ungerade ist.

Lp.

---

L. S. Hulburt. A class of new theorems on the number and arrangement of the real branches of plane algebraic curves. American J. XIV. 246-250.

Ausdehnung der Sätze, welche Herr Hilbert für die Anzahl reeller, in einander geschachtelter Zweige einer ebenen Curve ohne singuläre Punkte aufgestellt hat (cf. F. d. M. XXIII. 1891. 753) auf ebene Curven $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit höchstens $n$ Doppelpunkten.

F.

---

H. Valentiner. Specialgrupper paa plane Curver. Naturforskermöde 1892. 347-350.

Auszug aus einem bei der Naturforscherversammlung in Kopenhagen 1892 gehaltenen Vortrage. In der Abhandlung Math. Ann. VII: „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie" kommen Brill und Nöther zu dem Resultat, dass im allgemeinen eine Specialgruppe $G_R$ durch $(q+1)(R-t+q)$ Bedingungen bestimmt ist, wenn sie so liegt, dass eine Curve $\varphi$, welche einer $t$-fach unendlichen Curvenschar angehört und durch $G_R$ geht, noch durch $q$ willkürliche Punkte gelegt werden kann. Dieses Resultat ist nicht in allen Fällen richtig: Denn setzt man $R=3n$, $q=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, und nimmt man an, dass $\varphi$ eine allgemeine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist, dann existirt eine solche Gruppe, nämlich das vollständige Schnittpunktsystem einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung und einer Curve dritter Ordnung. Diese Gruppe müsste laut dem angeführten Satz $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ Bedingungen unterworfen sein, was unmöglich ist, weil $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1>6n$, wenn $n$ hinlänglich gross ist.

Der Vortrag giebt dann Beispiele, in welchen der Satz richtig ist, und zeigt, wie man in den angeführten Beispielen die Specialgruppen construiren kann.

V.

---

A. Brill. Ueber die Auflösung höherer Singularitäten einer algebraischen Curve in elementare. Katalog der Math. Ausst. München. 27-39.

Die Ausstellung, welche diesen Aufsatz veranlasst hat, zeigte einige Blätter mit Zeichnungen, die Uebergänge darstellen, bei denen eine höhere Singularität sich in die äquivalenten elementaren auflöst. Sie entsprechen dem besonderen Falle, dass die-

selbe eine „unicursale“ ist, d. h. dass ihre Entwickelungen einen einzigen Cyklus bilden. Nach einer einleitenden Uebersicht über die ganze Frage stellt der Verf. die algebraischen Hülfsmittel für die Behandlung dieses Falles zusammen, so wie er dies in der Abhandlung gelehrt hat: Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies (Math. Ann. XVI. 348-408, F. d. M. XII. 1880. 539). Die ausgestellten Zeichnungen und die zugehörigen Rechnungen hat im Jahre 1883 Hr. Ch. Schultheiss, damals Studirender der Mathematik an der technischen Hochschule in München, ausgeführt. Lp.

---

D. J. KORTEWEG. Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung. Math. Ann. XLI. 286-307.

Der Grundgedanke der Arbeit besteht darin, dass der Verfasser die durch Gleichungen mit unbestimmten Coefficienten definirten Flächen, Curven oder sonstigen geometrischen Gebilde sich als in stetiger Deformation begriffen vorstellt und diese Deformation so einrichtet, dass dabei das Auftreten von Singularitäten höherer als der ersten Ordnung stets vermieden wird. Ist das geometrische Gebilde durch $s$ Coordinaten $x_1, \dots, x_s$ definirt, so bestimmt jedes System $\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_m = 0$ von $m$ Gleichungen eine $(s-m)$-fache Mannigfaltigkeit solcher Gebilde. Treten in den Functionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ neben den Coordinaten $x_1, \dots, x_s$ noch $r$ Parameter $p_1, \dots, p_r$ auf, so entspricht jedem gegebenen Wertsystem der Parameter eine bestimmte Mannigfaltigkeit. Wenn nun eine an diesen Mannigfaltigkeiten auftretende Singularität durch $q$ Beziehungen zwischen den Parametern $p_1, \dots, p_r$ bedingt ist, so wird dieselbe vom Verfasser eine Singularität der $q^{\text{ten}}$ Ausnahmeordnung genannt. Bei der Anwendung der angedeuteten Methode ist offenbar vor allem die Kenntnis der Singularitäten erster Ausnahmeordnung der betreffenden Mannigfaltigkeiten notwendig. Der Verfasser erläutert seine allgemeinen Betrachtungen an einer grösseren Anzahl von Beispielen aus der Curven- und Flächentheorie. Ht.

---

Ch. Bioche. Sur les singularités des courbes algébriques planes. S. M. F. Bull. XX. 67-69.

Wenn man die bekannten Plücker'schen Relationen zwischen den Singularitäten einer ebenen Curve in die Gestalt

$$3(n-k) = r-i,$$
$$2(d-t) = (n-k)(n+k-9)$$

bringt, wo $n$ die Ordnung der Curve, $d$ die Zahl der Doppelpunkte, $r$ die Zahl der Rückkehrpunkte und ferner $k$, $t$, $i$ die dual entsprechenden Zahlen bedeuten, so ergiebt sich leicht der Satz: Die Gleichheit zweier sich dual entsprechenden Zahlen bedingt notwendig die Gleichheiten der anderen beiden Paare, ausser wenn $d=t$ und $n+k=9$ ist. Letzterer Fall tritt, wie man leicht erkennt, nur ein für

$$n=3,\quad k=6,\quad d=t=0,\quad r=0,\quad i=9,\quad p=1;$$
$$n=4,\quad k=5,\quad d=t=2,\quad r=1,\quad i=4,\quad p=0,$$

und für die beiden hierzu reciproken Curven. Der Verfasser fügt noch einige Bemerkungen über ebene Curven von gegebenem Grade und von niedrigster Klasse hinzu. Ht.

---

J. E. Campbell. Note on the maximum number of arbitrary points which can be double points on a curve, or surface, of any degree. Messenger (2) XXI. 158-164.

Wenn eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung durch $r$ Doppelpunkte und $t$ gewöhnliche Punkte bestimmt wird, so sind diese Zahlen nach der üblichen Regel durch die Gleichung $3r+t = \frac{1}{2}n(n+3)$ verknüpft. Bei der Annahme $n=2$ folgt $3r+t=5$; hieraus könnte man schliessen, dass ein Kegelschnitt nicht zwei willkürlich gewählte Punkte als Doppelpunkte haben dürfte. Aber das Quadrat der Gleichung der Geraden, welche die beiden Punkte verbindet, stellt einen Fall eines Kegelschnitts dar, der die beiden willkürlich gewählten Doppelpunkte und unendlich viele, von diesen beiden abhängige Doppelpunkte besitzt. Unter der Voraussetzung $n=4$ ist $3r+t=14$; man könnte also schliessen, dass eine Curve vierter Ordnung nicht fünf Doppelpunkte haben darf. Allein das

Quadrat der Gleichung des Kegelschnittes durch fünf willkürlich gewählte Punkte stellt eine Curve vierter Ordnung mit fünf beliebig angenommenen Doppelpunkten und mit unendlich vielen, von jenen fünf abhängigen Doppelpunkten dar. In der gegenwärtigen Note zeigt der Verf., dass diese beiden Fälle die einzigen Ausnahmen von der Regel für die ebenen Curven sind, und dass für Oberflächen zweiter und vierter Ordnung allein ähnliche Ausnahmen von der Regel $4r+t=\frac{1}{6}n(n^2+6n+11)$ bestehen. Aus diesen Sätzen werden einige (meist wohl bekannte) Aussprüche hinsichtlich gewisser kanonischer Formen algebraischer Curven und Oberflächen hergeleitet. Glr. (Lp.)

---

Charlotte A. Scott. On the higher singularities of plane curves. American J. XIV. 301-325.

Die höheren Singularitäten einer ebenen Curve werden durch Betrachtung der Curve geometrisch aufgelöst, welche durch Inversion mittels eines festen Kegelschnitts und eines festen Punktes aus der gegebenen entsteht (cf. Hirst, On the quadric inversion of plane curves, Lond. R. S. Proc. XIV. 1865. 91). F.

---

C. Küpper. Geometrische Betrachtungen auf Grundlage der Functionentheorie. Prag. Ber. 1892. 257-263.

Anwendung der Cayley'schen Correspondenzformel zur Ableitung einiger die Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung, $m^{\text{ter}}$ Klasse und vom Geschlechte $p$ $[C_p^n]$ betreffenden Sätze: 1. Bestimmung der Anzahl der Wendepunkte und der Spitzen. 2. Die Anzahl der sogenannten Weierstrasspunkte einer $C_p^n$, in welchen die Curve von einer adjungirten $C^{n-3}$ $p$-punktig berührt wird, beträgt $(p-1)p(p+1)$. Allgemein ist die Anzahl der Systeme von je $k$ Punkten $(k<p-1)$, durch welche $(p-k)$-punktig berührende Adjungirte möglich sind, gleich $(p-k)\{(p-1)(p+1)-pk\}$. Anwendung der Weierstrasspunkte zum Beweise des Hurwitz'schen Satzes, dass jede eindeutige Transformation der $C_p^n$ $(p>1)$ in sich eine cyklische ist. 3. Eine $C_3^n$ wird von 56 Adjungirten $C^{n-3}$ in je zwei Punkten

berührt. 4. Für eine $C_4^n$ giebt es 360 Adjungirte $C^{n-3}$, welche sie in je drei Punkten berühren. Lh.

---

C. Küpper. Ueber das Vorkommen von linearen Scharen $g_n^{(2)}$ auf Curven $n^{ter}$ Ordnung $C_p^n$, deren Geschlecht $p$ grösser ist als $p_1$, das Maximalgeschlecht einer Raumcurve $R_{p_1}^n$. Prag. Ber. 1892. 264-272.

Wenn $C^n$ ohne vielfache Punkte durch eindeutige Transformation in eine Curve gleicher Ordnung übergeführt wird, so kann dies nur durch Collineation geschehen. Da auf $C^n$ keine $g_n^{(3)}$ vorkommen, kann dieselbe nie als Projection einer Raumcurve $R^n$ auftreten. Soll auf $C^n$ eine von der geradlinigen verschiedene Punktgruppe zweiter Stufe $g_n^{(2)}$ möglich sein, so muss $C^n$ Doppelpunkte besitzen. Die Minimalzahl dieser Doppelpunkte sowie die Ordnung des ausschneidenden Netzes wird dann untersucht.

Lh.

---

C. Küpper. Bestimmung der Minimalgruppen für $C^m$, das heisst der Gruppen von kleinster Punktzahl, welche in Beziehung zu Curven $m^{ter}$ Ordnung anormale Lage haben. Prag. Ber. 1892. 403-412.

Sätze über Punktgruppen in der Ebene, welche einer durch sie hindurch zu legenden $C^m$ weniger Bedingungen auferlegen, als die Zahl ihrer Elemente beträgt. Lh.

---

G. Scheffers. Curvenscharen, die auf jeder Geraden eine Involution bestimmen. Leipz. Ber. XLIV. 269-278.

Bei seinen Untersuchungen über Translationsflächen war Hr. Lie darauf geführt worden, das Bestehen des folgenden Satzes zu vermuten: Lassen sich die Curven einer continuirlichen Curvenschar der Ebene einander paarweise so zuordnen, dass die einander entsprechenden Curven auf jeder Geraden der Ebene Punktepaare einer Involution ausschneiden, so ist die Curvenschar ein Kegel-

schnittbüschel. In der Scheffers'schen Arbeit wird nun ein Beweis für diesen Satz entwickelt, und zwar auf analytischem Wege; es wird zunächst angenommen, dass man zwei verschiedene Curvenscharen hat, und dass jeder Curve der einen Schar eine der anderen Schar so zugeordnet ist, dass entsprechende Curven auf jeder Geraden Punktepaare einer Involution ausschneiden. Es stellt sich dabei heraus, dass die beiden Curvenscharen durch denselben analytischen Ausdruck dargestellt werden, und dass man es wirklich mit einem Kegelschnittbüschel zu thun hat. El.

---

F. Balitrand. L'extension aux courbes algébriques d'une propriété du cercle. J. de Math. spéc. (4) I. 226-227.

Betrachtet man einen Kreis $C$, construirt an denselben zwei parallele Tangenten und fällt auf die letzteren von einem festen Punkte $P$ aus die Lote $PA_1$, $PA_2$, so ist der Ort der Mitte $M$ von $A_1A_2$ ein Kreis, der über $PC$ als Durchmesser beschrieben ist. Dieser Satz wird auf eine beliebige algebraische Curve übertragen. Gz.

---

L. Ravier. Sur un théorème analogue à celui de Carnot ou généralisation du théorème de Jean de Ceva. Nouv. Ann. (3) XI. 349-352.

„Wenn man von jeder Ecke eines beliebigen Polygons alle möglichen Tangenten an eine algebraische Curve zieht und deren Schnittpunkte mit den nicht durch diese Ecke gehenden Polygonseiten bestimmt; wenn man alsdann der Grösse und dem Vorzeichen nach die Producte bildet der Abstände der Schnittpunkte auf der ersten Seite von der ersten Ecke, dann derjenigen auf der zweiten Seite von der zweiten Ecke u. s. f.; wenn man schliesslich von neuem beginnt in entgegengesetztem Sinne, so erhält man stets zwei dem absoluten Werte nach gleiche Producte, deren Vorzeichen entgegengesetzt sind, wenn die Seitenzahl des Polygons und die Klassenzahl der Curve beide ungerade sind.“ Als Specialfälle dieses allgemeinen Satzes ergeben sich: „Die Tangenten in den drei Rückkehrpunkten einer Curve dritter Klasse schneiden sich in einem

Punkt", und die beiden Sätze von den um- und eingeschriebenen Dreiecken eines Kegelschnitts. Lg.

---

E. Amigues. Théorème sur les foyers d'une courbe quelconque. Nouv. Ann. (3) XI. 163-167.

Es wird folgender Satz bewiesen: Zieht man von jedem der $n$ reellen Brennpunkte einer Curve $n^{\text{ter}}$ Klasse an diese Curve $U_n$ die $n-2$ nicht isotropen Tangenten, so erhält man ein Vieleck von $n-2$ Seiten. Man kann dann immer eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Klasse finden, welche alle Seiten dieses Vielecks berührt. Ebenso gestattet diese Curve, eine solche $(n-4)^{\text{ter}}$ Klasse etc. zu construiren. Nennt man $P_i$ das Product der aus den reellen Brennpunkten der Curve $U_n$ auf eine beliebige Tangente an die Curve $U_n$ gefällten Lote, so hat man eine lineare Relation zwischen den $P_i$.

H.

---

G. Fouret. Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques. S. M. F. Bull. XX. 60-64.

De la Gournerie hat schon 1867 zwei Klassen von Curven studirt, die er symmetrische Dreiecks-Curven und symmetrische Tetraeder-Curven nannte. Dann hat Herr Jamet in den Ann. de l'Éc. Norm. (3) IV, suppl. p. 19 (F. d. M. XIX. 1887. 816) eine interessante Eigenschaft der Krümmungsmittelpunkte beider Curven-Klassen gezeigt. Herr Fouret beweist nun in der vorliegenden Abhandlung rein geometrisch zwei von Herrn Jamet analytisch gefundene Sätze über solche Curven. Die Punktgleichungen dieser Curven sind:

$$Ax^n + By^n + Cz^n = 0$$

und

$$\begin{cases} Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n = 0 \\ A'x^n + B'y^n + C'z^n + D't^n = 0 \end{cases}.$$

Die Sätze von Herrn Jamet beziehen sich auf die Krümmungsradien der Punkte solcher Curven. Scht.

---

A. Pellet. Sur une classe de courbes et de surfaces.
C. R. CXV. 498-499.

Hr. Pellet macht darauf aufmerksam, dass der im vorangehenden Referate besprochene Satz des Hrn. Jamet auf die allgemeineren Curven

$$AX^m + BY^m + CZ^m = 0$$

ausgedehnt werden kann, wo $X$, $Y$, $Z$ beliebige Functionen der laufenden Coordinaten, $A$, $B$, $C$ Parameter sind. Das Entsprechende gilt für die krummen Oberflächen

$$A_1X_1^m + A_2X_2^m + A_3X_3^m + A_4X_4^m = 0,$$

wo die $X_i$ Functionen von $x$, $y$, $z$ sind. Lp.

---

F. Machovec. Ueber den Zusammenhang der Krümmungshalbmesser der Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung mit den Krümmungshalbmessern der Dreieckscurven.
Prag. Ber. 1892. 77-81.

Der Verfasser leitet zuerst den Satz ab:

Das Verhältnis der Krümmungshalbmesser der sich in einem Punkte berührenden Curven

$$y^m = a^r x^{m-r} \quad \text{und} \quad \lambda x^n + \mu y^n = d^n$$

in ihrem Berührungspunkte ist gleich $1-n$.

Der Satz gilt auch für Curven, deren Gleichungen in Dreieckscoordinaten die Form haben

$$\alpha x^{m-r} z^r + \beta y^m = 0, \quad \lambda x^n + \mu y^n + \nu z^n = 0.$$

Für $n = -1$ geht der Satz in ein Resultat des Herrn Jamet (Ann. de l'Éc. Norm. 1887) über. Mit Hülfe des Specialfalles $n = 2$ wird nun ein zweiter Satz abgeleitet:

Verbindet man die Punkte, in welchen die Tangente der Curve ($C$) $\alpha x^{m-r} y^r + \beta z^m = 0$ in einem beliebigen Punkte $a$ zwei Seiten des Fundamentaldreiecks schneidet, mit den Eckpunkten auf der dritten Seite, und construirt man den Kegelschnitt, welcher die Curve $C$ im Punkte $a$ berührt und das durch diese dritte Seite und die zwei angeführten Verbindungslinien gebildete Dreieck zum Poldreieck hat, so osculirt dieser Kegelschnitt die Curve $C$ im Punkte $a$.

Lh.

---

A. Demoulin. Quelques propriétés du système de deux courbes algébriques planes. Belg. Bull. (3) XXIII. 527-547.

C. le Paige. Rapport. Ibid. 457.

Liouville hat eine Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern zweier algebraischen Curven in den Punkten, wo sie sich schneiden, und zwischen den Winkeln angegeben, welche die Tangenten in diesen Punkten mit einer willkürlich angenommenen festen Axe bilden. Hr. Demoulin wendet auf die zu diesem Satze gehörige Figur die Transformation durch reciproke Radien an und erhält so zahlreiche Relationen, unter denen wir den folgenden, ein Mannheim'sches Theorem verallgemeinernden Satz anführen wollen:

Ist $T$ die Länge einer zweien algebraischen Curven gemeinschaftlichen Tangente, und sind $R$, $R'$ die Krümmungshalbmesser dieser Curven in den Berührungspunkten, so ist $\Sigma\frac{R-R'}{T^2}=0$, wobei das Summenzeichen sich auf alle gemeinschaftlichen Tangenten erstreckt. Dml. (Lp.)

---

M. d'Ocagne. Sur les courbes algébriques. Mathesis (2) II. 100-103.

In dieser Note stellt der Verf. zwei allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven fest und leitet aus der zweiten dieser Eigenschaften eine von Hrn. Mannheim herrührende Construction des Krümmungsmittelpunktes in einem Punkte eines Kegelschnittes her. Dml. (Lp.)

---

X. Antomari. Sur un mode de description d'une courbe unicursale plane ou gauche. J. de Math. spéc. (4) I. 220-226.

Zerlegt man die Ausdrücke für die Coordinaten einer ebenen Unicursalcurve

$$x=\frac{f(t)}{\varphi(t)},\quad y=\frac{f_1(t)}{\varphi(t)},$$

wo $f$, $f_1$ und $\varphi$ ganze rationale Functionen von $t$ sind und die Brüche ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit als echt vorausgesetzt werden können ($\varphi(t)$ sei vom Grade $n$), zunächst unter

der Annahme, dass die Gleichung $\varphi(t)=0$ $n$ verschiedene reelle Wurzeln besitzt, in Partialbrüche:

$$x=\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad y=\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

wo

$$x_i=\frac{a_i}{t-t_i}, \quad y_i=\frac{b_i}{t-t_i}$$

ist, so beschreibt der Punkt $(x_i, y_i)$ eine durch den Coordinatenanfang gehende Gerade $OA_i$, wenn man $t$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren lässt. Man erhält also $n$ durch den Anfangspunkt gehende Geraden, welche die Asymptotenrichtungen der Curve geben. Einem bestimmten Werte von $t$ entspricht auf jeder der Geraden ein bestimmter Punkt: $A_1, A_2, \ldots, A_n$; die Geraden $A_i A_k$ gehen durch einen festen Punkt. Damit gewinnt man den Satz: Wenn die $n$ Ecken eines ebenen Polygons $A_1 A_2 \ldots A_n$ $n$ Gerade beschreiben, die durch einen Punkt $O$ gehen, wenn ferner die Seiten dieses Polygons respective durch feste Punkte gehen, so beschreibt das freie Ende der Resultante eines polygonalen Konturs, dessen Seiten nach Grösse, Richtung und Sinn den Strahlen $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ gleich sind, eine Unicursalcurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Resultante in $O$ ihren Ausgangspunkt habe.

Von diesem Satze macht der Verfasser einige Anwendungen und geht dann zu der entsprechenden Betrachtung des Falles über, wo $\varphi(t)=0$ imaginäre Wurzeln besitzt; in diesem lässt sich die Unicursalcurve mit Hülfe von Geraden und Kegelschnitten construiren. Besitzt $\varphi(t)=0$ Doppelwurzeln, so lässt sich die Untersuchung auf den vorhergehenden Fall zurückführen; dagegen geht der Verfasser nicht auf den Fall mehrfacher Wurzeln (von höherem Grade der Vielfachheit als 2) ein, da man alsdann nicht mit so einfachen Elementen auskommen könne. Zum Schluss wird die Betrachtungsweise auch auf unicursale Raumcurven ausgedehnt.

Gz.

---

Henry Byron Newson. Unicursal curves by method of inversion. Kansas University Quarterly. I. 47-70.

In diesem reichhaltigen Aufsatze giebt der Verf. eine Uebersicht über die Resultate, die in seiner Klasse während des letzten Studienjahrs auf dem Gebiete der modernen Geometrie erlangt wurden. Eine vollständige Angabe dieser Resultate muss unterbleiben, da dies nur durch eine wörtliche Reproduction der Arbeit möglich wäre. Es kann nur in der Kürze angegeben werden, wovon hauptsächlich die Rede ist.

Wird ein Kegelschnitt von einem seiner Punkte aus nach dem Gesetz der reciproken Radien transformirt, so entsteht eine circulare kubische Curve, welche den Punkt zum Doppelpunkt hat. Dieser Doppelpunkt ist Knotenpunkt, isolirter Punkt oder Rückkehrpunkt, je nachdem der Kegelschnitt Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist. Zuerst werden nun kubische Curven, die entweder einen Knotenpunkt (mit reellen Tangenten) oder einen isolirten Punkt haben, hierauf solche mit einem Rückkehrpunkte betrachtet. Es werden Eigenschaften von den transformirten Kegelschnitten auf diese kubischen Curven übertragen. Sind diese Eigenschaften projectivischer Art, so lassen sie sich überhaupt auf jede auch nicht circulare kubische Curve mit Doppelpunkt ausdehnen. Nur bleibt dabei die Besonderheit des Rückkehrpunktes stets erhalten. Nach einer Besprechung der allgemeinen kubischen Curven geht der Verf. dann zur Transformation von Kegelschnitten über, wobei das Transformationscentrum ausserhalb des Kegelschnitts gewählt ist. Es werden Curven vierten Grades erhalten, die die Kreispunkte und das Transformationscentrum zu Doppelpunkten haben. Auf diese Curven werden dann wieder Lehrsätze von Kegelschnitten übertragen. Später folgen noch allgemeinere Curven vierten Grades. Mz.

---

C. A. Laisant. Quelques remarques sur les courbes unicursales. Assoc. Franç. Pau XXI. 25-35.

Der Verf. zeigt die Anwendung der Methode der Aequipollenzen bei der Untersuchung der ebenen einzügigen Curven. Er bespricht der Reihe nach den Grad der Curve, ihre Construction durch Punkte, die Tangente, die Fusspunktencurve, die Asymptoten, den Krümmungsmittelpunkt, die Evolute. Dann werden die rein parabolischen

einzügigen Curven behandelt, die geometrische oder kinematische Erzeugung, die Transformation der einzügigen Curven, zweizügige Curven, das Trifolium vierter Ordnung. Lp.

---

E. Marin. Curvas unicursales. Anales de la Sociedad cientifica argentina XXXII.

Erste Grundlagen für die Theorie der einzügigen Curven, Tangenten, Wendepunkte, Asymptoten u. s. w. bei diesen Curven. Tx. (Lp.)

---

## C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

C. A. Laisant. Sur la détermination analytique de l'aire d'un triangle. J. de Math. spéc. (4) I. 77-79.

Verf. will die in vielen Lehrbüchern gegebene Bestimmung des Dreiecksinhalts deshalb vermieden sehen, weil durch die Einführung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden eine Unbestimmtheit des Zeichens herbeigeführt wird. Die von ihm hier vorgetragene Bestimmung bietet aber nichts Neues; in Deutschland wenigstens wird schon lange der Dreiecksinhalt in wesentlich derselben Weise bestimmt. S. z. B. Rudio, Analytische Geometrie der Ebene, § 11. Gz.

---

A. José Teixeira. Algumas formulas de geometria superior. Instituto de Coimbra XL.

Der Verf. findet einige Beziehungen zwischen den Strecken, die man erhält, indem man eine Gerade mit Hülfe von drei, vier, fünf, ... gegebenen Punkten teilt. Tx. (Lp.)

---

R. Hoppe. Der Schwerpunkt des Dreiecks als Schwerpunkt eines Systems von Vierecken. Hoppe Arch. (2) IX. 351-352. Lp.

---

E. Humbert. Sur la détermination d'une conique par cinq points ou par cinq tangentes. J. de Math. spéc. (4) I. 246-250.

Die im Titel genannte Aufgabe wird auf algebraischem Wege vollständig discutirt. Gz.

---

X. Antomari. Sur un théorème de géométrie analytique. Nouv. Ann. (3) XI. 212-216.

Der Verfasser betrachtet fünf gegebene Punkte; der eine sei Coordinatenanfang, die vier anderen $(x_i y_i)$, wo $i=1,2,3,4$. Dann betrachtet er die Gleichung:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x^2, & xy, & y^2, & x, & y \\ x_1^2, & x_1y_1, & y_1^2, & x_1, & y_1 \\ x_2^2, & x_2y_2, & y_2^2, & x_2, & y_2 \\ x_3^2, & x_3y_3, & y_3^2, & x_3, & y_3 \\ x_4^2, & x_4y_4, & y_4^2, & x_4, & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese ist vom zweiten Grade in $x, y$, also ist sie die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die gegebenen fünf Punkte geht. Es wird nun nach den Bedingungen gesucht, unter welchen die Gleichung sich auf den ersten Grad erniedrigt. Dazu müssen die Coefficienten von $x^2$, $xy$, $y^2$ gleichzeitig verschwinden. Die Ausrechnung der Determinante ergiebt nun Folgendes: Ist

$$A=(x_1y_2-x_2y_1)(x_3y_4-x_4y_3);\quad B=(x_2y_3-x_3y_2)(x_1y_4-x_4y_1);$$
$$C=(x_3y_1-x_1y_3)(x_2y_4-x_4y_2),$$

so folgt $A+B+C=0$, und schreibt man Gleichung (1):

$$Lx^2+Mxy+Ny^2+\cdots=0,$$

so ist

$$L=A(y_2-y_3)(y_1-y_4)+B(y_1-y_2)(y_4-y_3)$$
$$M=A((x_1-x_4)(y_2-y_3)+(y_1-y_4)(x_2-x_3))$$
$$\qquad +B((x_1-x_2)(y_4-y_3)+(y_1-y_2)(x_4-x_3))$$
$$N=A(x_2-x_3)(x_1-x_4)+B(x_1-x_2)(x_4-x_3).$$

Man kann den Gleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$ erstens durch $A=0$, $B=0$ genügen; dann liegen drei der vier Punkte $(x_i y_i)$ mit $(0,0)$ in gerader Linie. Zweitens kann man annehmen, dass nicht $A$ und $B$ gleichzeitig Null sind; dann müssen die vier Punkte

$(x_i, y_i)$, wie die Rechnung zeigt, in gerader Linie liegen. Also immer müssen vier der gegebenen fünf Punkte in gerader Linie liegen, wenn $L$, $M$, $N$ verschwinden sollen; überdies wird dann die Gleichung (1) eine Identität. Wenn aber nicht vier der fünf Punkte in gerader Linie sind, so drückt die Gleichung (1) stets einen, und nur einen Kegelschnitt (der auch ein Linienpaar sein kann) aus.

Mz.

---

C. Laab. Lösung des Problems über den Schnitt von Curven zweiter Ordnung; Reduction einiger Aufgaben auf die Lösung dieses Problems. Hoppe Arch. (2) XI. 262-283.

Der Verfasser sagt im Eingange, dass er es sich zur Aufgabe gemacht hat, eine graphisch genaue Lösung, d. h. eine Lösung mit Zirkel und Lineal, von Curven zweiter Ordnung in allgemeiner Lage durchzuführen. Dieser etwas unklare Ausdruck wird durch die Ueberschrift und auch durch den nachfolgenden Satz so gedeutet, dass der Durchschnitt von Curven zweiter Ordnung gesucht wird. Der Verfasser sagt selbst, dass nach der analytischen Berechnung man im allgemeinen auf eine Gleichung dritten oder vierten Grades stösst, und will dennoch, obgleich er selbst zugesteht, dass die verlangte Lösung nicht leicht denkbar ist, diese Lösung geben. Er wendet dies an auf die Dreiteilung des Winkels, auf Construction des Ausdrucks $\sqrt[3]{abc}$ und auf eine erweiterte Lösung des Berührungsproblems von Apollonius und Pappus. Diese Lösungen werden natürlich nicht gegeben, sondern dem Leser wird das schwierige Geschäft überlassen, diese Lösungen aus vorangehenden Betrachtungen selbst zu machen. Ref. braucht hiernach wohl nicht weiter auf die Arbeit einzugehen.

Mz.

---

Retali. Sur quelques problèmes concernant le double contact et le contact du troisième ordre des coniques. Mathesis (2) II. 178-180, 219-223.

Neunzehn Aufgaben von der Art der folgenden: (No. 4) Einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher mit einem gegebenen Kegel-

schnitte eine Berührung dritter Ordnung hat und von welchem ein gegebener Punkt ein Brennpunkt ist. (No. 14) Einen Kegelschnitt zu beschreiben, welcher mit einer gegebenen Hyperbel eine doppelte Berührung hat, und welcher die eine der Leitlinien und einen gegebenen Durchmesser, und zwar den letzteren im Mittelpunkte der Hyperbel, berührt. Mn.

---

F. Lucas. Sur les polygones inscrits dans les coniques. S. M. F. Bull. XX. 33-34.

Die Seiten 12, 34, ... eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen $2p$-Ecks 123 ... $2p$ schneiden die übrigen Seiten 23, 45, ... ausser in $2p$ Punkten des Kegelschnittes noch in $p(p-2)$ Punkten einer Curve $(p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Js.

---

P. Serret. Sur une propriété commune à trois groupes de deux polygones: inscrits, circonscrits, ou conjugués à une même conique. C. R. CXIV. 1254-1256, 1343-1345.

Sind 1, 2, ..., 3 und 1′, 2′, ..., 3′ die Eckpunkte zweier einem Kegelschnitte ein- oder um-geschriebenen oder autoconjugirten Polygone; $a$, $b$, ..., $c$ die Schnittpunkte ihrer Seiten (12, 1′2′), (23, 2′3′), ..., (31, 3′1′), so gilt die Beziehung:

$$\frac{a1}{a2}\cdot\frac{a1'}{a2'}\times\frac{b2}{b3}\cdot\frac{b2'}{b3'}\times\cdots\times\frac{c3}{c1}\cdot\frac{c3'}{c1'}=+1.$$ Js.

---

F. Farjon. Solution d'une question de géométrie donnée au concours général en 1887. Nouv. Ann. (3) XI. 535-537.

Die bekannte notwendige und hinreichende Bedingung, unter der ein Viereck einem gegebenen Kegelschnitt $F$ um- und einem anderen $f$ einbeschrieben werden kann, wird nach der Methode von Salmon in der Form gefunden:

$$4\Delta\Theta\Theta' = \Theta^2 - 8\Delta^2\Delta',$$

wo $\Delta$, $\Delta'$, $\Theta$, $\Theta'$ die Invarianten des Systems $F$, $f$ bezeichnen. H.

---

H. M. Taylor. Orthogonal conics. Quart. J. XXVI. 148-155.

Der Verfasser geht von dem bekannten Theorem aus, dass zwei confocale Kegelschnitte sich in jedem ihrer vier gemeinsamen Punkte rechtwinklig schneiden. Darauf löst er die allgemeine Aufgabe: Alle Kegelschnitte zu finden, die einen gegebenen Kegelschnitt so treffen, dass in jedem der vier gemeinsamen Punkte ein rechtwinkliges Schneiden stattfindet. Die Methode der Lösung ist folgende: Der gegebene Kegelschnitt habe die Gleichung:

$$(1)\qquad ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy=0,$$

einer der gesuchten Kegelschnitte dagegen:

$$(2)\qquad Ax^2+By^2+C+2Fy+2Gx+2Hxy=0.$$

Beide schneiden sich in $(x, y)$ rechtwinklig, wenn

$$(3)\qquad (ax+hy+g)(Ax+Hy+G)+(hx+by+f)(Hx+By+F)=0.$$

Gleichung (3) gehört einem Kegelschnitt an, der durch die vier Schnittpunkte von (1) und (2) geht. Dies giebt die sechs Bedingungsgleichungen mit zwei unbestimmten Grössen $\lambda$, $\mu$:

$$(4)\quad \begin{cases} aA+hH=\lambda a+\mu A,\ hH+bB=\lambda b+\mu B,\ gG+fF=\lambda c+\mu C, \\ aH+Ah+hB+Hb = 2\lambda h+2\mu H, \\ aG+Ag+hF+Hf = 2\lambda g+2\mu G, \\ hG+Hg+bF+Bf = 2\lambda f+2\mu F. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung wird nun erstens angenommen, der Kegelschnitt (1) habe einen Mittelpunkt, danach zweitens, er sei eine Parabel. Im ersten Falle kann man $f=g=h=0$ annehmen, wodurch die Gleichungen (4) sich vereinfachen und eine leichte Discussion gestatten. Die letzten drei dieser Gleichungen werden dann: $(a+b)H=2\mu H$, $aG=2\mu G$, $bF=2\mu F$, und sie werden befriedigt durch:

$$(\alpha)\quad F=G=H=0,$$

ferner durch

$$(\beta)\quad F=G=0,\quad 2\mu=a+b,$$
$$(\gamma)\quad F=H=0,\quad 2\mu=a,$$
$$(\delta)\quad G=H=0,\quad 2\mu=b,$$
$$(\varepsilon)\quad F=0,\quad a+b=2\mu=a,$$
$$(\zeta)\quad G=0,\quad a+b=2\mu=b,$$
$$(\eta)\quad H=0,\quad a=2\mu=b.$$

Bei ($\alpha$) kommen confocale Kegelschnitte heraus; bei ($\beta$) etc. die anderen Fälle rechtwinkligen Schneidens, was in der Arbeit selbst nachzusehen ist. Im zweiten Falle, wo (1) eine Parabel darstellt, kann man $b=c=g=h=0$ annehmen und auf ähnliche Weise verfahren. Mz.

---

G. T. Bennett. Note on the preceding paper (Orthogonal conics.) Quart. J. XXVI. 155-157.

Der Verfasser behandelt die Aufgabe, alle Kegelschnitte zu finden, die einen gegebenen viermal rechtwinklig schneiden (siehe voriges Referat), in etwas anderer Weise, indem er die Frage stellt: Welche gegenseitigen Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten sind die notwendige Folge des gegenseitig rechtwinkligen Schneidens? Er bezieht die Kegelschnitte auf ihr gemeinsames selbstconjugirtes Dreieck und kommt schliesslich zu folgenden drei Fällen:

I. Die Kegelschnitte $S$, $S'$ haben die Kreispunkte $I$, $J$ zu einem Scheitelpaar des Vierseits, das von ihren vier gemeinsamen Tangenten gebildet wird; d. h. sie sind confocal.

II. Die Kegelschnitte $S$, $S'$ sind concentrisch; ihre Asymptoten bilden einen harmonischen Büschel; die Winkel zwischen den gemeinsamen conjugirten Durchmessern und die Winkel zwischen den Richtungen der beiden parallelen Paare gemeinsamer Tangenten haben dieselben Halbirungslinien. Nimmt man die gemeinsamen conjugirten Durchmesser zu schiefwinkligen cartesischen Coordinatenaxen, so sind die Gleichungen von $S$ und $S'$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{\lambda}, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-b^2}{\lambda}.$$

III. Das selbstconjugirte Dreieck von $S$, $S'$ besteht aus zwei parallelen Seiten und einer dritten, die zu diesen senkrecht ist. $S$ und $S'$ schneiden diese dritte Seite harmonisch und haben in rechtwinkligen cartesischen Coordinaten die Gleichungen:

$$y^2=\lambda(x-a)^2+\mu(x-b)^2; \quad -\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu+2}y^2=\lambda(x-a)^2-\mu(x-b)^2.$$

Das selbstconjugirte Dreieck ist durch:

$$(x-a)(x-b)y=0$$

gegeben. Mz.

---

Lorenz. Eine Aufgabe aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Pr. (Nr. 457) Progymn. Saarlouis. 16 S. 4°.

Die vom Verfasser behandelte Aufgabe lautet: Ein Büschel von Kreisen und ein einzelner Kreis sind gegeben; man stelle jeden Kreis des Büschels mit diesem Kreise zusammen, construire je die beiden Aehnlichkeitspunkte $A$, $J$, die Potenzlinie $p$ und den Fusspunkt $Q$ der letzteren auf der Centrale; welche Curven werden von $A$, $J$, $Q$ erzeugt und von $p$ eingehüllt? Die Auflösung geschieht nach der Methode der analytischen Geometrie. Eine einfache Betrachtung ergiebt, dass die von $A$ und $J$ erzeugte Curve dieselbe, nämlich ein gewisser Kegelschnitt ist, der eingehend auf seine Art und seine Lage discutirt wird. Die von der Potenzlinie $p$ umhüllte Curve reducirt sich auf einen Punkt, der auf der Büschelchordale des Kreisbüschels liegt. Was die von allen Punkten $Q$ erzeugte Curve betrifft, so gilt Folgendes: Alle Potenzlinien, die in Frage kommen, gehen durch einen gewissen Punkt $c$ der Büschelchordalen, und alle Centralen durch den Mittelpunkt $P$ des gegebenen Kreises. Je eine Potenzlinie und die zugehörige Centrale treffen sich in $Q$ rechtwinklig; daher ist der Ort der Punkte $Q$ eine Kreislinie, die die Gerade $cP$ zum Durchmesser hat. Mz.

---

R. E. Allardice. On the contact property of the eleven point conic. Edinb. M. S. Proc. X. 37-41.

Der „Elfpunktekegelschnitt" ist der Name, den Herr Taylor (Geometry of conics, S. 284) dem Orte der Mittelpunkte aller Kegelschnitte gegeben hat, die einem gegebenen Vierecke umgeschrieben sind. Wenn das Viereck rechtwinklige Diagonalen hat (orthic four-point), so wird der Kegelschnitt zu dem Neunpunktekreis. In dem vorliegenden Aufsatze haben wir einen analytischen Beweis für den Satz, der dem bekannten anderen entspricht, dass der Neunpunktekreis den In- und den Umkreis berührt. Das Theorem wird so gefasst: Sind $A$, $B$, $C$, $D$, die vier Punkte, so berührt der Elfpunktekegelschnitt von $ABCD$ die ähnlichen, den Dreiecken $ABC$, $ABD$ u. s. w. eingeschriebenen Kegelschnitte. Gbs. (Lp.)

---

M. Bôcher. On a nine-point conic. Annals of Math. VI. 132, 178.

Wenn ein Dreieck und ein Punkt sich in derselben Ebene befinden, so lässt sich durch die folgenden neun Punkte ein Kegelschnitt legen:

1) die Mittelpunkte der Dreiecksseiten,

2) die Mittelpunkte der Verbindungslinien des Punktes mit den Ecken des Dreiecks,

3) die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit den Seiten des Dreiecks.

Diese Verallgemeinerung des bekannten Feuerbach'schen Theorems ist eine andere Form des bei Salmon-Fiedler, Kegelschnitte § 272 Beisp. 1 bewiesenen Satzes. F.

---

Cl. Servais. Relations métriques dans les courbes du second degré. Mathesis (2) II. 177-180.

Die im Titel erwähnten Massbeziehungen werden gewonnen, indem man die Tangente und die Normale in einem Punkte eines Kegelschnittes zu Axen nimmt. Dml. (Lp.)

---

Ed. Maiss. Eine neue Eigenschaft der Kegelschnittslinien. Monatsh. f. Math. III. 16-19.

Der Gesichtswinkel, unter welchem ein Element einer Kegelschnittslinie von seinem Krümmungsmittelpunkte aus erscheint, ist stets gleich dem arithmetischen Mittel der Gesichtswinkel, unter denen es von den Brennpunkten jener Kegelschnittslinie aus gesehen wird, falls man Gesichtswinkel an Punkten, von wo aus das Curvenelement concav erscheint, positiv, an Punkten, von wo aus es convex erscheint, negativ rechnet. Der Satz ermöglicht eine elementare Berechnung des Krümmungshalbmessers. F.

---

Cl. Servais. Sur la courbure dans les sections coniques. Belg. Bull. (3) XXIII. 243-260.

C. Le Paige. Rapport. Ibid. 213-214.

Der Verf. beginnt mit einem sehr einfachen Beweise eines Mannheim'schen Satzes bezüglich der von einem Punkte ausgehenden Tangenten an eine algebraische Curve. Auf die Kegelschnitte angewandt, wird dieser Satz durch die Formel ausgedrückt: $\varrho : \varrho_1 = T^3 : T_1^3$, in der $\varrho$ und $\varrho_1$ die Krümmungshalbmesser in zwei Punkten $M$ und $M_1$ eines Kegelschnittes bezeichnen, $T$ und $T_1$ die Längen der Tangenten in diesen Punkten von den Berührungspunkten an bis zu ihrem Schnittpunkte $S$. Wenn der Punkt $S$ auf $M_1S$ unendlich wenig verschoben wird, so bleibt $\varrho_1$ fest, dagegen ändern sich $\varrho$, $T$ und $T_1$. Durch geometrische Deutung der Differentiale dieser Grössen erhält der Verf. eine Formel, aus welcher er zahlreiche Folgerungen zieht.

Der Schlussteil dieser Abhandlung ist der Darlegung einer sehr fruchtbaren Methode zur Untersuchung der Krümmung bei den Kegelschnitten gewidmet. Dieselbe beruht auf dem folgenden Satze: Wenn man von den Punkten $R$ der Tangente in einem Punkte $M$ eines Kegelschnittes Lote auf ihre bezüglichen Polaren fällt, so ist die Einhüllende dieser Geraden eine Parabel, welche die zu $M$ gehörige Normale des Kegelschnittes im Krümmungsmittelpunkte von $M$ berührt. Dml. (Lp.)

---

Cl. Servais. Sur la courbure dans les sections coniques. Nouv. Ann. (3) XI. 424-428.

Der Krümmungsmittelpunkt $\mu$ eines Kegelschnitts, entsprechend einem Punkte $M$ auf ihm, wird auf folgende Art bestimmt. Die Tangente in $M$ schneidet die Axen in $T_a$ und $T_b$, die Normale thut dies in $N_a$ und $N_b$. Ein Lot, von einem variabeln Punkte $R$ der Tangente auf dessen Polare gefällt, schneidet die Normale in $R_1$. Die Einhüllende von $RR_1$ ist eine Parabel $(P)$, eingeschrieben in das Viereck $T_a T_b N_a N_b$, und $\mu$ ist der Berührungspunkt der Normale $N_a N_b$ an die Parabel nach einem Satze von Brianchon. Die Betrachtung dieser Figur führt noch zu manchen Eigenschaften, u. a. zu manchen Constructionen des Krümmungsmittelpunkts nach Mannheim und zu einem Satze von Ribaucour. H.

---

E. Catalan. A propos d'une note de M. Servais. Belg. Bull. (3) XXIII. 500-507.

Die Note enthält einen Beweis des Reiss'schen Satzes für den Fall der Kegelschnitte, eine Eigenschaft der Flächen zweiter Ordnung und einen Beweis eines Ribaucour'schen Satzes bezüglich der Krümmung bei den Kegelschnitten. Dml. (Lp.)

---

Ph. Molenbroek. Sur le produit des axes principaux des coniques touchant trois ou quatre droites données. Mathesis (2) II. 33-39.

Betreffs aller einem Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnitte, welche dasselbe Axenproduct haben, beweist der Verf., dass der Ort der Pole einer festen Geraden in Bezug auf diese Kegelschnitte eine Curve dritter Ordnung ist, und dass die Einhüllende der Polaren eines festen Punktes in Bezug auf die nämlichen Kegelschnitte eine Curve sechster Klasse ist. Danach sucht er als Anwendung der Formeln, welche er gewonnen hat, die grösste, einem als convex vorausgesetzten Vierecke einbeschriebene Ellipse. Dml. (Lp.)

---

Audibert. Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation de 1891. Nouv. Ann. (3) XI. 436-440.

Zwei Kegelschnitte sind um zwei Vierecke beschrieben, die eine gemeinsame Seite haben. Es wird als letztes Resultat eine Gleichung vierten Grades als Bedingung dafür gefunden, dass sie einander berühren. H.

---

E. N. Barisien. Solution analytique de la question de mathématiques proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique en 1892. Nouv. Ann. (3) XI. 441-446, J. de Math. spéc. (4) I. 139-140.

E. N. Barisien. Concours d'admission à l'École Normale Supérieure en 1892. Nouv. Ann. (3) XI. 446-453.

Beide Arbeiten enthalten analytische Bestimmungen specieller

Configurationen von Kegelschnitten, Geraden und Kreisen nebst Untersuchung mannigfaltiger, sich an ihnen darbietender Fragen.

H.

---

E. N. BARISIEN. Exercice écrit 59; Notes sur l'exercice 59. J. de Math. spéc. (4) I. 198, 228-233.

Durch einen Punkt $A$ einer Ellipse gehen ausser dem Krümmungskreise in $A$ noch drei andere Krümmungskreise in $B$, $C$, $D$. Nach Steiner und Joachimsthal liegen die vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ auf einem und demselben Kreise, und der Schwerpunkt des Dreiecks $B$, $C$, $D$ liegt im Mittelpunkte $O$ der Ellipse. Beschreibt $A$ die Ellipse, so ist der Ort des Umkreiscentrums $\omega$ von $BCD$ eine Ellipse. Die drei Normalen in $B$, $C$, $D$ gehen durch einen und denselben Punkt $P$, und der Ort desselben ist eine Ellipse; ferner ist $OP = 2\,O\omega$. Die dem Punkte $P$ entsprechende Apollonische Hyperbel umhüllt eine Kreuzcurve. Die Seiten von $BCD$ umhüllen eine Ellipse, und die Summe der Quadrate der Seiten von $BCD$ ist constant. — Modificationen dieser Sätze für die Parabel.

Lp.

---

G. MÉTÉNIER. Agrégation des sciences mathématiques (Concours de 1891). J. de Math. spéc. (4) I. 10-18.

Aufgaben über die beiden Kegelschnittscharen, welche durch zwei feste Punkte $P$ und $Q$ gehen, und von denen die einen die Seite $CA$ des Bezugsdreiecks in $A$, die anderen $CB$ in $B$ berühren.

Lp.

---

E. N. BARISIEN. Concours d'admission à l'École Normale Supérieure en 1891; Solution. Nouv. Ann. (3) XI. 394-403.

MALO. Solution de la question de mathématiques proposée au concours d'admission à l'École Normale Supérieure en 1891. Nouv. Ann. (3) XI. 75-77.

Sind $P$ und $Q$ die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte $M$ an eine Ellipse gezogenen Tangenten, so schneidet der durch $M$, $P$, $Q$ gelegte Kreis die Ellipse in zwei weiteren Punkten

$P'$ und $Q'$ und geht durch den Schnittpunkt $M'$ der Ellipsentangenten in $P'$ und $Q'$. Ferner liegen $M$, $M'$ und die reellen oder imaginären Brennpunkte auf einem Kreise. Sind $J$, $J''$, $J'$ bez. die Nebenecken und der Diagonalenschnittpunkt des vollständigen Vierecks $PQP'Q'$, und lässt man die Ellipse unter Beibehaltung ihrer Brennpunkte variiren, so beschreibt $J$ (Schnittpunkt von $PQ$ und $P'Q'$) eine Gerade, $J'$ und $J''$ Curven dritter Ordnung. Endlich ist jeder durch $J'$ und $J''$ gehende Kreis orthogonal zu dem Kreise mit dem Durchmesser $MM'$. Dies alles wird von Barisien mittels rechtwinkliger Coordinaten bewiesen, von Malo durch Specialisirung allgemeinerer Sätze und Betrachtungen projectivischer Natur. Schg.

---

C. A. Laisant. Solution de la composition de mathématiques donnée au concours d'admission à l'École Polytechnique en 1892. Nouv. Ann. (3) XI. 262-265.

E. N. Barisien. Extrait d'une lettre à M. Rouché. Ibid. 330-331.

In ersterer Schrift wird nach der Methode der Aequipollenzen, in letzterer einfacher analytisch bewiesen, dass eine gleichseitige Hyperbel auf zwei rechtwinkligen Secanten von deren Schnittpunkt aus Stücke begrenzt, deren Producte einander gleich sind. H.

---

Larose. Autre solution. Nouv. Ann. (3) XI. 266-267.

Die Einhüllende zweier von zwei Kegelschnitten harmonisch geteilten Geraden ist ein Kegelschnitt, welcher die acht Tangenten an jene zwei Kegelschnitte in ihren vier Schnittpunkten berührt. H.

---

R. Guimarães. Sur trois normales spéciales à l'ellipse. S. M. F. Bull. XX. 19-20.

R. Guimarães. Sobre a normal á ellipse. Teixeira J. XI. 55-58.

Bestimmung einiger Punkte der Ebene einer Ellipse, von denen aus sich mit Leichtigkeit eine Normale an diese Curven ziehen lässt. Tx. (Lp.)

---

R. Guimarães. Nota sobre la construcción de una normal á una elipse. Progreso mat. II. 19, 119-120.

1) Durch Punkte, deren Abstände vom Mittelpunkte $a+b$ oder $a-b$ sind, an die Ellipse Normalen zu ziehen. 2) Auf dem Kreise vom Halbmesser $a-b$ um den Mittelpunkt der Ellipse giebt es einen Punkt, dessen Normale durch den Punkt grösster Abweichung zwischen Normale und Ellipsenradius geht. Tx. (Lp.)

---

L. Ravier. Note sur une construction du centre de courbure de l'ellipse. Nouv. Ann. (3) XI. 324-326.

Die Ellipse wird als Projection eines Kreises betrachtet, der Krümmungsmittelpunkt als Coincidenzpunkt der Normale durch Proportion gefunden. H.

---

A. Mannheim, Barisien, L. Loucheur, E. Valdès. Solution de la question 1621. Nouv. Ann. (3) XI. 14*-19*.

Die Summe der Quadrate der Axen einer Ellipse, welche mit einer gegebenen Ellipse concentrisch ist, sie doppelt berührt und durch ihre Brennpunkte geht, ist constant (Satz, von Hrn. Mannheim aus der Cavalierperspective einer Kugel gefolgert). Lp.

---

O. Schlömilch. Notiz über Ellipsensehnen. Hoffmann Z. XXIII. 250-251.

Erledigt einen sehr einfachen Fall der Aufgabe, durch einen Punkt in der Ebene einer Ellipse die grösste oder die kleinste Ellipsensehne zu legen. Lp.

---

H. Brocard, A. Schiappa Monteiro. Cuestión núm. 52. Progreso mat. II. 233-239, 276-278.

Die von Hrn. Brocard gestellte und von ihm und Hrn. Monteiro gelöste Aufgabe lautet: Man giebt zwei rechtwinklige Geraden $OA$, $OB$ und einen Punkt $C$, durch den man eine variable Secante $ACB$ legt. Man beschreibt den Kreis, welcher $AB$ zum

Durchmesser hat. 1) Man ziehe die Sehne $MCN$ senkrecht zu $AB$ und bestimme den Ort der Punkte $M$, $N$. 2) Man ziehe in $B$ die Tangente und projicire auf dieselbe die Punkte $M$, $N$ in $S$, $T$; den Ort der Punkte $S$, $T$ zu finden. Lp.

---

W. Panzerbieter. Ueber einige Lösungen des Trisections-Problems mittels fester Kegelschnitte. Pr. Falk-Realgymn. Berlin 25 S. 4°.

Bericht auf S. 596 dieses Bandes.

---

B. Sollertinsky. Sur l'intersection des paraboles. J. de Math. spéc. (4) I. 103-105.

Ueber die Schnittpunkte zweier Parabeln, besonders, wenn die letzteren sich so bewegen, dass die Axen sich in sich selbst verschieben, werden einige Sätze abgeleitet. Als Beispiel diene folgender: Wenn zwei unveränderliche Parabeln, jede in der Richtung ihrer Axe, sich so bewegen, dass die Mitte des Abstandes ihrer conjugirten Durchmesser eine Gerade durchläuft, so beschreiben die vier Durchschnittspunkte dieser Parabeln einen Kegelschnitt mit Mittelpunkt. Dabei nennt der Verfasser zwei Durchmesser der beiden Parabeln conjugirt, wenn die Tangente in dem Endpunkte des einen Durchmessers dem anderen parallel ist. Gz.

---

M. d'Ocagne. Sur la construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe donnée. Nouv. Ann. (3) XI. 326-330.

Die Aufgabe, die osculirende Parabel zu construiren, wird zunächst auf die zurückgeführt, eine Parabel zu construiren, wenn von ihr ein Punkt, der darin beginnende Durchmesser und der ihm entsprechende Krümmungsmittelpunkt gegeben sind. Letztere an sich leichte Aufgabe wird dann auf Grund dreier vorher bewiesenen Sätze gelöst. H.

---

LEMAIRE. Sur le centre de courbure de la parabole. Nouv. Ann. (3) XI. 98-99.

Geht ein Kreis durch den Scheitel der Parabel, berührt sie in $A$ und schneidet sie in $B$, so geht die Normale in $B$ durch den Krümmungsmittelpunkt für $A$. Hieraus ergiebt sich ein Constructionsverfahren für den Krümmungsmittelpunkt. H.

---

H. BROCARD. Solution de la question 1545. Nouv. Ann. (3) XI. 4*-10*.

Von einem beweglichen Punkte eines Parabeldurchmessers fälle man die drei Normalen auf die Curve und ziehe die Tangenten in den drei Fusspunkten. Dann liegen die Ecken aller Tangentendreiecke auf einer gleichseitigen Hyperbel. Alle diese Dreiecke haben einen gemeinsamen Höhenschnitt. Die Feuerbach'schen Kreise dieser Dreiecke gehen durch den Scheitel der Parabel. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einem und demselben Durchmesser. Bei drei beliebigen Punkten der Parabel liegt der Höhenschnitt des Tangenten- und des Normalen-Dreiecks auf einem und demselben Durchmesser. (Zum Beweise vorgelegt von Hrn. Chaulliac.) Lp.

---

J. PEVELING. Das System confocaler Parabeln, die eine Strecke harmonisch teilen. Pr. (Nr. 468) Realsch. Aachen. 21 S. 4°.

Unter confocalen Parabeln werden hier solche verstanden, die den einen Brennpunkt, der im Endlichen liegt, gemein haben. Nach einleitenden Betrachtungen über Kegelschnittsbüschel und Verallgemeinerung derselben wird zuerst die Einhüllende aller Parabeln, die den einen Brennpunkt $F$ gemein haben und eine gegebene Strecke $A_1A_2$ harmonisch teilen, gesucht. Es ist dies ein Kegelschnitt, der von den in $F$ auf $FA_1$ und $FA_2$ errichteten Senkrechten berührt wird; er hat $A_1A_2$ und die Mittelsenkrechte von $A_1A_2$ zu Axen. Dieser Kegelschnitt wird dann genauer discutirt; und besondere Fälle werden in Betracht gezogen. Hierauf wird die Einhüllende der Scheiteltangenten desselben Systems von

Parabeln gesucht; diese Aufgabe lässt sich leicht auf die erste zurückführen und ergiebt auch einen Kegelschnitt. Es folgt dann die Aufsuchung der Einhüllenden der Parabeln des Systems; diese ist die negative Fusspunktcurve der Einhüllenden der Scheiteltangenten der Parabeln desselben Systems, bezogen auf den gemeinsamen Brennpunkt als Pol. Dann wird der Ort aller Scheitelpunkte der Parabeln des Systems gesucht, welcher die (positive) Fusspunktcurve der Scheiteltangenten der Parabeln desselben Systems ist, auf den gemeinsamen Brennpunkt als Pol bezogen. Diese Curve ist vierter Ordnung und wird nun näher bestimmt; dagegen ist die Einhüllende der Parabeln des Systems vierter Klasse, und auch diese wird genauer untersucht. Mz.

---

P. Muth. Ueber Covarianten ebener Collineationen.
Math. Ann. XL. 89-98.

Durch eine ebene Collineation $f(x, y) = 0$ wird jedem Punkte $\xi$ der Ebene ein bestimmter Kegelschnitt $K$ zugeordnet, nämlich der Ort des Punktes $x$, dessen Verbindungslinie mit seinem homologen Punkte stets durch $\xi$ hindurchgeht.

Die Gesamtheit dieser Kegelschnitte $K$ bildet ein Netz, das, wie Burmester und Schnell gezeigt haben, in der Kinematik eine Rolle spielt: während sich dort aber die Untersuchung des Netzes wesentlich auf die Doppelelemente der Collineation stützt, macht sich der Verf. davon frei. Als Haupthülfsmittel dienen ihm dazu gewisse Covarianten-Identitäten, die zum Teil schon von Pasch aufgestellt waren.

So ergiebt sich z. B. der einfache Satz, dass das Netz von $f$ mit dem Netze von $f^2$ (d. i. der einmaligen Wiederholung von $f$) identisch ist.

Insbesondere wird noch auf die Gesamtheit (d. i. ein Netz) der mit $f$ covariant verknüpften Collineationen eingegangen. Alle diese Collineationen besitzen dasselbe Netz von Kegelschnitten $K$.

Interessante geometrische Anwendungen lassen sich auf perspectivische Dreiecke und Vierecke machen, wodurch Sätze von Pasch und Keller verallgemeinert werden. My.

---

G. Battaglini. Intorno ad una serie di linee di 2° grado. Napoli Rend. (2) VI. 24-33.

Es wird die bei Variation eines Parameters $\lambda$ durchlaufene Schar confocaler Linien zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

für die Relation

$$a^2 = \frac{a'^2\alpha' - a''^2\alpha''\lambda}{\alpha' - \alpha''\lambda}; \quad b^2 = \frac{b'^2\beta' - b''^2\beta''\lambda}{\beta' - \beta''\lambda}$$

untersucht und daran zahlreiche Beobachtungen gemacht (vergl. das folgende Referat). H.

G. Battaglini. Intorno ad una serie di linee di 2° grado. Batt. G. XXX. 287-299.

Die fragliche Kegelschnitt-Serie umfasst das System confocaler Kegelschnitte als speciellen Fall, denn die einzelnen Curven $(S)$ haben denselben Mittelpunkt sowie dieselbe Axenrichtung, und die Axenquadrate sind Brüche, deren Zähler und Nenner lineare Functionen eines Parameters sind. Alle Curven $(S)$ besitzen eine Einhüllende vierter Ordnung, welche in zwei Kegelschnitte zerfällt, deren jeder jede Curve $(S)$ doppelt berührt. Durch jeden Punkt der Ebene schickt das System zwei Curven $(S)$; diese beiden sind confocal, wenn der Punkt einem gewissen Kreise angehört. Jede Gerade der Ebene berührt zwei Curven $(S)$; der Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf alle Curven $(S)$ ist ein Kegelschnitt (vergl. das vorangehende Referat). R. M.

---

E. Study. Ueber Systeme von Kegelschnitten. Math. Ann. XL. 563-578.

Der Verfasser betrachtet das allgemeinste Kegelschnittsystem, das durch eine Gleichung vom Grade $l'$ zwischen den Coefficienten der Kegelschnittgleichung dargestellt wird. Bezeichnet $(LX)^2$ eine ternäre quadratische Form, $(U\Lambda)^2$ ihre quadratische Covariante und $J$ ihre Invariante, so nimmt der Ausdruck, durch dessen Nullsetzen das System definirt ist, die Gestalt

$$\Sigma J^k[(LP)^2]^i[(B\Lambda)^2]^{i'}$$

an, wo die Summe über alle von einander verschiedenen Wertsysteme der Zahlen $j$, $j'$, $k$ zu erstrecken ist, welche der Bedingung $j+2j'+3k = l'$ genügen, und wo $P$, $B$ neue Symbole sind. Nach der Definition der Verfassers hat nun das Kegelschnittsystem die Charakteristiken $\lambda = l'-2\lambda'$, $\lambda'$, wenn der obige Ausdruck keinen Factor $J$ hat und überdies genau die Potenz $t^{\lambda'}$ als Factor bekommt, sobald man in demselben an Stelle von $(LX)^2$ die Form $(VX)^2+t(KX)^2$ einsetzt; dabei bedeutet $(VX)$ eine beliebige Linearform und $(KX)^2$ einen beliebigen Kegelschnitt mit unbestimmten Coefficienten. Der Kern der Betrachtung besteht nun darin, zu zeigen, dass der dualistisch entsprechende Begriff für ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken $\lambda$, $\lambda'$ ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken $\lambda'$, $\lambda$ ist, d. h. dass die Zahlen $\lambda$, $\lambda'$ einfach ihre Rolle wechseln, wenn man nicht $(U\mathcal{A})^2$ als Covariante von $(LX)^2$ auffasst, sondern umgekehrt $(LX)^2$ als Covariante von $(U\mathcal{A})^2$.

Es folgen Anwendungen dieses Ergebnisses auf besondere Kegelschnittsysteme und auf die Theorie der Fläche $F_2^4$, die bei der Abbildung der Curven zweiter Klasse in der Ebene auf die Punkte eines linearen Raumes $R_5$ den Punkten der Ebene entspricht.

Ht.

---

## D. Andere specielle Curven.

F. Prime. Contribution à l'étude des cubiques. J. de Math. spéc. (4) I. 3-7, 25-30, 49-50, 73-77.

Ueber die Arbeit der Frau Prime lässt sich nicht eingehend berichten, ohne den Raum über Gebühr zu überschreiten. Es sei nur über die angewandte Methode bemerkt, dass die Beweise für die mitgeteilten Sätze vermittelst der Anwendung der barycentrischen Coordinaten geliefert werden. Ein wichtiges Hülfsmittel bildet zugleich die von Hrn. de Longchamps zuerst im Jahre 1886 dem Congress der Association française pour l'avancement des sciences mitgeteilte momentane homographische Transformation, welche ge-

stattet, die Resultate sowohl im System der normalen als auch der barycentrischen Coordinaten auszusprechen. Gz.

---

A. Cayley. On the non-existence of a special group of points. Messenger (2) XXI. 132-133.

Bekanntlich geht jede kubische Curve, die durch acht beliebige Punkte einer Ebene gelegt wird, auch noch durch einen festen neunten Punkt. In der vorliegenden Note bringt der Verf. heraus: es giebt kein System von sieben solchen Punkten, dass jede durch sie gelegte kubische Curve auch noch durch einen festen achten Punkt geht. Glr. (Lp.)

---

Moutard. Sur les courbes du troisième degré. Nouv. Ann. (3) XI. 113-115.

Es wird das Problem gelöst: zwei Büschel von je drei zusammenlaufenden Geraden zu finden, deren neun gemeinsame Punkte auf einer gegebenen Curve dritten Grades liegen. H.

---

H. Sporer. Ueber das Steiner'sche Schliessungsproblem bei Curven dritter Ordnung. Böklen Mitt. V. 84-88.

Das im Titel genannte Schliessungsproblem ist ausser von Steiner auch von Clebsch (J. für Math. LXIII. 94), Küpper (Math. Ann. XXIV. 1), Schoute (J. für Math. XCV. 105), Eberhard (Schlömilch Z. XXXII. 65), Schröter (Theorie der ebenen Curven dritter Ordn. S. 256) behandelt. Hier wird eine Verallgemeinerung desselben bewiesen, nämlich: Auf einer Curve dritter Ordnung giebt es stets vier $(2n+1)$-Ecke, deren Ecken auf der Curve liegen, und deren Seiten ausserdem durch $2n+1$ auch auf der Curve liegende Punkte gehen. Dagegen giebt es im allgemeinen kein $2n$-Eck, das einer solchen Curve einbeschrieben ist, und dessen Seiten durch beliebig gewählte, aber feste Punkte der Curve gehen; giebt es aber ein einziges solches $2n$-Eck, so giebt es deren unzählig viele, indem dann jeder Punkt der Basis Ecke eines solchen ist. Scht.

---

P. Serret. Sur une série récurrente de pentagones, inscriptibles à une même courbe générale du troisième ordre, et que l'on peut construire par le seul emploi de la règle. C. R. CXV. 406-408, 436-438.

Werden die Punkte 1', 2', 3', 4', 5' bestimmt, in denen die Seiten eines ebenen Fünfecks die ihnen gegenüber liegenden Diagonalen schneiden, ferner die analogen Punkte des Fünfecks 1' 2' 3' 4' 5' u. s. f., so liegen die Eckpunkte dieser Fünfecke auf einer Curve dritter Ordnung, die von den Strahlen 11', 22' u. s. f. berührt wird. Js.

---

Clifford, Nash. Solution of question 11259. Ed. Times LVIII. 49-50.

Wenn ein Sechseck einer kubischen Curve so eingeschrieben werden kann, dass die erste, dritte, fünfte Seite durch einen festen Punkt $a$ der Curve gehen, ebenso die zweite, vierte, sechste durch einen zweiten festen Punkt $b$, so kann man, falls $a$ gegeben wird, acht Lagen von $b$ finden, die sich durch lineare Construction ergeben, wofern die Wendepunkte bekannt sind. Lp.

---

Cl. Servais. Sur les coniques osculatrices dans les courbes du troisième ordre. Belg. Bull. (3) XXIII. 522-527.

C. le Paige. Rapport. Ibid. 456.

Diese Note beruht auf der folgenden Bemerkung: Ist $A$ ein beliebiger Punkt einer kubischen Curve, so entspricht diese Curve sich selbst bei der birationalen quadratischen Transformation dritter Art (vergl. Mathesis VII. 110, F. d. M. XIX. 1887. 856), welche den Punkt $A$ zum Pole hat und als Fundamentalkegelschnitt den Polarkegelschnitt des Punktes $A$ bezüglich der kubischen Curve besitzt. Dml. (Lp.)

---

M. d'Ocagne. Sur la construction des cubiques cuspidales par points et tangentes. Nouv. Ann. (3) XI. 386-394.

Bezeichnet $J$ den Wendepunkt, $R$ die Spitze einer ebenen

Curve dritter Ordnung dritter Klasse und $T$ den Schnittpunkt der Tangenten in beiden Punkten, $P$ einen beliebigen Punkt der Curve, $p$ dessen Tangente, $S$ den Schnittpunkt derselben mit $JT$, $U$ den Schnittpunkt von $RP$ mit $JS$, so ist immer das Doppelverhältnis $\frac{TJ}{TU}:\frac{SJ}{SU}=-\frac{1}{2}$. An diesen Satz, den der Verfasser schon im S. M. F. Bull. XIX (F. d. M. XXIII. 1891. 681) aufgestellt hatte, werden einige naheliegende Folgerungen und Constructionen angeknüpft, die sich auf die Curve dritter Ordnung dritter Klasse bei gegebenem Fundamental-Dreieck $JRT$ beziehen. Scht.

---

S. Mangeot. Sur la construction des tangentes aux cubiques à point double. J. de Math. spéc. (4) I. 217-219.

Nimmt man in der Ebene der als unzerlegbar angenommenen Curve dritter Ordnung drei Strahlen $A$, $B$, $C$ parallel zu ihren als bekannt vorausgesetzten Asymptotenrichtungen an, von denen jedoch mindestens einer nicht selbst eine Asymptote ist, bezieht man ferner diese Linien auf zwei Coordinatenaxen, und sind $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ die Gleichungen der Geraden $A$, $B$, $C$, so lässt sich die Gleichung der Curve dritter Ordnung in die Form $\alpha\beta\gamma+U=0$ setzen, wo $U$ eine Function zweiten Grades bedeutet. $U=0$ definirt einen Kegelschnitt, der durch die sechs Schnittpunkte der Curve dritter Ordnung mit den Geraden $A$, $B$, $C$ geht. Die Construction der Tangente in einem beliebigen Punkte $M$ der Curve dritter Ordnung lässt sich auf die der Polaren dieses Punktes $M$ in Bezug auf den Kegelschnitt $U=0$ zurückführen. Gz.

---

L. Berzolari. Sulla curva del terz' ordine dotata di un punto doppio. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1025-1036.

Von der Jolles'schen Theorie der Osculanten ausgehend, hat schon W. Stahl (J. für Math. CIV) auf der rationalen ebenen Curve $R_3$ eine bemerkenswerte kubische Involution der Betrachtung unterworfen. Sämtliche Osculanten-Kegelschnitte sind dem Dreieck der Inflexions-Tangenten einbeschrieben und berühren die $R_3$ in

je einem Punkte. Je drei dieser Osculanten haben paarweise eine weitere gemeinsame Tangente, und diese drei Geraden treffen sich in einem Punkte. Je drei Punkte der $R_3$, welche dergestalt zu demselben Punkte $Z$ der Ebene führen, bilden die Stahl'sche Involution; zu ihr ist conjugirt diejenige der Punktetripel, welche mit $Z$ in gerader Linie liegen.

In jedem Punkte der $R_3$ lässt sich ein Kegelschnitt construiren, der daselbst vierpunktig berührt und ausserdem durch den Doppelpunkt geht; sämtliche Kegelschnitte dieser Art bilden ein System, von dem je vier durch jeden Punkt $Z$ gehen. Die Stahl'sche Involution ist aus den ersten Polargruppen der Berührungspunkte der vier eben erwähnten Kegelschnitte zusammengesetzt (F. d. M. XXIII. 1891. 749). In derselben Beziehung steht die conjugirte Involution zu den vier Berührungspunkten solcher vier Kegelschnitte, die dem Dreieck der Inflexionstangenten umbeschrieben sind, $R_3$ einfach berühren und durch $Z$ gehen. R. M.

---

H. Willig. Einfache Constructionen der rationalen Curven dritter Ordnung. Pr. (Nr. 639) Mainz. 23 S. 4°.

Der Verfasser erklärt zuerst eine quadratische Verwandtschaft, welche die Grundlage für die folgenden Constructionen bildet. In einer Ebene seien drei feste Punkte $O_1$, $O'_1$, $O_2$ und eine feste Gerade $g$ gegeben; dann erhält man für einen beliebigen Punkt $P'$ den zugeordneten, wenn man $P'O_1$ und $P'O'_1$ zieht, hierauf den Schnittpunkt ($Q$) von $g$ und $P'O_1$ mit $O'_1$ verbindet und den Punkt $P$ sucht, in welchem $P'O_1$ von $Q'O'_1$ geschnitten wird; dann ist $P$ dem Punkte $P'$ zugeordnet, und in gleicher Weise würde $P'$ dem Punkte $P$ zugeordnet sein. Dies wird nun analytisch behandelt; die angegebene Figur wird auf ein System rechtwinkliger Coordinatenaxen $OX$, $OY$ bezogen; sind dann $(x, y)$ die Coordinaten von $P$ und $(x', y')$ diejenigen von $P'$, so kommt man zu den Gleichungen $x = \frac{Z'_1}{Z'_3}$, $y = \frac{Z'_2}{Z'_3}$, wo $Z'_1$, $Z'_2$, $Z'_3$ quadrati-

sche Functionen von $(x', y')$ sind; und analog hat man $x' = \frac{Z_1}{Z_3}$, $y' = \frac{Z_2}{Z_3}$.

Diese Substitutionen werden dann noch auf eine andere, mehr symmetrische Form gebracht durch Einführung homogener Coordinaten $X_1, X_2, X_3$ für ein Dreieck $O_1 O_2 O_3$ und $X'_1, X'_2, X'_3$ für ein Dreieck $O'_1 O'_2 O'_3$, wo sie dann lauten:

$$X_1 : X_2 : X_3 = \frac{1}{X'_1} : \frac{1}{X'_2} : \frac{1}{X'_3}.$$

Nach einer kurzen allgemeineren Betrachtung werden diese Substitutionen dann verwandt, um rationale Curven dritter Ordnung mittels der Kegelschnitte zu construiren. Daran schliesst sich eine ziemlich ausführliche Discussion der möglichen Fälle, und es folgen die Gleichungen der einzelnen Species der rationalen Curven dritter Ordnung. Mz.

---

Astor. Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre. Nouv. Ann. (3) XI. 276-288.

Es wird der Satz bewiesen: Wenn in einer unicursalen kubischen Curve die Tangenten im Doppelpunkt und zwei asymptotische Richtungen einen harmonischen Büschel bilden, so wird die polare Schar eines variablen Punktes der kubischen Curve von einer Parabel eingehüllt, welche dem Winkel der Tangenten in den Punkten, wo sie von den Geraden der Inflexionen geschnitten werden, einbeschrieben ist. Die weitere Betrachtung fügt hinzu, dass die Mitte jener Sehne dabei eine Parallele mit der dritten Asymptote, ausgehend vom Doppelpunkt, beschreibt, und dass im genannten Falle der Doppelpunkt ein Brennpunkt ist, und die Tangenten daselbst rechtwinklig zu einander sind. H.

---

J. Tesař. Ueber ein Paar unicursaler Degenerirungscurven dritter Ordnung des Normalenproblems und das Normalenproblem einer confocalen Kegelschnittschar. Wien. Ber. CI. 1248-1268.

Confocale Kegelschnitte bestimmen mit einem Punkte $P$ ihrer Ebene eine Hyperbel und einen zu ihnen projectiven Kreisbüschel von der Beschaffenheit, dass jeder seiner Kreise die erstere in Punkten schneidet, die, mit $P$ verbunden, Normalen des entsprechenden Kegelschnittes liefern. Zu den Curven, von deren Punkten aus Normalen mit Hülfe von Zirkel und Lineal an einen Kegelschnitt gezogen werden können, gehören zwei rationale Curven dritter Ordnung, deren Construction und Verlauf ausführlich besprochen wird. Js.

---

A. Andreasi. Studio analitico delle tre cubiche cicliche. Batt. G. XXX. 241-286.

Ein Kreisbüschel und ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel auf der Centrallinie des ersteren liegt, werden so auf einander bezogen, dass jedem Strahl der von ihm berührte Kreis entspricht. Die entstehende Curve dritter Ordnung weist, je nach der Lage des Scheitels zu den Basispunkten, dreierlei Typen auf. Die Arbeit giebt eine ausführliche Discussion dieser Curven und Zusammenstellung ihrer Eigenschaften, wobei auch die Transformation durch reciproke Radien berücksichtigt wird. Zu Grunde gelegt sind cartesische und Polar-Coordinaten. Schg.

---

A. Laisant. Propriétés des paraboles du 3me degré. Instituto de Coimbra XL.

Der Verf. stellt einige Beziehungen zwischen den Strecken auf, welche man erhält, wenn man die Curve

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3$$

durch gerade Linien schneidet. Tx. (Lp.)

---

C. Segre. Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane. Annali di Mat. (2) XX. 237-242.

In den „Memorie di Geometria“ von Ettore Caporali (Napoli, Pellerano, 1888) finden sich einige Bruchstücke der „Theorie der ebenen Curven vierter Ordnung“. Um das Studium dieser Bruch-

stücke zu erleichtern, veröffentlicht der Verf. dieser Mitteilung zwei von Caporali an ihn gerichtete Briefe. Aus ihnen ergiebt sich deutlich die Reihenfolge der Gedanken, welche Caporali zu der Untersuchung der ebenen Curven vierter Ordnung geführt hatten.

Es sei ein lineares System $S$ von Kegelschnitten, von $k$ Dimensionen, und in diesem ein quadratisches System $\Sigma$ von $k-1$ Dimensionen gegeben. Zwischen den Kegelschnitten von $S$ und den linearen Systemen von $k-1$ Dimensionen (von $S$) kann man die Polarität in Bezug auf $\Sigma$ bestimmen. Durch jeden Punkt der Ebene geht dann ein System $\infty^{k-1}$ Kegelschnitte von $S$, welchem ein Kegelschnitt $C$ desselben Systems $S$ entspricht (durch Polarität in Bezug auf $\Sigma$). Jedem Punkte ist also ein Kegelschnitt $C$ „conjugirt"; der geometrische Ort der Punkte, durch welche die conjugirten Kegelschnitte gehen, ist eine Curve der vierten Ordnung.

In dem zweiten Briefe spricht Caporali von seinen Versuchen, die specielle Curve vierter Ordnung zu studiren, von welcher er der Akademie von Neapel („Sopra una certa curva del 4° ordine", Rend. Acc. Napoli 1882) eine vorläufige Mitteilung gemacht hatte. Schliesslich teilt er dann mit, dass er eine sehr allgemeine Formel gefunden habe, welche, wenn eine beliebige Anzahl von Mannigfaltigkeiten mit einer beliebigen Anzahl von Dimensionen gegeben ist, die fundamentalen Singularitäten der ihnen gemeinsamen Mannigfaltigkeit liefert, wenn diese einfach ist, oder die Beziehungen zwischen den Singularitäten der beiden Teile, wenn diese geteilt ist.

Hau.

E. Ciani. Sopra due curve invariantive di una quartica piana. Annali di Mat. (2) XX. 257-268.

Clebsch hat in seiner Abhandlung: „Ueber die Curven vierter Ordnung" (J. für Math. LIX) zwei wichtige invariante Curven einer ebenen Curve vierter Ordnung untersucht, welche er als Covariante $S$ und Contravariante $\psi$ bezeichnet. Das Ziel dieser Arbeit ist, die Plücker'schen Charakteristiken dieser beiden Curven zu bestimmen.

Der Verf. findet für $S$ und $\psi$ die folgenden charakteristischen Zahlen:

| | $S$ | $\psi$ |
|---|---|---|
| Ordnung | 4 | 30 |
| Klasse | 12 | 6 |
| Doppelpunkte | 0 | 396 |
| Spitzen | 0 | 72 |
| Wendepunkte | 24 | 0 |
| Doppeltangenten | 28 | 0. |

Der Verf. benutzt zugleich die Gelegenheit, um einen von Clebsch und einigen späteren Autoren begangenen Irrtum aufzudecken. Clebsch glaubte schliessen zu können, dass die Contravariante $\psi$ nichts anderes ist, als die Enveloppe aller derjenigen Geraden, welche die Curve vierter Ordnung harmonisch schneiden. Caporali („Volume delle memorie", S. 348 No. 39) fand in einem speciellen Falle, dass dieser Schluss nicht richtig ist; der Verf. dieser Arbeit beweist allgemein die Unrichtigkeit der von Clebsch aufgestellten Behauptung. Hau.

---

E. Pascal. Sulle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 385-390.

E. Pascal. Ricerche sugli aggruppamenti formati colle 315 coniche coordinate alla curva piana generale di 4° ordine. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 417-423.

E. Pascal. Sugli aggruppamenti tripli di coniche coordinate alla quartica piana. Rom. Acc. L. Rend. (5) $II_1$. 8-14. (1893).

Die 56 Berührungspunkte der 28 Doppeltangenten der allgemeinen ebenen Curve vierter Ordnung lassen sich in Gruppen von je acht anordnen, so dass die acht Punkte jeder Gruppe die Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes mit der Curve der vierten Ordnung bilden. Solcher Kegelschnitte giebt es 315. Der Verf. steckt sich in diesen Arbeiten das Ziel, die „Configuration dieser 315 der $C_4$ zugeordneten Kegelschnitte" zu studiren. Dazu benutzt er die zwischen den Doppeltangenten und den Charakteristiken

vom Geschlechte 3 bestehende Beziehung und die geometrische Darstellung solcher Charakteristiken mittels der 28 Geraden, welche je zwei der acht Fundamentalpunkte verbinden. Ausserdem verwendet der Verf. die Resultate, welche er in einer früheren Arbeit: „Rappresentazione geometrica delle caratteristiche di genere tre e di genere quattro e loro gruppi di sostituzioni“ (Annali di Matematica, vol. XX; Bericht in diesem Bande, Abschnitt VII, S. 468) erhalten hat.

Zunächst untersucht der Verf. die verschiedenen Arten von Paaren und Ternen, welche aus diesen 315 Kegelschnitten gebildet werden können, und entwickelt die geometrischen Eigenschaften der verschiedenen Arten.

Die Untersuchung der Paare von Kegelschnitten, welche „sich nicht in irgend einem Punkte der Curve vierter Ordnung schneiden“, war schon früher von Hrn. Nöther (Math. Ann. XV. 89) beiläufig gemacht, wie der Verf. selbst am Ende der dritten Mitteilung bemerkt.

Weiter verbreitet sich der Verf. ausführlicher über die Ternen der genannten Kegelschnitte, von denen sich nicht je zwei in irgend einem Punkte der Curve vierter Ordnung schneiden. Er findet, dass neun solcher Ternen existiren, welche durch ausgezeichnete geometrische Eigenschaften charakterisirt sind.

Diese Untersuchungen würden sich noch weiter fortsetzen lassen, und es würde von besonderem Interesse sein, zu ermitteln, wie viele verschiedene Arten Gruppen von sieben Kegelschnitten existiren, welche die Eigenschaft haben, dass sich nicht je zwei von ihnen in einem Punkte der Curve vierter Ordnung schneiden. Es ist klar, dass es keine Gruppen mit dieser Eigenschaft geben kann, welche mehr als sieben Kegelschnitte umfassen. Unter diesen Gruppen mit je sieben Kegelschnitten giebt es, wie der Verf. am Ende der dritten Abhandlung bemerkt, eine besonders interessante, welche die Eigenschaft hat, dass zwei ihrer Kegelschnitte immer einen dritten bestimmen; die diesbezügliche Gleichung hat nämlich kubischen Charakter. Hau.

---

H. M. Jeffery. On the classification of binodal quartic curves. London M. S. Proc. XXIII. 18-48.

Ist $u = 0$ die Gerade, welche die beiden Doppelpunkte verbindet, so kann man die Gleichung der Curve in der Form:

$$u^2(\xi x + \eta y - 1) = x^2 y^2 + u^2(fx^2 + 2gxy + hy^2)$$

ansetzen. Sechs Fälle sind zu unterscheiden, je nachdem $f$ und $h \lesseqgtr 0$ sind. Es werden alle Formen bestimmt, welche aus der Veränderung der Parameter $\xi$, $\eta$ resultiren; sie werden klassificirt nach den kritischen Werten, welche einen dritten Doppelpunkt ergeben, und nach denen, welche Undulationspunkte erzeugen.

R. M.

---

H. W. Richmond. Cuspidal quartics. Quart. J. XXVI. 5-26.

Der Verfasser nimmt zuerst eine ebene Curve $C_4$ vierten Grades, die einen Doppelpunkt hat, wählt diesen Doppelpunkt als Ecke $(x, y)$ eines Dreieckcoordinatensystems $(x, y, z)$ und setzt die Gleichung von $C_4$ demgemäss:

$$z^2 u_2 + 2zu_3 + u_4 = 0,$$

wo $u_2$, $u_3$, $u_4$ homogene Functionen von $x, y$ resp. zweiten, dritten, vierten Grades bedeuten. Durch Einführung des Factors $u_2$ wird die Gleichung geschrieben:

$$(1) \qquad (zu_2 + u_3)^2 = u_3^2 - u_2 u_4.$$

Die rechte Seite von (1), gleich Null gesetzt, ergiebt sechs gerade, durch $(x, y)$ gehende Linien, welche die von $(x, y)$ an $C_4$ gehenden Tangenten sind, während

$$(2) \qquad zu_2 + u_3 = 0$$

die erste Polare des Doppelpunktes $(x, y)$ darstellt, welche eben $C_4$ in den Berührungspunkten jener sechs Tangenten schneidet. Diese Polare ist eine kubische Curve und hat in $(x, y)$ einen Doppelpunkt von derselben Natur wie $C_4$, also im besonderen in $(x, y)$ eine Spitze, wenn dies bei $C_4$ der Fall ist, wie von nun an angenommen wird. Durch besondere Wahl der Axen wird die Gleichung der kubischen Polare $y^3 + zx^2 = 0$, und daher die Glei-

chung von $C_4$: $(y^3+x^2z)^2 = y^6-x^2u_4$, wo noch der fremde Factor $x^2$ da ist. Löst man die rechte Seite in ihre Factoren auf, so kommt:

(3) $$(y^3+x^2z)^2 = (y+ax)(y+bx)(y+cx)(y+dx)(y+ex)(y+fx),$$

wo dann $a+b+c+d+e+f=0$ sein muss. Die Gleichung (3) wird als Normalform der betrachteten $C_4$ gewählt, und demgemäss kürzer geschrieben $U^2 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$. Sind dann $s_2$, $s_3$, $s_4$, $s_5$, $s_6$ die Summen der Producte zu resp. 2, 3, 4, 5, 6 der Grössen $(a, b, c, d, e, f)$, so kann man $x^2$ aus (3) entfernen und schreiben:

$$x^2z^2+2zy^3 = (s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \between y, x)^4.$$

Es wird nun gezeigt, dass die Berührungspunkte der sechs Tangenten $\alpha=0$, $\beta=0$ etc. auf einem Kegelschnitt sind, dessen Gleichung

$$z^2-s_2zy-s_3zx+s_4y^2+s_5yx+s_6x^2=0$$

ist. Dann werden die Gleichungen der 10 Doppeltangenten gefunden; eine dieser Gleichungen ist:

$$2z = (ab+bc+ca+de+ef+fd)y+(abc+def)x.$$

Aus ihren Realitätsverhältnissen werden Schlüsse über die Gestalt der Curve gezogen. Es folgen dann die durch die Spitze von $C_4$ gehenden Kegelschnitte, welche $C_4$ in drei Punkten berühren, und die Kegelschnitte, die sie in vier Punkten berühren. Hieran schliessen sich weitere wichtige und interessante Sätze. Mz.

R. A. Roberts. On certain quartic curves of the fourth class and the porism of the inscribed and circumscribed polygon. London M. S. Proc. XXIII. 202-211.

Ebenen Curven vierter Ordnung mit zwei Spitzen und einem Knotenpunkte lassen sich, wie in London M. S. Proc. XVI nachgewiesen ist, unendlich viele Polygone ein- und umschreiben. Während aber dort nach dem Vorbilde Cayley's die analytisch-geometrische Untersuchungsmethode zu Grunde liegt, wird nunmehr das Problem durch elliptische Integrale gelöst. Js.

E. Oekinghaus. Zur Cassini'schen Linie. Hoppe Arch. (2) XI. 441-442.

Der Verfasser betrachtet eine Cassini'sche Linie, zieht von einem Punkte derselben zwei Focallinien nach den Brennpunkten $\pm c$ und bezeichnet die Winkel, welche sie mit dem Radiusvector vom Mittelpunkt aus bilden, mit $\gamma_1$ und $\gamma_2$. Sind dann $R$ und $\varphi$ die Polarcoordinaten des Punktes $P$ der Cassini'schen Linie, wobei der Mittelpunkt dieser Curve Pol und die Verbindungslinie der Brennpunkte Fundamentalaxe ist, so hat man die Gleichung:

$$\cos(\gamma_1-\gamma_2) = \frac{R^2-c^2\cos 2\varphi}{\sqrt{R^4-2c^2R^2\cos 2\varphi+c^4}},$$

und die Gleichung der Curve lautet:

$$R^4-2c^2R^2\cos 2\varphi+c^4 = q^4.$$

Daraus folgt:

$$q^2\cos(\gamma_1-\gamma_2) = R^2-c^2\cos 2\varphi,$$

auch ist

$$\sin(\gamma_1-\gamma_2) = \frac{c^2}{q^2}\sin 2\varphi.$$

Bezeichnet aber $\beta$ den Winkel zwischen der Normale in $P$ und $R$, so ist:

$$\sin\beta = \frac{c^2\sin 2\varphi}{q^2},$$

woraus folgt $\beta = \gamma_1-\gamma_2$.

Um also die Normale in einem Punkte $P$ der Curve zu construiren, trage man etwa $\gamma_2$ auf $\gamma_1$ ab, und man erhält damit in dem entsprechenden Schenkel des Winkels die gesuchte Normale. Auch die Tangente hat man dann leicht. Es folgen dann noch einige Zusätze. Mz.

---

H. C. Riggs. On Pascal's Limaçon and the Cardioid. Kansas Univ. Quarterly I. 89-94.

Die inverse Curve eines Kegelschnitts in Bezug auf einen Brennpunkt ist die Pascal'sche Schnecke. Aus der Polargleichung eines Kegelschnittes

$$r = \frac{p}{1+e\cos x}$$

folgt als Gleichung der Schnecke:

$$r = \frac{e\cos x}{p} + \frac{1}{p}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich leicht die bekannte Erzeugung der Schnecke als Kreiskonchoide. Auf jeder Sehne $OP$ wird von $P$ aus eine constante Länge nach beiden Seiten abgetragen; und die beiden Endpunkte, die auf jeder solchen Sehne dadurch entstehen, gehören der Schnecke an. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so hat die Schnecke einen isolirten Punkt; ist dieser Kegelschnitt eine Parabel, so tritt statt des isolirten Punktes ein Rückkehrpunkt ein; ist endlich der Kegelschnitt eine Hyperbel, so hat die Schnecke einen Doppelpunkt mit reellen Tangenten. Es wird nun nach bekannter Uebertragung eine ganze Reihe von Lehrsätzen in Bezug auf Kegelschnitte gegeben, wobei Brennpunkte in Frage kommen, und jeder solche Lehrsatz hat ein Analogon bei der Schnecke. Als Beispiel diene:

| | |
|---|---|
| Die Directrix einer Parabel ist der Ort des Durchschnitts von je zwei zu einander senkrechten Tangenten der Curve. | Der Basiskreis an einer Kardioide ist der Ort des Durchschnittes von je zwei zu einander senkrechten Kreisen, die beide die Kardioide berühren und durch den Doppelpunkt gehen. |

Mz.

W. V. Brown. The cartesian oval and related curves as sections of the anchor ring. Annals of Math. VI. 161-162.

Wenn eine Ringfläche, welche durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Axe entsteht, von einem parabolischen Cylinder geschnitten wird, so ist die Projection der Schnittlinie beider Flächen auf eine zur Rotationsaxe senkrechte Ebene ein Cartesisches Oval, eine Pascal'sche Schnecke oder eine Kardioide, je nach der gegenseitigen Lage der beiden Flächen. F.

E. Moecke. Ueber zweiaxig-symmetrische Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. Pr. Gymn. Gross-Strehlitz (Nr. 206). 16 S. 4°.

Bericht in F. d. M. XXIII. 1891. 781.

E. Lampe, G. B. M. Zerr, H. Fortey. Solution of question 11095. Ed. Times LVI. 76-78.

Die Schnittpunkte der Bernoulli'schen Lemniskate $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ mit ihrer Evolute werden durch $21\cos^2 2\varphi = 1$ bestimmt. Mithin ist die Länge des Evolutenbogens innerhalb einer Schleife der Lemniskate gleich $\frac{2}{3}a(\sqrt[4]{21}-1)$. Lp.

F. P. Ruffini. Pedali delle coniche. Bologna Mem. (5) II. 123-132.

Die Fusspunktcurve eines centralen Kegelschnitts

$$ax^2+by^2+c = 0$$

für den Pol $(X, Y)$ hat die Gleichung:

$$(x^2+y^2+Xx+Yy)^2+\frac{c}{a}x^2+\frac{c}{b}y^2 = 0.$$

Sie umhüllt eine Schar von Kegelschnitten:

$$\left(\frac{c}{a}x^2+\frac{c}{b}y^2\right)\lambda^2-2\lambda(x^2+y^2+Xx+Yy)-1 = 0.$$

Diese Kegelschnitte haben sämtlich ihren Mittelpunkt auf der gleichseitigen Hyperbel:

$$2(b-a)xy+bYx-aXy = 0.$$

Die Fusspunktcurve einer Parabel $by^2+2gx = 0$ erweist sich als vom dritten Grade. H.

F. P. Ruffini. Fuochi della pedale d'una conica. Bologna Rend. 1891-92. 60-63.

Im Anschluss an seine Abhandlung: Pedali delle coniche, Bologna Mem. (5) II. 123-132, behandelt der Verfasser nach einer ihm von Hrn. Retali mitgeteilten Methode die Bestimmung der Brennpunkte der Fusspunktcurve eines Kegelschnittes. Vi.

H. Brocard. Le trifolium. Mathesis (2) II, Supplément II (58 S.).

Sonderabdruck aus dem Journal de Math. spéc. (3) V (vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 782). Eine Zusatznote ist in der Mathesis für 1892 S. 74 erschienen. Mn. (Lp.)

H. Brocard. Addition à l'étude du trifolium. J. de Math. spéc. (4) I. 137.

Die Notiz bildet eine Ergänzung zu des Verfassers Mémoire sur le trifolium, S. 40. Gz.

---

J. F. Eberle. Ueber rationale Curven fünfter Ordnung, insbesondere diejenigen vierter und fünfter Klasse. München. J. Lindauer'sche Buchhdlg. (Schoepping). 34 S. Mit 2 Fig.-T. 8°.

Herr Brill (Ueber rationale Curven und Regelflächen. Münch. Ber. 1885. 285) hat gezeigt, dass die allgemeine rationale Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung durch die Schnittpunkte entsprechender Tangenten der rationalen Klassencurven $C^p$ und $C^q$ erzeugt werden kann, wenn

bei ungeradem $n$ $p = \frac{1}{2}(n+1)$, $q = \frac{1}{2}(n-1)$

und

bei geradem $n$ $p = \frac{1}{2}n$, $q = \frac{1}{2}n$

ist. So entsteht also die allgemeine $C_5$ mit sechs Doppelpunkten aus einer $C^3$ und einer $C^2$. Mit diesen so erzeugten Curven $C_5$ beschäftigt sich der Verf. in der vorliegenden Arbeit.

Nachdem er als Einleitung zum ersten Teile die Erzeugung der Curven dritten Grades aus ihren Ordnungscurven näher ins Auge gefasst hat, stellt er dann für die allgemeine $C_5$ eine Reihe von Sätzen auf, von denen folgende erwähnt sein mögen:

„Der Kegelschnitt $C^2$ muss die $C_5$ berühren, wo er sie trifft.“

„Reelle Doppelpunkte entstehen nur ausserhalb der beiden Klassencurven $C^3$ und $C^2$.“

„Durch die beiden Klassencurven $C^3$ und $C^2$ wird die Ebene in vier verschiedene Arten von Feldern zerlegt, in welchen die $C_5$ entweder reelle Punkte und eigentliche Doppelpunkte oder nur isolirte Punkte oder nur einfache reelle Punkte oder gar keine Punkte hat.“

„Ein dreifacher Punkt der $C_5$ kann nur entstehen, wenn der Klassenkegelschnitt in einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung übergeht, dessen Mittelpunkt dann der dreifache Punkt der $C_5$ ist.“

„Haben die beiden Klassencurven drei Tangenten entsprechend

gemeinsam, so zerfällt die $C_5$ in diese drei Geraden und einen Kegelschnitt; haben die beiden Klassencurven vier Tangenten entsprechend gemein, so besteht die $C_5$ aus fünf Geraden."

Im zweiten Teile untersucht der Verf. dann die $C_5$ mit Spitzen eingehender. Er geht in der Weise vor, dass er sich die Spitzen der Curven gegeben denkt, dann die entsprechende Gleichung der Curve aufstellt und dieselbe discutirt.

Da nach Clebsch die Anzahl der Spitzen einer rationalen $C_n$ höchstens gleich $\frac{3}{4}(n-2)$ ist, so kann eine $C_5$ höchstens vier Spitzen haben und hat also mindestens noch zwei Doppelpunkte. Demnach ergeben sich für die Untersuchung die folgenden Fälle:

1) $C_5$ mit vier reellen Spitzen; 2) $C_5$ mit einem Paar conjugirt imaginärer Spitzen; 3) $C_5$ mit vier paarweise conjugirt imaginären Spitzen; 4) $C_5$ mit drei Spitzen.

Für alle diese Fälle giebt der Verf. noch die verschiedenen typischen Curvenbilder. Hau.

---

Bouquet de la Grye. Un devoir d'élève. J. de Math. spéc. (4) I. 35-39, 56-67, 82-88, 109-114.

Es handelt sich darum, die Gleichung

$$y^2 = x \pm \sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{x-d}}$$

zu discutiren. Diese Aufgabe hat Hr. Bouquet de la Grye als Schüler im Jahre 1848 gelöst, und zwar in so vollkommener Weise, dass ihre Veröffentlichung wohl gerechtfertigt ist. Die Sorgfalt der Discussion, der eine grössere Anzahl von Figuren beigefügt ist, kann als Vorbild dienen. Die Details möge man a. a. O. einsehen. Gz.

---

E. Catalan. Question 319. J. de Math. spéc. (4) I. 236-240.

Ist $y = \frac{1-x^2}{(1-2\lambda x+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$ die Gleichung einer Curvenschar für variable $\lambda$, so hat das zwischen $x=-1$ und $x=+1$ oberhalb der $x$-Axe gelegene Segment der Curve den constanten, von $\lambda$ unabhängigen Wert $\frac{4}{3}$. Lösungen von den Herren Blanchet, Brocard, Barisien, Greenstreet. Lp.

P. Delens. Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements et sur les quartiques de troisième classe. J. de Math. spéc. (4) I. 193-198.

Ueber die Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten werden folgende zwei Sätze mitgeteilt: 1. Der Ort der Punkte, von denen aus man an eine Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten Tangenten ziehen kann, deren drei Berührungspunkte in gerader Linie liegen, ist der dieser Curve umschriebene Kreis. 2. Die Enveloppe der Geraden, welche durch die drei Berührungspunkte geht, ist eine andere Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten, welche dem vorhergehenden Kreise umschrieben ist und die Rückkehrpunkte der ersten Hypocykloide als Scheitel besitzt. Diese Sätze stellen sich aber als specielle Fälle analoger Eigenschaften der Curve vierter Ordnung dritter Klasse heraus, welche der Verf. dann näher betrachtet. Gz.

---

A. Cayley. Note on the orthotomic curve of a system of lines in a plane. Messenger (2) XXII. 45-46.

Bezieht sich auf die Parallelcurve der Ellipse. Glr. (Lp.)

---

F. Michel. Sur les cycliques planes. J. de Math. spéc. (4) I. 251-257, 271-281.

Ueber die Arbeit wird nach vollendetem Erscheinen im nächsten Bande zusammenhängend berichtet werden. Gz.

---

Reincke. Ueber cyklische Curven, dargestellt als geometrischer Ort des Mittelpunktes derjenigen Geraden, welche zwei auf zwei concentrischen Kreisen gleichförmig bewegte Punkte in jedem Moment verbindet. Pr. (Nr. 655) Realgymn. Malchin. 34. S. 4°.

Der Verfasser wählt den Mittelpunkt der beiden concentrischen Kreise, deren Radien $r$ und $r'$ ($r' > r$), zum Anfangspunkte der Coordinaten; die Gerade, welche beide Punkte in dem Moment

verbindet, wo sie mit dem Mittelpunkt der Kreise in gerader Linie sind, zur Axe $OX$; die Senkrechte darauf zur Axe $OY$. In den laufenden Coordinaten $\xi$, $\eta$ kommt man so zu folgenden Gleichungen für die im Titel der Arbeit definirte Curve:

$$\xi = \frac{r}{2}\cos pt + \frac{r'}{2}\cos qt,$$

$$\eta = \frac{r}{2}\sin pt + \frac{r'}{2}\sin qt.$$

Hier ist $p = \frac{v}{r}$, $q = \frac{v'}{r'}$, wo $v$, $v'$ die Geschwindigkeiten der bewegten Punkte und $t$ die Zeit bedeutet. Durch Elimination von $t$ würde man die Gleichung der Curve in $(\xi, \eta)$ erhalten; diese Elimination ist aber nur in besonderen Fällen ausführbar. Die beiden Gleichungen werden dann mit denen einer Epicykloide im weiteren Sinne, also mit:

$$x = (R+\varrho)\cos\vartheta + \varrho'\cos\frac{R+\varrho}{\varrho}\vartheta,$$

$$y = (R+\varrho)\sin\vartheta + \varrho'\sin\frac{R+\varrho}{\varrho}\vartheta$$

verglichen, wodurch das Studium der ersteren Curven weiter geführt wird, und interessante Specialfälle in Betracht kommen. Dann wird Tangente und Normale eines Punktes behandelt, hierauf die Rectification, die auf elliptische Integrale führt, in speciellen Fällen sich aber vereinfacht, und schliesslich wird die Bewegung des Punktes, der die im Titel genannte Curve beschreibt, und das Gesetz dieser Bewegung erörtert. Mz.

---

A. Masdea. Studio sulle epicicloidi. Napoli 1892. 27 S. Mit zwei lith. Taf.

Eine Monographie über die Curven $I$, welche durch einen Punkt erzeugt werden, der mit einer beweglichen, auf einer festen Curve $\Gamma$ rollenden, aber nicht gleitenden Curve $C$ fest verbunden ist. Nachdem der Verf. die Ausdrücke der Coordinaten eines Punktes der Curve $I$ bestimmt hat, erhält er daraus eine Construction der Tangente von $I$ und den Ausdruck des Krümmungshalbmessers in

einem beliebigen Punkte derselben Curve; ferner bemerkt er, dass die gefundenen Ausdrücke der Coordinaten es ermöglichen, $\Gamma$ zu finden, wenn $I$ und $C$ bekannt sind, oder $C$, wenn $I$ und $\Gamma$ gegeben werden. Diese Resultate können, wie der Verf. beiläufig bemerkt, eine Anwendung auf die Theorie der Evoluten und Evolventen finden; aber am wichtigsten ist der Fall, wo die Curven $C$ und $\Gamma$ beide Kreise sind; man hat dann die Epicykloiden im strengen Sinne, deren eleganteste Eigenschaften der Verf. am Ende seines Aufsatzes beweist. La.

V. Jeřábek. Ueber polar reciproke Curven von Epicykloiden und Hypocykloiden. Pr. der Oberrealschule zu Brünn 1890/91. (Böhmisch.)

Betrifft den geometrischen Ort eines Punktes $M$, welcher erhalten wird, wenn $OX$, $OY$ zwei senkrecht auf einander stehende Halbmesser einer Kreislinie vorstellen, auf welcher zwei Punkte $A$, $B$ so gewählt sind, dass

$$\text{arc}\,XA = n.\text{arc}\,BY,$$

und die Tangente des Punktes $B$ den Strahl $OA$ in $M$ schneidet. Die Specialisirung der Verhältniszahl $n$ liefert besondere Curven, wie z. B. die Trisectrix von Longchamps für $n=2$. Std.

G. Pirondini. Intorno ad una famiglia notevole di linee piane. Batt. G. XXX. 326-343.

Es sind die Curven gemeint, deren Krümmungsradius $\varrho$ einer Potenz des Bogens proportional ist. $\varrho = ks^m$ ($m=1$ logarithmische Spirale, $m=\frac{1}{2}$ Kreisevolvente u. a.). Die Evoluten aller Ordnungen aller dieser Curven gehören zu derselben Familie, ebenso im allgemeinen die Evolventen, welche als Evoluten negativer Ordnung angesehen werden können. Insbesondere hat die $n^{\text{te}}$ Kreisevolvente die Gleichung $\varrho = ks^{\frac{n}{n+1}}$. Eine Ausnahme macht nur der Fall $m = \frac{p+1}{p}$, wo die $p^{\text{te}}$ und alle folgenden Evolventen aus der Familie heraustreten. Es ergiebt sich (immer mit Ausnahmen)

für die Familie als charakteristisch, dass der Krümmungsradius proportional ist einer Potenz des Krümmungsradius der Evolute; das Analoge gilt für die Bogen und Flächenstücke. Der Verf. beweist zum Schluss noch eine höchst merkwürdige Relation zwischen den Krümmungsradien von vier auf einander folgenden Evoluten. R. M.

---

E. Cesàro. Sobre algunas notas de geometría infinitesimal. Progreso mat. II. 212-214.

Bemerkungen über die Curven, die der Gleichung genügen:

$$s = k\int \frac{d\varrho}{\left\{\left(\frac{\varrho}{a}\right)^n - 1\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

und über die Evoluten dieser Curven. Tx. (Lp.)

---

W. Rulf. Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Neoide mittelst eines Kegelschnittes. Hoppe Arch. (2) XI. 197-199.

Es wird für die Curve mit der Polargleichung $r = b + a\varphi$ eine lineare Construction des Krümmungsmittelpunktes hergeleitet und der Krümmungsradius $\varrho = \frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$ auf elementare Weise berechnet. Lg.

---

S. Levänen. Lösning af en matematisk uppgift. Öfversigt af Finska Vetenskapssocietetens Förhandlingar (Helsingfors). XXXIV. 22-27.

Ueber Curven, deren zu einander senkrechte Tangenten sich auf einem Kreise oder einer Geraden schneiden. Bdn.

---

# Capitel 3.

## Analytische Geometrie des Raumes.

### A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

H. Stahl und V. Kommerell. Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Leipzig. B. G. Teubner. VI + 114 S. gr. 8°. (1893.)

Das vorliegende Werk giebt in gedrängter Kürze die Entwickelung der Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie. Es unterscheidet sich von anderen trefflichen älteren Werken dadurch, dass neben der allgemeiner bekannten Monge'schen und Gauss'schen Behandlungsweise auch die neueren Betrachtungen von Darboux und Bianchi, die zum Teil auf kinematischer Grundlage aufgebaut sind, Berücksichtigung finden. Einzelne Abschnitte sind bereits früher von Herrn Kommerell in seiner Dissertation (Tübingen 1880) in demselben Sinne bearbeitet worden, während das vorliegende Werk als Ganzes im Anschluss an eine Vorlesung des Herrn Stahl entstanden ist.

Das Werk ist in drei Hauptabschnitte geteilt, deren erster die Betrachtungen enthält, welche zur Untersuchung einer gegebenen Fläche notwendig sind. Hierbei werden die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung im wesentlichen nach Gauss, jedoch mit Benutzung zweckmässiger Hülfsgrössen in sehr übersichtlicher Weise entwickelt, was namentlich bei der Entwickelung des Zusammenhanges zwischen den sechs Fundamentalgrössen vorteilhaft hervortritt. Die Betrachtung specieller Parameter führt zu den Minimallinien, den isometrischen Linien, zur conformen Abbildung, zu den geodätischen Linien und geodätischen Coordinaten, zu den conjugirten Richtungen, den Krümmungslinien und asymptotischen Linien. Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine Anwendung auf die Centraflächen.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit denjenigen Sätzen, deren man hauptsächlich bedarf zur Herleitung einer Fläche aus gegebenen Eigenschaften und zur Aufstellung der entsprechenden par-

tiellen Differentialgleichungen, und mit der Integration einiger derselben. Die Grundlage bilden die Formeln von Gauss und Mainardi, welche letzteren meist als die von Codazzi bezeichnet werden, und der Satz von Bonnet, wonach eine Fläche durch die sechs Fundamentalgrössen, welche drei Integrabilitätsbedingungen genügen, ihrer Gestalt nach vollständig bestimmt ist. Es werden dann die Differentialgleichungen gewisser Flächen, der pseudosphärischen Flächen, der Flächen mit constanter mittlerer Krümmung, der Flächen mit isometrischen Krümmungslinien, der Biegungsflächen einer gegebenen Fläche und der Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien untersucht. Dann folgt eine Anwendung auf dreifach orthogonale Flächensysteme, die sphärische Abbildung und die Ebenencoordinaten mit vielen Anwendungen, und zuletzt die Untersuchung der Minimalflächen.

Der dritte Abschnitt ist der Untersuchung der allgemeinen Flächencurven gewidmet, wobei die absolute und die geodätische Krümmung und Torsion, sowie die normale Krümmung behandelt werden. Hieran schliessen sich wieder mancherlei Anwendungen. Es werden dann gewisse Umformungen besprochen, bei welchen die Differentialparameter eingeführt werden, und den Schluss bildet die Transformation der Parameter.

Aus dieser Inhaltsangabe ist ersichtlich, dass in der That die meisten wichtigen Punkte der Flächentheorie behandelt werden. Allerdings haben manche Untersuchungen der Flächentheorie keine Berücksichtigung gefunden. Vor allem ist es merkwürdig, dass auch in diesem Werke, wie in anderen Darstellungen der Flächentheorie, die sogenannte äquivalente Abbildung der Flächen gar nicht erwähnt wird. Es wäre wohl zu wünschen, dass die Verfasser bei einer neuen Auflage auch diesem Gegenstande einige Seiten widmeten, zumal da derselbe nicht nur ein rein theoretisches, sondern wegen des Kartenzeichnens auch ein praktisches Interesse hat.

Die Darstellung ist bei aller Kürze durchweg klar und übersichtlich; über die sämtlichen im Texte zerstreuten Anwendungen findet sich anfänglich eine kurze Uebersicht. Ebenso sind dort die Originalwerke und umfassenden Darstellungen des Gegenstandes aufgeführt, und überall im Texte findet sich eine sorgfältige Quellen-

angabe. Das Werk wird nicht nur für Studirende, sondern für jeden Mathematiker, der sich mit flächentheoretischen Untersuchungen beschäftigt, ein ausserordentlich schätzbares Hülfsmittel sein.

A.

---

A. Voss. Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie. Münch. Ber. XXII. 247-278.

In den Formeln der Flächentheorie, wie sie seit Gauss zur Darstellung der Eigenschaften der Flächen benutzt werden, treten die Fundamentalgrössen erster Ordnung $e, f, g$, so wie überhaupt solche Ausdrücke in bevorzugter Weise auf, welche, wie $e, f, g$ selbst, bei der Biegung der Fläche ungeändert bleiben, wie z. B. das Krümmungsmass. Doch enthalten diese Ausdrücke insofern etwas der rein geometrischen Auffassung Fremdes, als sie sich ändern, wenn man statt der Parameter $u$ und $v$ neue Parameter $u', v'$ einführt, so dass $u = F(u')$, $v = \Phi(v')$ ist, während doch hierbei die Parameterlinien selbst ungeändert bleiben. Der Verfasser bezeichnet deshalb die Grössen $e, f, g$ und die aus ihnen abgeleiteten Grössen als „analytische" Biegungsinvarianten, im Gegensatz zu „geometrischen Biegungsinvarianten", welche in ihrer Form unabhängig davon sind, ob man $u, v$ oder $u', v'$ als Parameter betrachtet, welche also stets dieselbe Form behalten, wenn man dieselben Parameterlinien (Coordinatenlinien) zu Grunde legt. Er hat sich nun die Aufgabe gestellt, die Fundamentalgleichungen so darzustellen, dass, soweit dies überhaupt möglich ist, nur geometrische Biegungsinvarianten in denselben auftreten, insbesondere auch in allgemeinster Weise das Krümmungsmass als Function solcher darzustellen. Nach einer Kritik der bisherigen Versuche in dieser Richtung wendet er sich zur Aufsuchung solcher Invarianten. Diese müssen also bei der oben angedeuteten Transformation ihre Form behalten. Beschränkt man sich auf die Grössen $e, f, g$ und ihre ersten Ableitungen $e_u$, $e_v$ u. s. w. und bezeichnet die entsprechenden Grössen in den neuen Parametern mit $e', f', g', e'_{u'}$ etc., so zeigt sich, dass sich nur fünf solche Invarianten bilden lassen, nämlich, wenn man $eg - f^2 = H$ setzt:

$$\frac{f^2}{eg} = \cos^2\alpha, \quad \frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{e_v}{\sqrt{e}} = j, \quad \frac{1}{2\sqrt{H}}\frac{g_u}{\sqrt{g}} = j_1, \quad \frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\frac{f}{\sqrt{e}}}{\partial u} = \varkappa,$$

$$\frac{1}{\sqrt{H}}\frac{\partial\left(\frac{f}{\sqrt{g}}\right)}{\partial v} = \varkappa_1.$$

Der erste Ausdruck giebt das Quadrat des Cosinus des Winkels $\alpha$ der Coordinatenlinien, die übrigen sind Bestandteile der geodätischen Krümmungen $\gamma$ und $\gamma_1$ der Coordinatenlinien, und zwar ist $\gamma = \varkappa - j$, $\gamma_1 = \varkappa_1 - j_1$. Diese fünf Grössen sind aber nicht von einander unabhängig, sondern es bestehen noch gewisse Relationen unter ihnen. Der Verfasser weist nun nach, dass sich aus diesen fünf Grössen und den Bogenlängen der Coordinatenlinien die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie aufbauen lassen.

Es erweist sich aber als zweckmässig, nicht diese Grössen selbst, sondern vielmehr gewisse, aus ihnen abzuleitende Grössen zur Darstellung zu benutzen. Diese sind erstens die schon erwähnten geodätischen Krümmungen $\gamma$ und $\gamma_1$ und ferner die Grössen

$$\varrho = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha . j - j_1), \quad \varrho_1 = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha . j_1 - j),$$

welche folgende geometrische Bedeutung haben: Legt man durch den Punkt $P$ und einen benachbarten Punkt $P_1$ der Coordinatenlinie $v$ Tangenten an die Coordinatenlinie $u$, und durch die zweite derselben die Normalebene der Fläche, so schneidet die letztere die erste Tangente in einem Punkte, dessen Abstand $r$ vom Punkte $P$ gleich $\frac{1}{\varrho}$ ist. Analog ist die Bedeutung von $\varrho_1$ bei Vertauschung der beiden Coordinatenlinien. Es zeigt sich dann, dass zwischen diesen vier Grössen $\gamma, \gamma_1, \varrho, \varrho_1$ und $\alpha$ die Relationen bestehen:

$$-\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{\gamma}{\sin\alpha} - \varrho = k, \quad -\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial s_1} = \frac{\gamma_1}{\sin\alpha} - \varrho_1 = k_1,$$

und

$$\frac{\partial k_1}{\partial s} - k_1(l_1) = \frac{\partial k}{\partial s} - k(l),$$

wo $l_1 = \gamma\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \varrho_1$, $l = \gamma_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \varrho$ ist.

Für das Krümmungsmass $k$ ergiebt sich dann, wenn man noch setzt

$$\frac{\gamma_1}{\sin\alpha}+\varrho_1=h_1, \quad \frac{\gamma}{\sin\alpha}+\varrho=h,$$

$$2k=\frac{\partial h_1}{\partial s}+\frac{\partial h}{\partial s_1}-h_1 l_1-hl.$$

Der Ausdruck für $k$ nimmt nun unter gewissen Voraussetzungen einfachere Formen an. Hieraus ergeben sich manche Folgerungen, unter anderen der Satz: Eine reelle Fläche, auf der ein System von Coordinatenlinien constanter geodätischer Krümmung existirt, die sich überall unter constantem Winkel $\alpha$ schneiden, ist eine pseudosphärische Fläche. Hieran schliessen sich noch einige weitere Betrachtungen, namentlich werden die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie noch in eine Form gebracht, in der die Bedeutung des von Herrn Aoust eingeführten Begriffes der Seitenkrümmung hervortritt. A.

---

G. Frobenius. Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden Differentialparameter. J. für Math. CX. 1-36.

Der Verfasser giebt in der Einleitung den Inhalt seiner Arbeit etwa in folgender Weise an.

Ist $\varphi(p, q)=$ const. die Gleichung eines Systems von Curven auf der Fläche, und $\delta n$ das vom Punkte $p, q$ ausgehende Linienelement der Fläche, welches zu der durch $p, q$ gehenden Curve normal ist, so ist nach Herrn Beltrami $\left(\frac{\delta\varphi}{\delta n}\right)^2$ der quadratische Differentialparameter. Construirt man nun in der Richtung von $\delta n$ die Strecke von der Grösse $\frac{\delta\varphi}{\delta n}$, so sind ihre Axencomponenten drei lineare Differentialparameter, welche der Verfasser mit $\Delta_x\varphi$, $\Delta_y\varphi$, $\Delta_z\varphi$ bezeichnet, und deren Untersuchung den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bildet. Sind ferner $\xi, \eta, \zeta$ die Richtungscosinus der Normale der Fläche im Punkte $p, q$, so dass der Punkt $\xi, \eta, \zeta$ die Abbildung dieses Punktes auf die Einheitskugel ist, so kann man für die Kugelfläche drei analoge Differentialparameter

bilden: $\Delta_\xi \varphi$, $\Delta_\eta \varphi$, $\Delta_\zeta \varphi$. Den drei quadratischen Formen von $dp$ und $dq$:

$$\Sigma dx^2, \quad \Sigma dx d\xi, \quad \Sigma d\xi^2,$$

entsprechen dann drei lineare Differentialparameter, welche sich in die Form bringen lassen:

$$\Sigma \Delta_x \varphi \, \Delta_x \psi, \quad \Sigma \Delta_x \varphi \, \Delta_\xi \psi = \Sigma \Delta_\xi \varphi \, \Delta_x \psi, \quad \Sigma \Delta_\xi \varphi \, \Delta_\xi \psi,$$

während die drei quadratischen Differentialparameter die Gestalt annehmen:

$$\Sigma \Delta_x^2 \varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{k}} \Sigma \Delta_x (\sqrt{k} \Delta_\xi \varphi) = \sqrt{k} \Sigma \Delta_\xi \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \Delta_x \varphi \right), \quad \Sigma \Delta_\xi^2 \varphi,$$

wo $k$ das Krümmungsmass ist. Der bilinearen Form $\Sigma \pm \xi dy d\zeta$ endlich, welche in der Theorie der Krümmungslinien auftritt, entspricht der bilineare Differentialparameter $\Sigma \pm \xi \Delta_y \varphi \Delta_\zeta \psi$ und zwei verschiedene Differentialparameter zweiter Ordnung: $\Sigma \pm \xi \Delta_\eta (\Delta_z \varphi)$, $\Sigma \pm \xi \Delta_y (\Delta_\xi \varphi)$, von denen der erste für $\varphi = x, y, z$ und $\Sigma x^2$ verschwindet, der zweite für $\varphi = \xi, \eta, \zeta$ und $\Sigma x\xi$. Nachdem die Beziehungen zwischen diesen verschiedenen Differentialparametern erforscht sind, benutzt der Verfasser die erhaltenen Resultate zur Aufstellung der Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher der Parameter einer Flächenschar genügen muss, damit dieselbe einem Orthogonalsystem angehöre, und zur Entwickelung der Bedingung der Isometrie der Krümmungslinien. Auch werden die Beziehungen der eingeführten Differentialparameter zum Krümmungsmass und zur geodätischen Krümmung untersucht. A.

---

R. Hoppe. Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien. Hoppe Arch. (2) XI. 442-448.

Wie man im gewöhnlichen Raume in jedem Punkte einer Curve drei Fundamentalaxen: Tangente, Hauptnormale, Binormale, und zwei Krümmungen: Krümmung und Torsion, unterscheidet, so hat man in einer $n$-Dehnung $n$ Fundamentalaxen und $(n-1)$ Krümmungen einer Curve zu unterscheiden, die sich folgendermassen definiren lassen: Die $m^{te}$ Fundamentalaxe ist, wenn $m > 1$ ist, das innerhalb der osculirenden $m$-Dehnung im laufenden Curvenpunkte errichtete Lot auf der osculirenden $(m-1)$-Dehnung.

Die erste ist die Tangente. Die $m^{te}$ Krümmung ist der Cosinus des Winkels zwischen der $(m+1)^{ten}$ Fundamentalaxe und der consecutiven $m^{ten}$ Fundamentalaxe, dividirt durch das Curvenelement $ds$.

In der Arbeit werden die analytischen Ausdrücke entwickelt, welche diesen Begriffen entsprechen. A.

---

A. Demoulin. Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches. S. M. F. Bull. XX. 43-46.

Die Tangente $OX$, die Hauptnormale $OY$ und die Binormale $OZ$ einer Curve bilden ein Trieder, welches sich mit dem Curvenpunkte $O$ bewegt, also in jedem unendlich kleinen Zeitintervall eine Schraubenbewegung macht. Die hierauf beruhenden Beziehungen werden besprochen. Dabei ergiebt sich der Satz: Ist die Curve eine solche von constanter Torsion $\tau_0$, so beschreibt die Schraubenaxe relativ zu jenem Trieder ein Plücker'sches Konoid, d. h. eine Fläche, deren Gleichung ist

$$y(z^2+x^2)+\tau_0 xz = 0.$$

Einige weitere Betrachtungen ergeben Beziehungen zwischen den Formeln für Krümmung und Torsion, welche indessen wohl nichts wesentlich Neues enthalten, sondern mit den bekannten in Hoppe's Curventheorie entwickelten Beziehungen übereinstimmen. A.

---

G. B. Mathews. On the expansion of the coordinates of a point upon a tortuous curve in terms of the arc. Quart. J. XXVI. 27-30.

Der Verfasser betrachtet eine Raumcurve, auf ihr einen Punkt $O$, der zum Coordinatenanfang gewählt wird. Die Tangente in $O$ wird $x$-Axe, die Hauptnormale $y$-Axe und die Binormale $z$-Axe; die positive Richtung der $y$-Axe geht nach dem Krümmungscentrum, und die Axen bilden ein rechts gerichtetes oder positives System. Ist dann $\sigma$ die Länge eines Curvenbogens, der von $O$ nach einem andern Curvenpunkte $P$ gemessen ist, so hat man die

Gleichungen:

$$x = \sum_1 \frac{a_n \sigma^n}{n!}, \quad y = \sum_1 \frac{b_n \sigma^n}{n!}, \quad z = \sum_1 \frac{c_n \sigma^n}{n!},$$

vorausgesetzt, dass $\sigma$ hinreichend klein ist. Die Coefficienten $a_n$, $b_n$, $c_n$ sind Functionen der Krümmung $\varkappa$ und der Torsion $\tau$, welche die Curve in $O$ hat, und der Ableitungen von $\varkappa$ und $\tau$ nach dem Bogen (gleichfalls für $O$). Aus der Wahl des Coordinatensystems folgt: $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, und es wird nun bewiesen, dass für alle Werte von $n$, die Null überschreiten, die Formeln gelten:

$$a_{n+1} = a'_n - \varkappa b_n,$$
$$b_{n+1} = b'_n + \varkappa a_n - \tau c_n,$$
$$c_{n+1} = c'_n + \tau b_n,$$

wo $a'_n$ für $\frac{da_n}{ds}$ (im Punkte $O$) steht, ebenso bei $b'_n$, $c'_n$. Bei einer ebenen Curve ist $\tau = 0$, und man hat:

$$z = 0, \quad x = \Sigma \frac{a_n \sigma^n}{n!}, \quad y = \Sigma \frac{b_n \sigma^n}{n!}$$

mit $a_1 = 1$, $b_1 = 0$. Die Formeln sind dann:

$$a_{n+1} = a'_n - \varkappa b_n, \quad b_{n+1} = b'_n + \varkappa a_n.$$

Es folgen noch Zusätze. Mz.

---

G. Pirondini. Sur le contact et l'osculation des lignes entre elles. Teixeira J. X. 113-137.

Der Verf. benutzt als Grundlage für seine Theorie der Berührung der Curven den folgenden Satz: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Curven doppelter Krümmung $C$ und $c$ derartig gelegt werden können, dass die $n$ Folgepunkte $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ von $c$ mit den $n$ Folgepunkten $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ von $C$ zusammenfallen, besteht darin, dass die Krümmungsradien in $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}$ und die Torsionsradien in $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$ bei $c$ bezw. den Krümmungsradien in $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-3}$ und den Torsionsradien in $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-4}$ bei $C$ bezw. gleich sind". Um die analytischen Bedingungen für das Zusammenfallen von $n$ Folgepunkten der beiden Curven $c$ und

$C$ herzustellen, definirt Herr Pirondini die gegebenen Curven durch die Gleichungen, welche den Krümmungs- und den Torsions-Radius als Function der Bogenlänge ausdrücken.

Nach Erledigung der allgemeinen Theorie der Berührung der Curven löst der Verf. das Problem der Bestimmung der osculirenden, d. h. der möglichst eng berührenden Curve zu einer gegebenen, für einige merkwürdige Curvenfamilien, nämlich die Geodätischen auf dem Kegel, die cylindrischen Schraubenlinien, die cylindrokonischen und die circularen Schraubenlinien. Die Abhandlung schliesst mit der Theorie der auf der Kugel und auf der Ebene gezogenen Curven und mit einigen Anwendungen.

Tx. (Lp.)

---

E. Czuber. Ueber die Einhüllende der Tangenten einer Plancurve, der Schmiegungsebenen einer Raumcurve und der Tangentialebenen einer krummen Fläche. Monatsh. f. Math. III. 337-347.

Nach Auffassung des Verfassers ist eine ebene Curve noch nicht die vollständige Einhüllende ihrer Tangenten, vielmehr gehören auch ihre superosculirenden Tangenten dazu. Im gleichen Sinne besteht die Einhüllende der osculirenden Ebenen einer Raumcurve aus der developpabeln Fläche der Curve und den superosculirenden Ebenen der letzteren, die Einhüllende der Tangentialebenen einer abwickelbaren Fläche aus dieser Fläche und den superosculirenden Ebenen ihrer Rückkehrcurve, und die einer Fläche, auf welcher positiv und negativ gekrümmte Gebiete durch Curven parabolischer Punkte geschieden sind, aus der Fläche und den superosculirenden Ebenen der genannten Curven. Es werden besondere Umstände an einigen Beispielen näher betrachtet.

H.

---

R. von Lilienthal. Zur Theorie des Krümmungsmasses der Flächen. Acta Math. XVI. 143-152.

Bekanntlich hat Herr Casorati (Lomb. Ist. Rend. (2) XXII. 335-346 und Acta Math. XIV. 95-110, F. d. M. XXI. 1889. 749)

ein neues Krümmungsmass $C$ eingeführt, welches neben dem bekannten Krümmungsmass von Gauss $G$ und dem Begriff der mittleren Krümmung $M$ von Sophie Germain geeignet ist, die Krümmungseigenschaften einer Fläche zu kennzeichnen, welches übrigens nur als eine neue, von der analytischen Darstellung unabhängige infinitesimale Eigenschaft der Fläche erscheint, welche von den beiden Hauptkrümmungsradien $\varrho_1$ und $\varrho_2$ abhängt. Ohne sich auf die Frage einzulassen, ob die Grösse $C$ den Namen „Krümmungsmass" verdient, hat der Verfasser einige analoge Begriffe aufgestellt, welche ebenfalls gewisse Krümmungseigenschaften der Fläche darzustellen geeignet sind. Bewegt sich um einen gewöhnlichen Punkt $P$ einer Fläche ein benachbarter Flächenpunkt auf einem unendlich kleinen Kreise mit dem Radius $PP_1 = ds$, und nennt man $\alpha$ den Winkel, welchen $PP_1$ mit einer festen Tangente in $P$ bildet, bilden ferner die beiden Flächennormalen in $P$ und $P_1$ den unendlich kleinen Winkel $\tau$, so ist das Casorati'sche Krümmungsmass

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tau^2 d\alpha}{ds^2},$$

und es zeigt sich, dass

$$C = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\right]$$

ist. Der Verfasser nimmt nun zunächst statt dieses Winkels $\tau$ den Winkel, welchen entsprechende Hauptkrümmungsrichtungen in $P$ und $P_1$ bilden, und erhält dann noch die beiden analogen Grössen

$$C_1 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\varrho_1^2}\right], \quad C_2 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\right],$$

wo $R_1$ und $R_2$ die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien bedeuten.

Ferner denkt er sich $ds = PP_1$ als Bogenelement einer veränderlichen, von $P$ ausgehenden Flächencurve und nimmt statt des oben betrachteten Winkels $\tau$ den Winkel zwischen den zur Fortschreitungsrichtung $ds$ conjugirten Richtungen in $P$ und $P_1$, welchen er mit $\omega$ bezeichnet, und bildet analog

$$K = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\omega^2 d\alpha}{ds^2}.$$

Dieser Ausdruck ist indessen noch abhängig von den geodätischen Krümmungen der gewählten durch $P$ gelegten Curven $PP_1$.

Er macht nun über die Curven, denen das Bogenelement $ds$ angehört, specielle Voraussetzungen.

Zunächst seien diese Curven solche, deren conjugirte Tangenten die Krümmungslinien unter constantem Winkel schneiden, dann ergiebt sich für $K$ der Wert

$$K_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right),$$

so dass man die Relation erhält $C + 2K_1 = C_1 + C_2$.

Sind zweitens die Curven isogonale Trajectorien der Krümmungslinien, so ergeben sich verschiedene Ausdrücke für $K$, je nachdem das Gauss'sche Krümmungsmass positiv ist ($K_2$), oder negativ ($K'_2$), nämlich:

$$2K_2 = \frac{1}{(\varrho_1+\varrho_2)^3}\left[\frac{\varrho_2(\varrho_1+\varrho_2)^2+4\varrho_1^3}{R_2^2} + \frac{\varrho_1(\varrho_1+\varrho_2)^2+4\varrho_2^3}{R_1^2}\right.$$
$$\left. + \frac{4\varrho_1^2\varrho_{2,2}}{R_2\varrho_2} + \frac{4\varrho_2^2\varrho_{1,1}}{R_1\varrho_1} + \frac{\varrho_{1,1}^2\varrho_2}{\varrho_1^2} + \frac{\varrho_{2,2}^2\varrho_1}{\varrho_2^2}\right],$$

$$2K'_2 = \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1}\left(\frac{4\varrho_2-\varrho_1}{R_1^2} - \frac{4\varrho_1-\varrho_2}{R_2^2}\right)$$
$$+ \frac{4}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\left(\frac{\varrho_2\varrho_{1,1}}{R_1\varrho_1} + \frac{\varrho_1\varrho_{2,2}}{R_1\varrho_2}\right) + \frac{1}{(\varrho_2-\varrho_1)^3}\left(\frac{\varrho_2\varrho_{1,1}^2}{\varrho_1^2} - \frac{\varrho_1\varrho_{2,2}^2}{\varrho_2^2}\right).$$

Die Bedeutung von $\varrho_{1,1}$ und $\varrho_{2,2}$ ist folgende: Sind $X$, $Y$, $Z$ die Richtungscosinus der Normale, $A_1$, $B_1$, $C_1$, bezw. $A_2, B_2, C_2$ die der Haupttangenten, und setzt man die linearen Differentialausdrücke

$$A_1dX + B_1dY + C_1dZ = H_1,$$
$$A_2dX + B_2dY + C_2dZ = H_2,$$

so wird

$$d\varrho_1 = \varrho_{1,1}H_1 + \varrho_{1,2}H_2,$$
$$d\varrho_2 = \varrho_{2,1}H_1 + \varrho_{2,2}H_2.$$

Drittens seien die Curven $PP_1$ geodätische, dann ergiebt sich, jenachdem die Krümmung positiv oder negativ ist:

$$K_3 = \frac{1}{2\varrho_1^2\varrho_2^2(\varrho_1+\varrho_2)^3}[(\varrho_{1,2}^2\varrho_2 + \varrho_{2,1}^2\varrho_1)(\varrho_1^2 + 3\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2)$$
$$+ \varrho_{1,1}^2\varrho_2^3 - 2\varrho_{1,1}\varrho_{2,1}\varrho_1\varrho_2^2 - 2\varrho_{1,2}\varrho_{2,2}\varrho_2\varrho_1^2 + \varrho_{2,2}^2\varrho_1^3],$$

$$K'_3 = \frac{1}{2\varrho_1^2\varrho_2^2(\varrho_2-\varrho_1)^3}[(\varrho_{1,2}^2\varrho_2 - \varrho_{2,1}^2\varrho_1)(\varrho_1^2 - 11\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2)$$
$$+\varrho_{1,1}^2\varrho_2^3 - 6\varrho_{1,1}\varrho_{2,1}\varrho_1\varrho_2^2 + 6\varrho_{1,2}\varrho_{2,2}\varrho_2\varrho_1^2 - \varrho_{2,2}^2\varrho_1^3].$$

Wenn der eine Hauptkrümmungsradius Function des andern ist, vereinfachen sich diese Formeln etwas.

Speciell für Minimalflächen ergiebt sich:

$$K'_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right), \quad K'_3 = 2\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right).$$

Als besonders merkwürdig bei diesen Resultaten ist wohl der Umstand zu bezeichnen, dass sich für positiv und negativ gekrümmte Flächen ganz verschiedene Werte für $K_2$ und $K_3$ ergeben haben. A.

---

H. Ruoss. Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmasses. Schlömilch Z. XXXVII. 378-381.

Der Nachweis, dass das Krümmungsmass eine Biegungsinvariante ist, ist nach den seit Gauss her üblichen Methoden der Flächentheorie etwas umständlich, und die Mathematiker haben sich wiederholt bemüht, ihn in einfacherer Weise zu führen. So hat z. B. Faye in den C. R. XCII. 1019-21 (F. d. M. XIII. 1881. 573) für positiv gekrümmte Flächen eine einfache geometrische Betrachtung angestellt, die auf das Krümmungsmass führt, die aber dem Verfasser für seinen Zweck nicht genügt, und bei der gewiss die Beschränkung auf positiv gekrümmte Flächen eine Lücke lässt. Dass auch andere Mathematiker, wie z. B. Natani, das Krümmungsmass durch geometrische Betrachtungen hergeleitet haben, scheint dem Verfasser entgangen zu sein. Er selbst bedient sich dazu eines einfachen analytischen Verfahrens, welches in der That sehr interessant ist, wenn es auch der geometrischen Anschaulichkeit entbehrt.

Wählt man als Anfangspunkt der Coordinaten einen gewöhnlichen Curvenpunkt, zur $z$-Axe die Normale, zur $x$- und $y$-Axe die Hauptkrümmungsrichtungen, so beginnt die Entwickelung von $z$ nach Potenzen von $x$ und $y$ folgendermassen

$$z = \lambda x^2 + \mu y^2 + R_3,$$

wo $R_3$ in dritter Ordnung verschwindet und $\frac{1}{2\lambda}$, $\frac{1}{2\mu}$ die beiden Hauptkrümmungsradien sind.

Zieht man auf der Fläche von $O$ aus geodätische Linien und beschreibt um $O$ einen geodätischen Kreis, so wird bei einer Biegung diese Figur ihre Bedeutung behalten. Der Verfasser entwickelt nun das Bogenelement des geodätischen Kreises nach Potenzen des geodätischen Radius $s$ und daraus durch Integration den Umfang $\sigma$ des geodätischen Kreises ebenfalls nach Potenzen von $s$. Diese Entwickelung liefert

$$\sigma = 2\pi s + \tfrac{4}{3}\lambda\mu s^3 + R_4.$$

Wiederholt man die Entwickelung auf der deformirten Fläche, so bleibt $\sigma$ ungeändert, also können sich auch die Coefficienten rechts nicht ändern; d. h. $4\lambda\mu$ ist eine Biegungsinvariante. $4\lambda\mu$ ist aber das Krümmungsmass. A.

---

Th. Caronnet. Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures. S. M. F. Bull. XX. 91-92.

Wählt man auf einer Fläche zu Parametern $\alpha$ und $\beta$ diejenigen imaginären Linien, deren sphärische Abbildungen die imaginären Geraden der Kugel sind, so wird nach O. Bonnet die Gleichung der Tangentialebene

$$(\alpha+\beta)x + i(\beta-\alpha)y + (\alpha\beta-1)z + \xi = 0,$$

und wenn man setzt

$$r = \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}, \quad t = \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2},$$

so ist die Gleichung der Krümmungslinie $rd\alpha^2 - td\beta^2 = 0$.

Ist dann $rt = f(s)$, wo $ds^2 = rd\alpha^2 - td\beta^2$ ist, so zeigt sich, dass für alle Flächen, die der Gleichung genügen

$$rt = f(s),$$

die Krümmungslinien sich durch Quadraturen bestimmen lassen. Hieran werden noch einige weitere Ausführungen geknüpft.

A.

G. Loria. Sulla teoria della curvatura delle superficie. Rivista di Mat. II. 84-95.

Die Abhandlung enthält eine kurze Darstellung der Theorie der Krümmung der Flächen, welche von der Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = 0$ ausgeht, ohne von anderen Parametern Gebrauch zu machen. Sie ist, wie der Verfasser bemerkt, ursprünglich für Vortragszwecke entstanden und ist in der Form übersichtlich, auch zum Teil neu. Etwas wesentlich Neues ist, wie von vorn herein zu erwarten war, nicht in der Arbeit enthalten. A.

---

Cl. Servais. Sur la courbure dans les surfaces. Belg. Bull. (3) XXIV. 467-474.

Den Ausgangspunkt dieser Abhandlung bildet die folgende geistvolle Bemerkung: Wenn man die Normalen einer Oberfläche zweiter Ordnung in zwei Punkten $M$, $M'$ betrachtet, so sind die Gerade $MM'$ und die Verbindungslinien der Durchstosspunkte beider Normalen mit den Ebenen der Hauptaxen vier Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloides $(P)$. Stellt man diese Bemerkung mit den bekannten Eigenschaften der Focalkegelschnitte zusammen, so gelangt man zur Definition des Grenzparaboloides $(P_1)$ von $(P)$, wenn $M'$ nach $M$ rückt, d. h. wenn die Secante $MM'$ eine bestimmte Tangente der Oberfläche wird. Die Betrachtung dieses Paraboloides ermöglicht dem Verf. den Beweis für die Grundeigenschaften bezüglich der Krümmung bei den Oberflächen zweiter Ordnung. Noch eine andere Methode, welche zu denselben Eigenschaften führt, wird angegeben, und zuletzt wird gezeigt, dass die Untersuchung der Krümmung einer beliebigen Oberfläche in einem ihrer Punkte auf diejenige bei einer Oberfläche zweiter Ordnung zurückkommt. Dml. (Lp.)

---

X. Stouff. Sur la valeur de la courbure totale d'une surface aux points d'une arête de rebroussement. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 91-100.

Eine Fläche $S$ mit einer Rückkehrkante kann aufgefasst werden

als erzeugt von einer Schar Curven, die jene Rückkehrkante einhüllen. Die analytische Darstellung kann folgendermassen geschehen. Sei 1) $\varphi(x, y, z, a) = 0$ die Gleichung einer mit dem Parameter $a$ variirenden Fläche; dann bestimmt 2) $\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0$ den Durchschnitt dieser Fläche mit der consecutiven, also eine Curve der die zu betrachtende Fläche $S$ erzeugenden Curvenschar, und 3) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} = 0$, auf dieser den zugehörigen Punkt der Rückkehrkante. Sind $R$ und $R'$ die Hauptkrümmungsradien der Fläche $S$, so bestimmt sich das Krümmungsmass durch die Gleichung

$$\frac{(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)^2}{R.R'} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} \\ \varphi_2 & \varphi_{1,2} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} \\ \varphi_3 & \varphi_{1,3} & \varphi_{2,3} & \varphi_{3,3} \end{vmatrix} + \frac{F(\xi, \eta, \zeta)}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}},$$

wo $\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ etc. $\varphi_{1,1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ u. s. w. ist, während

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \varphi_{1,1}\xi^2 + \varphi_{2,2}\eta^2 + \varphi_{3,3}\zeta^2 + 2\varphi_{2,3}\eta\zeta + 2\varphi_{3,1}\zeta\xi + 2\varphi_{1,2}\xi\eta$$

und

$$\xi = \varphi_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial a} - \varphi_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial a}, \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt, dass für die Punkte der Rückkehrkante das Krümmungsmass im allgemeinen gleich Null ist (d. h. wenn nicht $F = 0$ ist). Ist aber $F = 0$, so findet der Hauptausnahmefall statt. Das Krümmungsmass bleibt endlich, und längs der Rückkehrkante ist die Tangentialebene der Fläche die Schmiegungsebene der Rückkehrkante. Es werden für diesen Ausnahmefall noch weitere Beziehungen aufgesucht.

Unter den Flächen, die diesen Ausnahmefall bilden, sind besonders interessant die Krümmungsmittelpunkts-Flächen (Centraflächen) der Minimalflächen. A.

---

R. Hoppe. Curve gegebener Krümmung auf gegebener Fläche. Hoppe Arch. (2) XI. 193-196.

Sind $v$ und $u$ die Parameter der Fläche, und ist die geodäti-

sche Krümmung $K$ als Function derselben gegeben, so lässt sich $\frac{d^2v}{du^2}$ durch $\frac{dv}{du}$, $K$ und die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche ausdrücken, welche bekannte Functionen von $u$ und $v$ sind. Mit der Aufstellung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung beschäftigt sich die vorliegende kleine Mitteilung. A.

---

R. Hoppe. Curven von constanter Krümmung, Torsion, Totalkrümmung und Krümmungsverhältnis. Hoppe Arch. (2) XI. 101-112.

Es handelt sich um Probleme folgender Art: 1) Es werden erstens auf gegebener Fläche Curven gesucht, welche eine der genannten Eigenschaften haben. 2) Es werden unter den unendlich vielen Curven der bezeichneten Art die algebraischen (circularen oder logarithmischen) bestimmt. Hierbei ergeben sich mehrere interessante specielle Resultate. A.

---

G. Vivanti. Ueber diejenigen Berührungstransformationen, welche das Verhältnis der Krümmungsmasse irgend zweier sich berührenden Flächen im Berührungspunkte unverändert lassen. Schlömilch Z. XXXVII. 1-7.

Es wird gezeigt, dass alle Berührungstransformationen von der oben bezeichneten Beschaffenheit erweiterte Punkttransformationen sind, und hieraus folgt nach einem Satze von Mehmke, dass sie projective Transformationen sind. Dasselbe wird dann auch noch direct bewiesen, ohne den Mehmke'schen Satz zu benutzen.

El.

---

R. Mehmke. Ueber die Aenderung der Hauptkrümmungen einer Fläche bei einer beliebigen Berührungstransformation. Rivista di Mat. II. 159-161.

Es wird folgender Satz aufgestellt und durch Grassmann'sche Methoden bewiesen: Geht eine Fläche $F$ bei einer beliebigen Berührungstransformation des Raumes in eine Fläche $F_1$ über, so

sind die Coefficienten der quadratischen Gleichung für die Hauptkrümmungen in einem Punkte von $F_1$ bilineare Functionen von den Hauptkrümmungen in dem entsprechenden Punkte von $F$.

El.

---

R. Mehmke. Ueber die geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven und ihre Aenderung bei beliebiger Transformation der Fläche. Schlömilch Z. XXXVII. 186-189.

Ist eine Fläche durch die Parameter $u$, $v$ auf eine andere abgebildet, so existirt zwischen den geodätischen Krümmungen $k$ und $k_1$ entsprechender Curven in entsprechenden Punkten $P$ und $P_1$ eine lineare Gleichung, deren Coefficienten nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung der beiden Flächen und von $\left(\frac{dv}{du}\right)$ abhängen, also unverändert bleiben für alle Curven, die mit derselben Tangentenrichtung durch $P$ gehen, und ihre Abbildungen. Hat man sonach auf der Urfläche mehrere Curven, welche sich in $P$ berühren, so dass sich ihre Abbildungen in $P_1$ berühren, und trägt auf den Flächentangenten, welche senkrecht zu den Berührungstangenten stehen, Strecken ab, welche so viel Längeneinheiten enthalten, wie die entsprechenden geodätischen Krümmungen angeben, so bilden die Endpunkte entsprechender Strecken zwei ähnliche Punktreihen.

Man kann hieraus auch folgenden Schluss ziehen:

Berühren sich auf einer Fläche in einem Punkte $P$ drei im übrigen beliebige Curven der Fläche, deren geodätische Krümmungen mit $k$, $k'$, $k''$ bezeichnet werden, so bleibt der Quotient $\frac{k-k'}{k-k''}$ bei allen punktweisen Transformationen der Fläche unverändert. Der Beweis für diese Behauptungen ergiebt sich sehr einfach aus dem Umstande, dass die geodätische Krümmung $k$ sich in der Form $k=\alpha\varkappa+\beta$ darstellen lässt; wo $\varkappa=(u'v''-v'u'')$ ist, während $\alpha$ und $\beta$ nur von $\frac{dv}{du}$ und den Fundamentalgrössen erster Ordnung abhängen.

Unterwirft man eine Fläche einer anderen Art von Transformation, welche einer von Herrn Lie für den Raum definirten Berührungsdeformation entspricht, so ist $k_1$ eine rationale Function ersten Grades von $\varkappa$, über deren Coefficienten dasselbe gilt, wie oben.

Berühren sich also auf einer Fläche in einem Punkte $P$ vier im übrigen beliebige Curven, deren geodätische Krümmungen $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ seien, so bleibt das Doppelverhältnis

$$\frac{k_1-k_3}{k_2-k_3}\cdot\frac{k_1-k_4}{k_2-k_4}$$

bei allen „Berührungstransformationen" unverändert.

Diese Erweiterung des obigen Satzes teilt der Verfasser ohne Beweis mit. A.

---

R. Mehmke. Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsätze der Flächentheorie. (Eine Anwendung der Methoden von Grassmann.) Rivista di Mat. II. 65-71.

Ist $U = \mathfrak{F}(x)$ eine eindeutige Function des in einem beliebigen Raumgebiete gedachten Punktes $x$, und trägt man von einem beliebigen Punkte $p$ aus nach allen Richtungen die $n^{\text{ten}}$ Wurzeln aus den reciproken Werten der in diesen Richtungen genommenen $n^{\text{ten}}$ Ableitungen der Function $\mathfrak{F}(x)$ als Strecken ab, so erfüllen die Endpunkte dieser Strecken eine Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche der Verf. $n^{\text{te}}$ Ableitungsfläche der Function $\mathfrak{F}(x)$ nennt. Im Gebiete der Ebene liefert die Ableitungscurve zweiter Ordnung eine einfache Construction der Krümmungsmittelpunkte der Curve $\mathfrak{F}(x)$, und durch Ausdehnung dieser Betrachtungen auf den Raum ergeben sich überraschend leicht die Grundbegriffe und Sätze der Flächentheorie. Auch mit der Theorie der Trägheits-Ellipsoide und anderen Begriffen der Mechanik hängt der Begriff der Ableitungsfläche zusammen. Schg.

---

G. Pirondini. Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc. J. für Math. CIX. 238-260.

Es sei $r$ der Radius der Krümmung, $\varrho$ der der Torsion einer Curve und $s$ der Bogen. Es handelt sich darum, diejenigen Curven $L$ zu suchen, für welche $\frac{\varrho}{r} = f(s)$ eine gegebene Function von $s$ ist. Der einfachste Fall $\frac{\varrho}{r} =$ const. führt, wie bereits Herr Bertrand gezeigt hat, auf die Familie der Helices (Kürzesten von Cylinderflächen). Uebrigens hat wohl Herr Hoppe dieses Resultat, wenn auch in anderer Form, zuerst gefunden.

Zur Behandlung des allgemeineren Problems schlägt der Verfasser folgenden Weg ein. Denkt man sich durch $L$ die rectificirende abwickelbare Fläche $\Sigma$ gelegt (d. h. den Ort der Binormalen), und ist die Rückkehrcurve dieser Fläche $L_0$, so kann man $\Sigma$ dadurch in die Ebene abwickeln, dass man, ohne die Krümmung der Rückkehrcurve zu ändern, ihre Torsion aufhebt. Hierdurch geht $L_0$ in die ebene Curve $\Lambda_0$ über und $L$, weil es Kürzeste von $\Sigma$ ist, in eine Gerade $\Lambda$. Wählt man diese Gerade zur $x$-Axe und eine dazu Senkrechte im Punkte $s = 0$ zur $y$-Axe, sind ferner $x$, $y$ die Coordinaten des entsprechenden Punktes von $\Lambda_0$, so wird $s = \frac{xdy - ydx}{dy}$ und $\frac{\varrho}{r} = \frac{dx}{dy}$. Soll also die Bedingung erfüllt sein $s = \varphi\left(\frac{\varrho}{r}\right)$, so genügt die Curve $\Lambda_0$ der Bedingung:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{xdy - ydx}{dy}\right),$$

und zwar stellt das singuläre Integral dieser Gleichung die Curve $\Lambda_0$ dar, während die particulären Integrale ihre Tangenten darstellen. In der That sind die particulären Integrale der Gleichung (I):

$$\text{(II)} \qquad x - y\varphi(c) = c,$$

wo $c$ die Integrationsconstante bedeutet; das singuläre Integral ergiebt sich durch Elimination von $c$ aus (II) und $x - y\varphi'(c) = 0$.

Mit der Bestimmung von $\varDelta_0$ ist aber das Problem gelöst, da man nur noch der Curve $\varDelta_0$ eine willkürliche Torsion zu erteilen hat, ohne ihre Krümmung zu ändern, hierbei biegt sich die Ebene von $\varDelta_0$ in eine abwickelbare Fläche und $L_0$ in eine Curve $L$, die der Bedingung genügt. Die Lösung des Problems erfordert also eine willkürliche Function. Dies Resultat wird nun zunächst an einigen sehr einfachen Beispielen erläutert. Soll z. B. $\varphi(s)$ linear sein, so stellen die particulären Integrale Gerade der Ebene dar, die durch einen Punkt gehen; ein singuläres Integral im gewöhnlichen Sinne existirt nicht, weil die Curve $\varDelta_0$ in einen Punkt degenerirt, und die Fläche $\Sigma$ wird eine willkürliche Kegelfläche, also die gesuchten Linien $L$ sind Kürzeste auf Kegelflächen. (In der Abhandlung findet sich bei diesem Beispiel ein Druckfehler. Es muss heissen Seite 240 Z. 3 v. o. $\frac{\varrho}{r}=\frac{s+b}{a}$, statt $\frac{\varrho}{r}=\frac{s}{a}+b$. Hiernach bedürfen auch die folgenden Betrachtungen S. 240 einer kleinen Modification.) Soll ferner $\left(\frac{\varrho}{r}\right)^m=\frac{a}{s}$ sein, so wird die Gleichung der Curve $\varDelta_0$ die folgende:

$$\left(\frac{x}{(m+1)a}\right)^{m+1}=\left(\frac{y}{ma}\right)^m.$$

Der Verfasser wendet sich dann zu der Aufgabe, die Radien der Krümmung und Torsion $r_0$ und $\varrho_0$ der Rückkehrkante $L_0$ mit Hülfe der Radien $r$ und $\varrho$ der geodätischen Linien $L$ auszudrücken, und wird hierdurch zu einer Reihe von interessanten Beziehungen geführt, die den Inhalt der folgenden Teile der Arbeit bilden.

A.

---

G. Koenigs. Sur les perspectives des asymptotiques d'une surface. Soc. Philom. Bull. (8) IV. 94.

Der Verfasser hat C. R. CXIII (F. d. M. XXIII. 1889. 792) den Satz aufgestellt: Damit ein ebenes Netz von Curven die Perspective der asymptotischen Linien einer Fläche sei, ist es notwendig und hinreichend, dass seine Invarianten gleich sind. Er bespricht jetzt die Auffindung der ebenen Netze mit gleichen Invarianten.

H.

---

G. Koenigs. Résumé d'un mémoire sur les lignes géodésiques. Toulouse Ann. VI. P. 1-34.

Dieser Aufsatz enthält eine gedrängte Zusammenfassung der Resultate einer Preisschrift, welche später im Recueil des savants étrangers veröffentlicht werden soll, und welche sehr eingehende Untersuchungen über geodätische Linien anstellt. Dieselben knüpfen zunächst an die Frage an, welche Flächen geodätisch auf einander abgebildet werden können, d. h. so, dass die geodätischen Linien einander entsprechen. Herr Dini hatte dafür die Bedingung aufgestellt, dass irgend zwei Flächen, für welche $ds^2$ die Form hat:

$$ds^2 = \left(\frac{a'U+b'}{aU+b} + \frac{a'V+b'}{aV+b}\right)\left(\frac{du^2}{aU+b} + \frac{dv^2}{aV+b}\right),$$

wo aber die Constanten beidemale verschieden sein können, geodätisch auf einander abwickelbar sind. Der Verfasser hat gezeigt, dass diese Bedingung nicht ausreicht, weil ein Fall übersehen ist, der einer „halb conformen Punkttransformation" entspricht, bei welcher nur eine Familie von Nulllinien bei der Abbildung erhalten bleibt. In diesem Fall nehmen die $ds^2$ nicht die obige Liouville'sche Form an, sondern die Lie'sche.

Dieselben Formen der $ds^2$ treten auch bei einem andern Problem auf, welches zuerst von Massieu behandelt ist, dem Problem der geodätischen Linien, welche ein quadratisches Integral in Bezug auf die Geschwindigkeiten besitzen.

An dieses Problem knüpft der Verfasser die Frage nach solchen $ds^2$, welche mehrere quadratische Integrale besitzen, und findet folgendes Resultat:

1) Wenn ein $ds^2$ für seine geodätischen Linien mehr als drei quadratische Integrale ausser dem der lebendigen Kräfte besitzt, besitzt es fünf, und das Krümmungsmass der Fläche ist constant.

2) Wenn es nur drei solcher Integrale besitzt, so ist die Fläche auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar.

Hieran schliesst sich nun eine eingehende Untersuchung der verschiedenen Typen für $ds^2$, welche sich nach diesem Gesichtspunkte aufstellen lassen, wobei sich eine grosse Zahl interessanter Resultate ergiebt. A.

---

J. Lüroth. Ueber die Bestimmung einer Fläche durch geodätische Messungen. Münch. Ber. XXII. 27-52.

Der Verfasser behandelt als Vorbetrachtung für die Bestimmung einer Fläche aus geodätischen Messungen die Untersuchung einer Abbildung 𝔄, die folgendermassen charakterisirt ist. Den Punkten A, B, C der Fläche $F$ entsprechen die Punkte A′, B′, C′ der Fläche $F'$; durch jeden dieser Punkte gehe eine Linie, Lotlinie genannt, welche nicht in die betreffende Fläche fällt, z. B. durch A und A′ als Fusspunkte gehen die einander entsprechenden Lotlinien $a$ und $a'$. Die durch eine Lotlinie gelegten Ebenen werden Verticalebenen genannt. Hat man nun irgend fünf Punkte auf $F$, nämlich A, B, C, D, E und ihre Bildpunkte auf $F'$, so sollen die Ebenenbüschel $a$(BCDE) und $a'$(B′C′D′E′) stets miteinander projectisch sein.

Aus dieser Eigenschaft folgt ohne weiteres, dass, wenn die Ebenen $a$B und $a$C zusammenfallen, auch $a'$B′ und $a'$C′ zusammenfallen müssen, dass also den Punkten in einer Verticalebene von $F$ Punkte in einer Verticalebene von $F'$ entsprechen. Kann man ferner drei Lotlinien von $F$ finden, von welchen zwei die dritte schneiden, so ist die Abbildung 𝔄 projectiv. Durch eine längere scharfsinnige Untersuchung wird nun nachgewiesen, dass dies stets der Fall sein muss.

Diese projective Umformung gilt zunächst nur für die Punkte von $F$; man kann sie aber auch allgemein auf den Raum anwenden und diese räumliche Abbildung mit 𝔗 bezeichnen. Dann zeigt sich, dass die Fläche $F$ und das System ihrer Lotlinien $\Sigma$ durch die projective Abbildung 𝔗 in die Fläche $F'$ und das System ihrer Lotlinien $\Sigma'$ abgebildet sind.

Hat man nun durch ein gehörig dichtes Netz von Messungen auf einer nicht bekannten Fläche $F'$ mit einem nicht bekannten System von Lotlinien $\Sigma'$ empirisch die Ueberzeugung gewonnen, dass man sie auf $F$ und $\Sigma$ in der definirten Art abbilden kann, so folgt hieraus zwar, *dass* eine projective Relation zwischen beiden Gebilden vorhanden ist, *aber nicht*, *welche* von den unendlich vielen projectivischen Umformungen von $F$ und $\Sigma$ die vorliegende Fläche ergiebt.

Fügt man aber die Bedingung hinzu, dass der Winkel zwischen zwei beliebigen Verticalebenen irgend eines Punktes in $F$ und $F'$ gleich sei, dann ist die Abbildung bestimmt, und zwar ist es entweder eine Aehnlichkeitstransformation oder eine solche, die vollständig bestimmt ist, sobald die Lotlinien von $F$ gegeben sind.

Eine directe Anwendung dieser Betrachtung für geodätische Zwecke würde nun darin bestehen, dass man sich aus den Ergebnissen von geodätischen Messungen ein Modell construirte, welches den zuletzt aufgestellten Bedingungen entspräche. Man könnte daraus einen bündigen Schluss über die wirkliche Gestalt der Erde ziehen. Dies Verfahren ist aber praktisch nicht anwendbar, weil es zu ungenaue Resultate ergeben würde wegen der Kleinheit der Winkel zwischen den Lotlinien in Punkten der Oberfläche, die gegenseitig sichtbar sind.

Man verfährt deshalb folgendermassen: Man projicirt die Punkte der physischen Erdoberfläche durch Verticale auf eine Niveaufläche der Schwerkraft (Pendelschwere), d. h. auf ein sogenanntes Geoid, und bestimmt die Höhendifferenzen zwischen der physischen Oberfläche und dem Geoid anderweitig, etwa durch Nivellement. Man hat so ein Netz von Punkten auf dem Geoid und nimmt die Normalen des Geoids als seine Lotlinien. Man bildet dann das unbekannte Geoid auf eine „Referenzfläche" ab (gewöhnlich auf das Bessel'sche oder Clarke'sche Ellipsoid) und wählt als Lotlinien der Referenzfläche deren Normalen. Die Abbildung der Punkte des Geoids auf die Referenzfläche muss so geschehen, dass die Winkel entsprechender Normalebenen auf beiden Flächen gleich werden, wozu nötigenfalls die Methode der kleinsten Quadrate zu verwenden ist. Es zeigt sich dann, dass, wenn die Ausdehnung des betrachteten Teils des Geoids ein paar hundert Kilometer nicht überschreitet, die Differenzen der Horizontalwinkel auf dem Geoid und auf der Referenzfläche so gering sind, dass sie innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler bleiben.

Ist nun diese Abbildung als bekannt vorausgesetzt, so gestatten die vorher entwickelten Methoden, die Gestalt des Geoids aus der der Referenzfläche abzuleiten, und mit der Durchführung dieses Gedankens und den dazu erforderlichen Rechnungen beschäftigt

sich der Verfasser im letzten Teile seiner Abhandlung. Er kritisirt zum Schluss die Frage, wie weit man berechtigt ist, einen kleinen Teil des Geoids als seiner Abbildung auf die Referenzfläche ähnlich anzusehen, was durch Hinzunahme astronomischer Messungen entschieden werden kann. A.

---

J. Sochocki. Ueber geodätische Linien. Prace mat.-fiz. III. 82-109. (Polnisch.)

Gründet man die Definition der geodätischen Linien auf den Satz, dass ihre Schmiegungsebene in jedem Punkte der Curve auf der Fläche normal steht, so erhält man die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien auf der Fläche mit zwei willkürlichen Parametern $C$ und $C'$. Nimmt man zwischen diesen eine willkürliche Beziehung $C' = \varphi(C)$ an, so bleibt nur ein Parameter, und die verschiedenen Werte des letzteren ergeben das „System der geodätischen Linien". Aus den Eigenschaften dieses Systems fliessen alle Grundeigenschaften der geodätischen Linien. Dies in einer einfachen und übersichtlichen Weise zu zeigen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Auf Besonderheiten der Abhandlung gehen wir nicht ein. Dn.

---

Th. Caronnet. Sur les centres de courbure géodésique. C. R. CXV. 589-592.

Im unmittelbaren Anschluss an die Darboux'schen Bezeichnungen und Methoden entwickelt der Verfasser einige Eigenschaften der Mittelpunkte der geodätischen Krümmung.

Ist auf einer Fläche ein orthogonales Parametersystem gegeben, und ist

$$ds^2 = A^2du^2 + C^2dv^2$$

das Quadrat des Linienelementes, so sind die Radien der geodätischen Krümmung der Parameterlinien bezw. gleich $-AC:\frac{\partial A}{\partial v}$ und $+AC:\frac{\partial C}{\partial u}$. Die Geraden, welche die entsprechenden Mittelpunkte der geodätischen Krümmung $G$ und $G_1$ verbinden, umhüllen eine

Congruenz von Normalen, wenn die entsprechenden geodätischen Krümmungen Functionen von einander sind.

Ein Gleiches gilt von einer Geraden $CG'$, welche einen Hauptkrümmungsmittelpunkt der ersten Krümmung mit dem Mittelpunkte der zweiten geodätischen Krümmung verbindet. Hieraus lassen sich einige interessante Folgerungen über Flächen mit circularen Krümmungslinien ziehen. A.

---

Th. Caronnet. Note sur les trajectoires isogonales d'une famille quelconque de courbes tracée sur une surface. S. M. F. Bull. XX. 115-117.

Es wird der Satz bewiesen, dass in jedem Punkte einer Fläche die Centra der geodätischen Krümmung aller Familien $(F)$ isogonaler Trajectorien einer Curvenfamilie $(C)$ auf einer Geraden $(D)$ liegen. Hieran schliessen sich einige Bemerkungen. Bm.

---

A. Demoulin. Sur la relation qui existe entre les courbures de deux surfaces inverses. Darboux Bull. (2) XVI. 268-270.

Geht die Fläche $\Sigma$ aus der Fläche $\Sigma'$ durch eine Inversion mit dem Centrum $O$ hervor, und sind $A$ und $A'$ entsprechende Punkte der Flächen, so bilden die Normalen $AN$ und $A'N'$ der Flächen denselben Winkel $u$ mit dem Radius $OAA'$. Zwei Normalschnitte $NAT$ und $N'A'T'$ mögen nun correspondirend heissen, wenn die Tangenten $AT$ und $A'T'$ sich schneiden. Die Krümmungsradien $R$ und $R'$ correspondirender Normalschnitte stehen dann nach Paul Serret in der Beziehung $\frac{OA}{R}+\frac{OA'}{R'}=\text{const.}$ Der Verfasser vervollständigt diesen Satz, indem er zeigt, dass const. $=2\cos u$ ist. Die Relation $\frac{OA}{R}+\frac{OA'}{R'}=2\cos u$ lässt sich noch in andere Form bringen und zeigt unmittelbar, dass die Krümmungslinien der Flächen $\Sigma$ und $\Sigma'$ einander entsprechen.

Hz.

A. Demoulin. Sur les relations qui existent entre les éléments infinitésimaux de deux surfaces polaires réciproques. C. R. CXIV. 1102-1104.

In sechs Nummern wird eine Reihe von neuen Beziehungen zwischen den Elementen der Krümmung in zwei entsprechenden Punkten zweier reciprok-polaren Flächen ohne Entwickelung angegeben. Die interessantesten dieser Relationen sind die folgenden.

Ist in einem Punkte, in welchem eine Gerade $(D)$ eine algebraische Fläche trifft, $\varphi$ der Winkel der $(D)$ mit der Normale in diesem Punkte an die Fläche, sind $R_1$ und $R_2$ die beiden Hauptkrümmungsradien und $U$ der Winkel, welchen die Tangente an die zu $R_1$ gehörige Krümmungslinie mit der Senkrechten auf die Ebene von $(D)$ und der Normale bildet, so folgt:

$$\Sigma[\sin^2 U(R_1\cos^2\varphi+R_2)+\cos^2 U(R_1+R_2\cos^2\varphi)]\cos\varphi = 0$$

und

$$\Sigma\left[\sin^2 U\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\cos^2\varphi}{R_2}\right)+\cos^2 U\left(\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\right]\frac{1}{\cos^3\varphi} = 0,$$

wo die Summen sich auf alle Schnittpunkte der Geraden mit der Fläche beziehen. Dieses Theorem, welches sich für developpable Flächen wesentlich vereinfacht, lässt mehrere interessante Eigenschaften der kubischen und der biquadratischen Raumcurven erster Species erkennen, welche der Autor anführt. Bm.

---

A. v. Baecklund. Anwendung von Sätzen über partielle Differentialgleichungen auf die Theorie der Orthogonalsysteme, insbesondere die der Ribaucour'schen cyklischen Systeme. Math. Ann. XL. 194-260.

Herr Ribaucour hat zuerst (C. R. LXVII, LXX, LXXVI) jene Orthogonalsysteme von Flächen behandelt, die cyklische Systeme heissen, und Herr Bianchi hat diese Untersuchungen mit grossem Erfolge weitergeführt (Giorn. di Mat. XXI, XXII, 1883). Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, die aus der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei Variabeln und dritter Ordnung mit drei Veränderlichen teils längst

bekannten, teils von ihm selbst (Math. Ann. XIII und XV und vorliegende Abhandlung) entwickelten Eigenschaften auf gewisse Differentialgleichungen, die zur Bestimmung genannter Systeme von ihm aufgestellt werden, in Anwendung zu bringen.

Hierdurch wird der Verfasser in den Stand gesetzt, einerseits die schon bekannten Eigenschaften der cyklischen Systeme in völlig neuer Darstellung übersichtlich zu entwickeln, andererseits eine Reihe von neuen Sätzen aufzufinden, welche die bisherigen Kenntnisse wesentlich ergänzen.

Zur eingehenden Orientirung über den Inhalt müssen wir auf die Abhandlung selbst verweisen, da sich ein übersichtlicher Auszug derselben nicht wohl geben lässt. Bm.

---

L. Bianchi. Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 3-12.

L. Bianchi. Sulla trasformazione di Bäcklund pei sistemi tripli ortogonali pseudosferici. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 156-161.

Die bekannten geometrischen Constructionen, durch welche man von einer pseudosphärischen Fläche zu einer anderen gelangt, erfordern bei jeder neuen Anwendung mindestens die Ausführung einer Quadratur.

In der ersten Arbeit zeigt der Verfasser, dass es genügt, alle benachbarten transformirten complementären und Bäcklund'schen Flächen zu einer pseudosphärischen Anfangsfläche zu kennen, weil die successive Anwendung der Transformationsmethoden durch blosse algebraische Rechnungen und Differentiationen geschieht. Ueberdies gewinnt man für alle Flächen der so erhaltenen unendlichen Gruppe die Gleichungen der geodätischen Linien in endlicher Form ohne irgend eine Integration. Dasselbe lässt sich freilich auch durch gewisse Lie'sche Transformationen erreichen, deren geometrische Bedeutung aber nicht immer erkennbar ist.

In der zweiten kurzen Note wird die Betrachtung auf dreifach pseudosphärische Orthogonalsysteme ausgedehnt. A.

L. Lévy. Sur les systèmes triplement orthogonaux où les surfaces d'une même famille sont égales entre elles. Journ. de Math. (4) VIII. 351-383.

Der Verfasser geht aus von der von Herrn Maurice Lévy aufgestellten partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, durch welche die Bedingung ausgedrückt wird, dass die mit dem Parameter $u$ variirende Fläche, deren Gleichung $\varphi(x, y, z, u) = 0$ ist, die eine Schar eines dreifach orthogonalen Systems beschreibt oder, wie er dies ausdrückt, eine Lamé'sche Familie bildet. Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man die Fläche nicht auf ein festes, sondern auf ein gewisses mit dem Parameter $u$ bewegliches Coordinatensystem bezieht, wie dies von Herrn Darboux in einer Abhandlung Ann. de l'Éc. Norm. 1878 (F. d. M. X. 1878. 500) zuerst gezeigt ist. Er wendet diese Gleichung nun zur Aufsuchung solcher Fälle an, wo die Familie durch Bewegung einer Fläche von unveränderter Gestalt gebildet wird. Die Analyse geht zwar von einfachen Grundlagen aus, erfordert aber zu ihrer Anwendung bisweilen recht umständliche Rechnungen, so dass auch nur eine Andeutung derselben in diesem Bericht unthunlich ist. Dagegen mögen folgende Resultate hier Platz finden, wobei solche Resultate, welche bereits bekannt sind, fortgelassen wurden.

Lässt man einen Kreis sich so bewegen, dass die Axe des Kreises immer dieselbe bleibt, während der Kreis gleichzeitig sich in sich selbst dreht, so beschreibt eine mit dem Kreise starr verbundene Kreisevolvente eine Fläche, die bei einer passenden Bewegung mit gleicher Verschiebungs- und Drehaxe eine Lamé'sche Familie erzeugt. Die Gestalt dieser Fläche ist von einer willkürlichen Function abhängig. Bei der Aufsuchung solcher Flächen, die das Problem lösen und von zwei willkürlichen Functionen abhängen, findet der Verfasser zunächst nur eine imaginäre Lösung. Im Anschluss ergiebt sich eine Fläche, welche die Eingehüllte von Kugeln ist, deren Mittelpunkte eine willkürliche ebene Curve beschreiben, und deren Radien sich nach einem bestimmten Gesetze ändern. Diese Fläche erzeugt bei einer Translation senkrecht zur Ebene der Curve eine Lamé'sche Familie, sie hängt aber nur von einer willkürlichen Function ab.

Endlich ergiebt sich das folgende Resultat:

Eine Fläche, welche durch eine Schar von Kugeln erzeugt wird, eine Symmetrieebene besitzt und die Eigenschaft hat, dass die senkrechte Projection einer Geraden $\Delta$ der Symmetrieebene auf jede der circularen Krümmungslinien (der Durchschnitte consecutiver Kugeln) eine Schar von constanter Länge bestimmt, beschreibt bei einer Translation parallel $\Delta$ eine Lamé'sche Familie, und die beiden zugehörigen Scharen des dreifachen Orthogonalsystems lassen sich durch Quadraturen bestimmen. A.

---

L. Lévy. Sur certaines surfaces formant des systèmes triplement orthogonaux. S. M. F. Bull. XX. 15-16.

Anschliessend an analoge Resultate von Darboux und Petot, giebt der Verfasser drei neue Flächenfamilien an, von denen er (ohne Nachweis) aussagt, dass jede einem dreifach orthogonalen Flächensystem zugehört. H.

---

de Salvert. Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme. Note V. Sur une démonstration élémentaire du théorème d'Abel pour le cas particulier des fonctions hyperelliptiques, renfermé implicitement dans les résultats de la note III précédente. Brux. S. sc. XVI B. 273-366.

Der Verfasser stellt in selbständiger Weise den im Principe in einer früheren Note enthaltenen Beweis dar; er giebt verschiedene Anwendungen oder Bestätigungen der gefundenen Ergebnisse. Zuletzt benutzt er dieselbe Methode zum Beweise des Additionstheorems für die drei elliptischen Integrale (vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 804). Mn. (Lp.)

---

K. Zorawski. Ueber Biegungsinvarianten. Eine Anwendung der Lie'schen Gruppentheorie. Acta Math. XVI. 1-64.

Der Verf. beschäftigt sich auf Grund Lie'scher Methoden und

Sätze mit „Biegungsinvarianten“, d. h. solchen Functionen des Ortes in einer Fläche, welche bei jeder Biegung der Fläche in jedem Orte ihren ursprünglichen Zahlenwert behalten.

Der grössere Teil der Arbeit ist der Bestimmung der Anzahl der (unabhängigen) Biegungsinvarianten verschiedener Ordnungen gewidmet. (Vergl. auch F. d. M. XXIII. 1891. 805ff.)

Für die einfachsten Fälle werden sodann durch Integration vollständiger Systeme die bisher bekannten Biegungsinvarianten auf neuem Wege wiedergewonnen.

Der grundlegende Satz ist, dass die Berechnung der Biegungsinvarianten zurückkommt auf die der Differentialinvarianten einer gewissen unendlichen Gruppe $G$.

Die zu diesem Behuf erforderliche „Erweiterung“ von $G$ kann aber noch in verschiedener Richtung vorgenommen werden.

Schreibt man nämlich das Quadrat des Linienelements der Fläche in der Gauss'schen Form:

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2,$$

so kann $G$ erweitert werden:

1) in Bezug auf die Differentialquotienten von $E$, $F$, $G$ nach $x$, $y$;

2) in Bezug auf die Differentialquotienten von (im übrigen willkürlichen) Functionen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\dots$, $\varphi_m$ von $x$, $y$, welche die Eigenschaft haben, bei allen Transformationen von $G$ ihren Zahlenwert nicht zu verändern;

3) in Bezug auf die Differentialquotienten von $y$ nach $x$, $y$ als Function von $x$ betrachtet.

Je nachdem gelangt man so, bei Berücksichtigung der Differentialquotienten bis zur $n^{\text{ten}}$ Ordnung incl., zu drei verschiedenen Gruppen:

1) der Gauss'schen $n^{\text{ten}}$ erweiterten Gruppe,

2) der Beltrami'schen $n^{\text{ten}}$ erweiterten Gruppe,

3) der Minding'schen $n^{\text{ten}}$ erweiterten Gruppe.

Aus diesen setzt sich endlich eine vierte, „die allgemeine $n^{\text{te}}$ erweiterte Gruppe“, zusammen.

In erster Linie wird die Gauss'sche Gruppe untersucht. Die wichtigste Frage ist hierbei die nach der Unabhängigkeit ihrer Gleichungen. Es ergiebt sich, dass, wenn die Gleichungen der $n^{\text{ten}}$

erweiterten Gruppe unabhängig sind, dasselbe auch für die Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ gilt.

Es zeigt sich aber, dass bereits für $n=3$ Unabhängigkeit eintritt.

Daraus werden Schlüsse auf die Anzahl der Gauss'schen Biegungsinvarianten gezogen.

Es giebt keine solche nullter und erster Ordnung, eine einzige zweiter Ordnung und allgemein $n-1$ solche von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung.

Bei den übrigen Gruppen zeigen sich einzelne Abweichungen: so z. B. sind die Gleichungen jeder erweiterten Beltrami'schen Gruppe alle von einander unabhängig, und da diese Gleichungen zugleich vollständige Systeme sind, kann man die Anzahl ihrer Lösungen berechnen. Demgemäss existiren (für $n>4$) $(n+1)m$ Beltrami'sche Biegungsinvarianten $n^{\text{ter}}$ Ordnung, wo $m$, wie oben, die Anzahl der eintretenden willkürlichen Parameter bezeichnet.

Für die Minding'schen Gruppen ist die Grundlage eine ganz analoge; für $n>4$ giebt es immer nur eine Biegungsinvariante.

Endlich die allgemeine erweiterte Gruppe liefert, ausser den schon genannten, keine neuen Biegungsinvarianten.

Bezüglich der Berechnung der einfachsten Invarianten durch Integration vollständiger Systeme sei nur bemerkt, dass, obwohl diese Systeme keine Jacobi'schen sind, dennoch die Jacobi'sche Methode auf sie anwendbar ist, sobald man die Gleichungen des Systems in einer bestimmten Reihenfolge integrirt. My.

---

A. Tresse. Sur les invariants différentiels d'une surface par rapport aux transformations conformes de l'espace. C. R. CXIV. 948-950.

Nach Lie genügt, um alle Differentialinvarianten einer Gruppe zu besitzen, die Kenntnis einer endlichen Anzahl unter ihnen. Der Verf. betrachtet insbesondere die Gruppe $G_{10}$ (mit zehn Parametern) der conformen Punkttransformationen des Raumes und deren Differentialinvarianten in dem Sinne, dass eine Coordinate $z$ eine Function der beiden andern $x, y$ ist. Man kann $z$ derart nach Potenzen von $x$ und $y$ entwickeln, dass die Coefficienten direct die Differen-

47*

tialinvarianten der in der $G_{10}$ als Untergruppe enthaltenen Bewegungsgruppe werden: von diesen hängen wiederum die gewünschten Invarianten der $G_{10}$ ab. My.

---

H. Ruoss. Die Invarianten der Biegung. Böklen Mitt. V. 29-33.

Der Verf. giebt einen einfacheren Beweis dafür, dass das Gauss'sche Krümmungsmass eine „Biegungsinvariante" ist. Man ziehe um einen Punkt einer Fläche einen geodätischen Kreis mit dem Radius $s$. Der geodätische Kreis bleibt nicht nur als solcher, sondern auch nach Radius und Umfang bei Biegung der Fläche unverändert. Entwickelt man also vor der Deformation den Umfang des Kreises nach Potenzen von $s$ und ebenso nach der Deformation, so müssen beide Reihen identisch sein. Hieraus ergiebt sich das Gewünschte. Bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems gestaltet sich die Rechnung elegant. My.

---

A. Wangerin. Ueber die Abwickelung von Rotationsflächen mit constantem negativen Krümmungsmass auf einander. Deutsche Math.-Ver. I. 71-72.

Es wird eine neue Methode angegeben, welche zur Aufstellung der endlichen Formeln für die Abwickelung einer Rotationsfläche mit constantem negativen Krümmungsmass auf die Pseudosphäre die Theorie der geodätischen Polarcoordinaten nicht benötigt, sondern sich zu diesem Zwecke der allgemeinsten Gleichungen für die conforme Abbildung beider Flächen auf einander bedient.

Bm.

---

P. Stäckel. Ueber bedingte Biegungen krummer Flächen. Deutsche Math.-Ver. I. 70.

Wenn eine Flächenschar $U(x, y, z) = a$ gegeben ist, so kann man sich die für die Dynamik wichtige Frage stellen, ob es eine Fläche giebt, die sich stetig so biegen lässt, dass ihre Punkte bei der Biegung stets auf der Fläche der Schar bleiben, auf der sie ursprünglich lagen. Den Fall, dass $U = a$ eine Schar paralleler

Ebenen bedeutet, hat der Verfasser in seiner Dissertation „Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche", Berlin 1885, erledigt. Ein weiteres Beispiel giebt der Schwarz'sche Satz, dass jede Minimalfläche sich stetig so biegen lässt, dass sie Minimalfläche bleibt. Wird ein Punkt der Fläche festgehalten, so beschreiben die andern bei der Biegung Ellipsen, die in Ebenen liegen, welche durch jenen Punkt gehen. Die Richtigkeit der Umkehrung dieses Satzes verspricht der Verfasser an anderer Stelle zu beweisen.

Bm.

A. Voss. Ueber äquidistante Curvensysteme auf krummen Flächen. Katal. d. Math. Ausst. München. 16-26.

Der Aufsatz enthält zum Teil eine Recapitulation, zum Teil eine Erweiterung der Resultate, welche der Verf. in Math. Ann. XIX („Ueber ein Princip der Abbildung krummer Oberflächen"; vgl. F. d. M. XIII. 1881. 562) veröffentlicht hat. Die einzelnen Paragraphen sind überschrieben: I. Allgemeine Eigenschaften äquidistanter Curvensysteme. II. Bestimmung äquidistanter Systeme auf einzelnen Flächengattungen. III. Processe, durch welche aus einer äquidistant geteilten Fläche andere ebenso geteilte Flächen hergeleitet werden. IV. Flächen, welche die Diagonalcurven eines äquidistanten Systems zu Krümmungslinien haben. V. Flächen, deren Krümmungslinien in mehrfacher Weise die Diagonalcurven äquidistanter Netze bilden. Lp.

R. Lipschitz. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Darboux Bull. (2) XVI. 206-208.

Die Mitteilung betrifft die Aufsuchung von Abbildungsparametern (thermischen Parametern) für eine beliebig gegebene Fläche.

Das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = EdP^2 + 2FdPdQ + GdQ^2$$

lässt sich in ein Product von zwei conjugirten linearen Differentialausdrücken verwandeln, deren jedes für eine sogenannte Nulllinie verschwindet und durch Zufügung eines integrirenden Factors $e^{-\alpha-\beta i}$ zu einem vollständigen Differential wird. Stellt man hierfür die

Bedingungsgleichung auf, so ergeben sich nach Trennung des Reellen vom Imaginären zwei lineare Partialgleichungen erster Ordnung für $\alpha$ und $\beta$ und durch Elimination von $\beta$ schliesslich eine Partialgleichung zweiter Ordnung für $\alpha$, welche sich so schreiben lässt:

$$\delta''(\alpha)+k=0.$$

Hierin bedeutet $\delta''(\alpha)$ den Differentialparameter zweiter Ordnung der Function $\alpha$ in Bezug auf das Quadrat des Linienelementes, $k$ das Krümmungsmass der Fläche, welches in der Liouville'schen Form erscheint. Ist $\alpha$ bekannt, so ist die Bestimmung aller übrigen Grössen auf Quadraturen zurückgeführt, und es geht $ds^2$ über in die Form

$$ds^2 = e^{-2\alpha}[dU^2+dV^2],$$

so dass $U$ und $V$ Abbildungsparameter sind.

Für $k=0$ (also abwickelbare Flächen) ergiebt sich eine Lösung $\alpha=0$.

Für andere Fälle scheint eine Integration nicht gelungen zu sein, so dass man über die bekannten Lösungen des Problems nicht hinaus zu kommen scheint. Immerhin ist aber die übersichtliche Form der Differentialgleichung bemerkenswert. Sie kann vielleicht den Weg zu allgemeineren Lösungen bahnen. A.

---

L. Raffy. Sur une transformation des formules de Codazzi et sur les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces à courbure moyenne constante. S. M. F. Bull. XX. 47-49.

Der Verfasser führt zunächst eine Transformation der sogegenannten Codazzi'schen Formeln aus und macht von derselben eine Anwendung, nämlich auf den Beweis des Satzes von O. Bonnet: Auf eine gegebene Fläche von constanter mittlerer Krümmung lassen sich unendlich viele Flächen derselben Art abwickeln, und knüpft daran noch einige Bemerkungen. A.

---

L. Raffy. Sur le problème général de la déformation des surfaces. C. R. CXIV. 1407-1409.

Anwendung der Formeln von Codazzi zur Lösung des Problems: Alle Flächen zu finden, für welche

$$ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2$$

ist, wo $A$ und $C$ gegebene Functionen von $u$ und $v$ sind.

A.

---

E. Cosserat. Sur la déformation infinitésimale et sur les surfaces associées de M. Bianchi. C. R. CXV. 1252-1255.

Sind $M$ und $M_1$ entsprechende Punkte zweier auf einander abwickelbaren Flächen, und ist $A$ die Mitte ihrer Verbindungslinie; ist ferner $AA'$ eine Strecke dieser Geraden von der Grösse $\varepsilon . AM$, wo $\varepsilon$ unendlich klein ist, so ist die Fläche $A'$ auf $A$ abwickelbar. Legt man endlich von einem festen Punkte $O$ aus die Strecke $Oa$ gleich $AM$, so entspricht die Fläche $(a)$ der Fläche $(A)$ nach Orthogonalität der Elemente. Diese Sätze bilden den Ausgangspunkt der in der Note enthaltenen Betrachtungen, welche zu einigen weiteren Resultaten führen. A.

---

A. Petot. Sur les systèmes conjugués et les couples de surfaces applicables. C. R. CXV. 1250-1252.

Sind zwei Flächen $S$ und $S_1$ in irgend einer Weise auf einander abgebildet, so dass jedem Punkte $M$ ein Punkt $M_1$ entspricht, so giebt es in jedem Punkte $M$ zwei solche Richtungen, die senkrecht stehen auf den conjugirten Richtungen der ihnen in der Abbildung entsprechenden, und ebenso giebt es in $M_1$ zwei solche Richtungen, für welche das Analoge gilt. Die Note beschäftigt sich mit einigen weiteren Betrachtungen über diese Beziehungen.

A.

---

A. Cayley. Note on the skew surfaces applicable upon a given skew surface. Lond. M. S. Proc. XXIII. 217-225.

Das Problem der Biegung einer Regelfläche auf eine gegebene Regelfläche, so dass die erzeugenden Geraden einander entsprechen, ist von Bonnet bereits betrachtet. Der Verfasser resumirt in dieser

Abhandlung jene Betrachtung, indem er einen grösseren Gebrauch von der Strictionslinie macht.

Die Aufsuchung der Biegungsflächen führt auf ein System von fünf Gleichungen zwischen sechs unbekannten Functionen einer Variable und ihren ersten Ableitungen. Es muss also noch eine Bedingung hinzutreten, um zu einem bestimmten Problem zu gelangen. Wählt man als sechste Bedingung z. B. die, dass die Erzeugenden der gesuchten Fläche den Erzeugenden eines gegebenen Kegels parallel sind, so lässt sich alles auf Quadraturen zurückführen. Dies wird auf gewisse specielle Fälle angewandt.

A.

---

S. Mangeot. De la loi de correspondance des plans tangents dans la transformation des surfaces par symétrie courbe. C. R. CXIV. 1463-1465.

Man errichte in einem Punkte $m$ einer ebenen Curve $C$ oder einer Fläche $S$ die Normale und construire auf dieser zwei Punkte $m_1$ und $m_2$, welche gleich weit von $m$ abstehen. Diese Punkte nennt der Verfasser zu einander symmetrisch in Bezug auf $C$ oder $S$. Dem entsprechend giebt es in der Ebene und im Raume Curven $C_1$ und $C_2$, welche zu einander symmetrisch sind in Bezug auf $C$ oder $S$, und im Raume Flächen $S_1$ und $S_2$, welche zu einander symmetrisch sind in Bezug auf $S$. Mit diesen Beziehungen hatte sich der Verfasser bereits in einer früheren Abhandlung beschäftigt. Die vorliegende Note behandelt die gegenseitige Beziehung der Tangenten oder Tangentialebenen und führt zu einigen interessanten Folgerungen, die im Zusammenhange stehen mit der Lehre von der Krümmung, und unter denen sich eine speciell auf den Fall bezieht, in welchem $S$ Minimalfläche ist. A.

---

S. Mangeot. Recherche des surfaces admettant la symétrie courbe des surfaces polyédrales. S. M. F. Bull. XX. 84-90.

In dieser Note wendet der Verfasser die in dem vorigen Referat erwähnten Betrachtungen an, um zu untersuchen, welche

Flächen die krumme Symmetrie der Polyedralflächen zulassen, und gelangt dadurch zu mehreren interessanten speciellen Resultaten. A.

---

**S. Lie.** Untersuchungen über Translationsflächen I, II.
Leipz. Ber. XLIV. 447-472, 559-579.

In diesen beiden Abhandlungen, denen noch mehrere folgen sollen, beabsichtigt Hr. Lie, seine sämtlichen Untersuchungen über Translationsflächen, die bisher zum grössten Teile noch nicht veröffentlicht sind, im Zusammenhange darzustellen.

In der ersten Arbeit entwickelt er eine merkwürdige Uebertragung seiner Theorie der Minimalflächen auf beliebige Translationsflächen. Eine Translationsfläche erhält man dadurch, dass man zwei Raumcurven $c_0$ und $k_0$ annimmt, die einen Punkt $p_0$ gemein haben, und dann die eine von beiden Curven — welche von beiden, ist gleichgültig — parallel mit sich derart verschiebt, dass $p_0$ die andere Curve durchläuft. Sind $c_0$ und $k_0$ beliebige Minimalcurven, so wird die Translationsfläche eine Minimalfläche, und zwar erhält man auf diese Weise jede Minimalfläche.

Auf der Translationsfläche liegen $\infty^1$ Curven $c$, die mit $c_0$, und $\infty^1$ Curven $k$, die mit $k_0$ congruent sind. Jede dieser Curvenscharen genügt einer Differentialgleichung von der Form:

$$f(dx, dy, dz) = 0.$$

Besonders wichtig ist nun der Fall, dass diese Differentialgleichung für beide Curvenscharen dieselbe ist. Dann giebt es nämlich eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$(1) \qquad R(p, q)r + S(p, q)s + T(p, q)t = 0,$$

deren Integralflächen, abgesehen von gewissen Kegeln, eben die Translationsflächen sind, bei denen die Curven $c_0$ und $k_0$ die Differentialgleichung $f(dx, dy, dz) = 0$ erfüllen. Es lässt sich überdies beweisen, dass es unter diesen Integralflächen eine ganz bestimmte, durch Quadratur auffindbare giebt, die eine gegebene abwickelbare Fläche längs einer gegebenen Curve berührt.

Die Gleichung $f(dx, dy, dz) = 0$ bestimmt auf der unendlich fernen Ebene eine gewisse Curve $k_\infty$. Ist insbesondere (1) die Differentialgleichung der Minimalflächen, so ist $k_\infty$ der Kugelkreis.

Hr. Lie bezeichnet im allgemeinen Falle $k_\infty$ als Pseudokugelkreis und führt in Bezug auf diesen Pseudokugelkreis gewisse Begriffe: Pseudonormale, Pseudoevolute u. s. w. ein, die den entsprechenden Begriffen in Bezug auf den gewöhnlichen Kugelkreis analog sind. Mit Hülfe dieser Begriffe gelingt es ihm, sobald $k_\infty$ algebraisch ist, alle algebraischen Integralflächen von (2) zu bestimmen, die einem beliebigen algebraischen Kegel eingeschrieben sind. Kennt man andererseits eine algebraische Integralfläche von (2), die einer gegebenen algebraischen abwickelbaren Fläche eingeschrieben ist, so kann man alle übrigen algebraischen Integralflächen von dieser Beschaffenheit angeben.

In der zweiten Abhandlung beschäftigt sich Hr. Lie zunächst mit der speciellen Gleichung $s=0$ und löst die Aufgabe, alle ihre algebraischen Integralflächen zu finden, die einer gegebenen algebraischen abwickelbaren Fläche eingeschrieben sind. Es ist das im wesentlichen der Inhalt einer schon 1879 im norwegischen Archiv veröffentlichten Arbeit (s. F. d. M. XI. 586); es wird aber daraus der neue Satz hergeleitet, dass durch jede algebraische Raumcurve $\infty^\infty$ algebraische Integralflächen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

gehen, und dass diese alle gefunden werden können. Der übrige Teil der Arbeit ist mehr historischen Inhalts. Hr. Lie berichtet darin über seine älteren Untersuchungen über gewisse Klassen von partiellen Differentialgleichungen. El.

---

L. Lecornu. Sur une question de limite concernant la théorie des surfaces. Darboux Bull. (2) XVI. 307-311.

Es giebt im allgemeinen keine reellen Flächen, welche einen Büschel gegebener Curven rechtwinklig schneiden, während es unendlich viele solche Flächen giebt, wenn der Schnittwinkel von einem Rechten verschieden und übrigens beliebig ist. Da der erstere Fall als Grenzfall des letzteren aufgefasst werden kann, so liegt es nahe, die Frage zu untersuchen, wie beschaffen die Trajectorienflächen ausfallen, wenn sich der Winkel unendlich wenig von einem

Rechten unterscheidet. Als Resultat ergiebt sich, dass immer Orthogonaltrajectorien eines gegebenen Curvenbüschels existiren, aber dass die reellen Partien dieser Flächen im Verschwinden begriffen sind und sich auf isolirte Punkte oder Linien reduciren.

Bm.

---

L. Lecornu. Sur les surfaces d'égale incidence. Assoc. Franç. Pau XXI. 172-177.

Unter Bezugnahme auf seinen Aufsatz in Darboux Bull. (vergl. das vorangehende Referat) sucht der Verf. die allgemeinste Oberfläche, welche die von einem festen Punkte ausgehenden Strahlen unter einem constanten Winkel schneidet, und findet, dass dieselbe durch eine logarithmische Spirale von constanter Grösse erzeugt werden kann, die den festen Punkt als Pol besitzt, und deren Ebene sich auf einem beliebigen festen Kegel wälzt, der diesen Punkt zum Scheitel hat. Eine solche Oberfläche besitzt, wie die logarithmische Spirale, die Eigenschaft, sich durch eine Menge von Transformationen wieder zu erzeugen. Wenn der Pol sich ins Unendliche entfernt, so artet die obige Fläche in eine Oberfläche gleicher Steigung aus. Ein ziemlich merkwürdiger besonderer Fall wird erhalten, wenn man die Bedingung hinzunimmt, dass zwei feste, zu einander senkrechte Ebenen auf den Erzeugenden eine Strecke von constanter Länge abschneiden. Die Rückkehrkante ist dann eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, der zum senkrechten Querschnitte eine vierspitzige Hypocykloide besitzt, deren Ebene zur Schnittgeraden der beiden festen Ebenen senkrecht ist. Diese schneiden die Oberfläche längs zwei congruenten Parabeln, deren Axen in die Schnittgerade der beiden Ebenen fallen, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Die Oberfläche gleicher Steigung wird also in diesem Falle durch eine Gerade von constanter Länge erzeugt, deren Endpunkte auf zwei congruenten Parabeln gleiten.

Lp.

---

Ch. Bioche. Sur les surfaces réglées qui se transforment homographiquement en elles-mêmes. Soc. Philom. Bull. (8) IV. 130-133.

Kurze Uebersicht über Studien, deren Resultate der Verfasser der Soc. Philom. und der S. M. F. mitgeteilt hat. Das Fundament dieser Untersuchungen bildet folgende Betrachtung: Ist eine Raumcurve definirt durch die Gleichungen

$$\text{(H)} \qquad x_i = h_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so kann man nach Halphen (Mém. d. savants étr. XXVIII und Acta Math. III, vgl. F. d. M. XVI. 1884. 266) dieser Gleichung eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung zuordnen, so dass die $h_i$ vier unabhängige Lösungen dieser Gleichung sind.

Jedem Lösungssystem derselben entspricht eine Curve, und die verschiedenen Curven, welche derselben Gleichung zugehören, sind projectivisch auf einander bezogen. Nimmt man desgleichen eine Curve

$$\text{(G)} \qquad x_i = g_i(\lambda)$$

und bildet die vier Gleichungen:

$$x_i = \mu h_i(\lambda) + g_i(\lambda),$$

so kann man die $g_i(\lambda)$ so wählen, dass diese letzteren eine Regelfläche darstellen, deren nicht geradlinigen Asymptotencurven die Curven $\mu =$ const. sind (Koenigs: C. R. CVI. 1888. 51-54, vgl. F. d. M. XX. 1888. 786). Sucht man nun die Bedingungen, unter welchen diese beiden Curven (G) und (H) derselben Differentialgleichung zugehören, so ist dieses Problem identisch damit, „diejenigen Regelflächen zu finden, welche sich projectivisch in einander transformiren“. Der Verfasser findet zwei verschiedene Kategorien solcher Flächen, für welche er eine geometrische Erzeugung angiebt.

Bm.

---

G. Pirondini. Nota sulle superficie modanate. Batt. G. XXX. 188-191.

„Modanirte“ Flächen werden von einer ebenen Curve unveränderlicher Gestalt erzeugt, indem deren Ebene, ohne zu gleiten, auf einer Abwickelbaren rollt. Zu denselben Flächen führt aber auch eine zweite Entstehungsweise. Der Nachweis bildet den Inhalt des Gegenwärtigen. Eine ebene Curve $C$ rotire um einen festen Punkt $A$ ihrer Ebene, und diese Ebene rücke so fort, dass,

während sie normal zu einer Raumcurve $L$ bleibt, der Punkt $A$ die Curve $L$ durchläuft; zugleich falle eine auf die Ebene von $C$ gezeichnete und durch $A$ gehende feste Gerade beständig mit der Hauptnormale von $L$ zusammen. Wenn diese zwei Bewegungen so stattfinden, dass das Verhältnis der Geschwindigkeit des Punktes $A$ auf $L$ zur Rotationsgeschwindigkeit von $C$ um $A$ gleich dem Torsionsradius von $L$ ist, so ist die von $C$ erzeugte Fläche eine modanirte Fläche und $C$ ihr Profil. H.

---

A. Boulanger. Note sur les surfaces à génératrice circulaire. Nouv. Ann. (3) XI. 159-163.

Eine von einem (in Mittelpunkt, Ebene und Radius veränderlichen) Kreise erzeugte Fläche hat, wie hier die Rechnung ergiebt, nur in zwei Fällen die Eigenschaft, dass ihre Berührungsebenen längs jedem erzeugenden Kreise von einem Kegel umhüllt werden: 1) wenn sie eine Schar von Kugeln einhüllt (d. i. wenn die Bahn des Mittelpunkts die Kreisebene normal schneidet); 2) wenn die Kreisebene einer festen Ebene parallel bleibt (einer Fläche, die Astor untersucht hat). H.

---

R. Hoppe. Zur Theorie der Regelflächen. Hoppe Arch. (2) XI. 218-224.

Denkt man sich auf einer Regelfläche eine beliebige Curve gezogen, und bestimmt man in jedem Punkte die Fundamentalaxen derselben, also Tangente, Hauptnormale und Binormale, so hat die durch denselben Punkt gehende Erzeugende der Regelfläche eine ganz bestimmte Lage zu diesen drei Axen, ist also eine gewisse, die betrachtete Curve begleitende Gerade. Die aus dieser Auffassung sich ergebenden Beziehungen und Bestimmungsweisen werden untersucht. A.

---

R. Hoppe. Construction einer Regelfläche aus gegebener Strictionslinie. Hoppe Arch. (2) XI. 345-348.

Das vollständige System von Regelflächen, welche eine gege-

bene Curve zur gemeinsamen Strictionslinie haben, wird analytisch dargestellt, dann das Resultat geometrisch interpretirt, und endlich der Weg für die Construction einer beliebigen Regelfläche beschrieben. Scht.

---

**Ch. Bioche.** Sur certaines surfaces à plan directeur. Darboux Bull. (2) XVI. 159-160.

Die geradlinigen Flächen mit Leitebenen kann man durch die Thatsache kennzeichnen, dass die eine der Scharen asymptotischer Linien durch die Schnitte der Oberfläche mit einer Ebene gegeben wird, welche man parallel zur Leitebene verschiebt. Der Verf. hat entdeckt, dass für gewisse besondere Flächen auch die andere Schar durch die Schnitte mit einer an Gestalt und Grösse unveränderlichen Oberfläche geliefert werden kann, die eine Verschiebung parallel zu einer Geraden der Leitebene in fester Richtung erfährt. Diese Eigenschaft kommt allen Oberflächen zu, deren Erzeugende einer singulären linearen Congruenz angehören, welche ihre Directrix im Unendlichen hat. Lp.

---

**H. Bentobal y Ureta.** Teoría elemental de las superficies regladas. Madrid. 23 S.

---

**Ed. Weyr.** Zur Flächentheorie. Prag. 1891. (Böhmisch.)

Diese mit dem Jubiläumspreis der Königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften ausgezeichnete Monographie enthält in acht Capiteln eine allseits erweiterte, ausführlich behandelte Aufgabe, welche in kurzer Fassung unter dem Titel „Sur l'arrangement des plans tangents de certaines surfaces“ im Jahre 1878 in den Mém. de la Soc. d. sc. phys. et math. de Bordeaux erschienen ist. (F. d. M. XI. 1879. 531.) Std.

---

## B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

**W. Dyck.** Gestaltliches über den Verlauf der Haupttangentencurven einer algebraischen Fläche. Deutsche Math. Ver. I. 60-61.

Das System der Haupttangentencurven aller algebraischen Flächen zeigt in gewissen ausgezeichneten Punkten der parabolischen Curve ein besonderes Verhalten (vgl. Münch. Ber. XXI, F. d. M. XXIII. 1891. 739). Geometrisch sind die singulären Stellen der Haupttangentencurven dadurch charakterisirt, dass in ihnen die parabolische Curve einen Wendeberührpunkt besitzt, in welchem die Schmiegungsebene der parabolischen Curve zusammenfällt mit der Tangentialebene an die Fläche. Bm.

---

**M. J. M. Hill.** On the locus of singular points and lines which occur in connection whith the theory of the locus of ultimate intersections of a system of surfaces. Lond. R. S. Phil. Trans. CLXXXIII. 141-278.

In einer Abhandlung „On the $c$-and $p$-discriminants of ordinary integrable differential equations of the first order" (Lond. M. S. Proc. XIX, F. d. M. XXI. 1889. 323) werden die Factoren analytisch bestimmt, welche bei der $c$-Discriminante einer Gleichung von der Form $f(x,y,c)=0$ vorkommen, wo $f(x,y,c)$ eine ganze rationale Function von $x, y, c$ ist, und es wird gezeigt, dass, wenn $E=0$ die Gleichung der Hüllcurve der Curven $f(x,y,c)=0$ ist, $N=0$ die Gleichung des Ortes ihrer Doppelpunkte, $C=0$ die Gleichung des Ortes ihrer Spitzen, dann die Factoren der Discriminante sind: $E$, $N^2$ und $C^3$. Die betrachteten Singularitäten sind solche, die nur von den Gliedern zweiten Grades abhängen, wenn der Coordinatenanfang in dem singulären Punkte liegt.

Der gegenwärtige Aufsatz dehnt diese Ergebnisse auf Oberflächen aus. Es können nicht mehr als zwei willkürliche Parameter vorhanden sein; somit zerfällt die Untersuchung ganz natürlich in zwei Teile, je nachdem ein einziger Parameter vorhanden ist oder

zwei. Die Forschung wird auf den Fall beschränkt, bei welchem die Gleichung rational und ganz ist sowohl in Bezug auf die Coordinaten als auch auf die Parameter. Eine ausführliche Tabelle der Constanten wird S. 274-278 gegeben (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 760).

Cly. (Lp.)

---

P. del Pezzo. Intorno ai punti singolari delle superficie algebriche. Palermo Rend. VI. 139-154.

Der Satz, dass eine einfache oder zusammengesetzte ebene Curve mit einer endlichen Anzahl von singulären Punkten durch die von Cremona herrührende Transformation auf eine solche mit nur gewöhnlichen Singularitäten reducirt werden kann, ist die Grundlage, auf welcher die ganze Theorie der Curvensingularitäten beruht. Der Verf. sucht nachzuweisen, dass ein analoges Theorem für die algebraischen Flächen existirt, welcher Nachweis aber nicht einwandsfrei ist.

Hau.

---

W. Stahl. Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven. Math. Ann. XL. 1-54.

An den Aufsatz „Zur Erzeugung der ebenen rationalen Raumcurven" (Math. Ann. XXXVIII. 561, F. d. M. XXIII. 1891. 754) anschliessend, behandelt der Verfasser hier die rationalen Raumcurven $R_n$ von dem Gesichtspunkte aus, dass zu ihnen zwei Arten von Gebilden perspectivisch sind, nämlich die Regelscharen und die Ebenenbüschel. Beide Gebilde müssen gleichzeitig betrachtet werden, da sie in innigem Zusammenhange mit einander stehen, und diese Betrachtung liefert eine übersichtliche Darstellung der Verteilung jener zu $R_n$ perspectiven Regelflächen im Raume.

Die Coordinaten eines Punktes der rationalen Raumcurve seien gegeben durch:

$$\varrho x_i = \varphi_i = \sum_0^n{}_p a_{ip} \mu^{n-p}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ferner sei

$$\overset{n+r}{F}(\lambda) = \sum_0^{n+r}{}_p \binom{n+r}{p} m_p \lambda^{n+r-p}$$

eine Function $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung in $\lambda$ $(r \leqq n-4)$, deren $r^{\text{te}}$ Polaren sämtlich conjugirt sind zu den vier Formen $\varphi_i$, so ergiebt sich, dass zu jedem $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ eine zu $R_n$ perspective Regelschar $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zugehört. Ist die $R_n$ allgemeiner Natur, bestehen also zwischen den $a_{ip}$ keine wesentlichen Relationen, so giebt es $(n-3r-3)$ lineare unabhängige Functionen $\overset{n+r}{F}(\lambda)$, oder $\infty^{n-3r-4}$ solcher Functionen, welche ein lineares System bilden, und daher auch $\infty^{n-3r-4}$ Regelflächen $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $(3r \leqq n-4)$. Der wichtigste Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ und der zu dieser Form gehörigen, mit $R_n$ perspectiven Regelschar ist durch den folgenden, auch umkehrbaren Satz gegeben:

„Lässt sich eine solche Function darstellen als eine Summe von $v$ $(n+r)^{\text{ten}}$ Potenzen der linearen Functionen $(\lambda-\mu_q)$, so lässt sich durch die Punkte $\mu_q$ von $R_n$ eine zu $R_n$ projective rationale Curve $C_w$ $(w=v-r-2)$ $w^{\text{ter}}$ Ordnung legen, welche mit $R_n$ diese $v$ Punkte entsprechend gemein hat. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Curven liefern die Regelschar $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zu $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ gehört, oder $C_w$ ist auch perspectiv zu dieser Regelschar." Solcher Curven $C_w$ giebt es im allgemeinen $\infty^1$, die zu $R_n$ projectiv sind und mit $R_n$ $(2w+1)$ Punkte entsprechend gemein haben. Diese Curven $C_w$ untersucht der Verfasser sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für eine ganze Reihe specieller Fälle eingehend und bestimmt die Anzahl der ebenen Curven dieser Gattung für verschiedene Zahlenwerte von $v$ und $r$. Damit sind die Mittel gewonnen, um das Verhalten der zu $R_n$ perspectiven Regelscharen gegenüber den Ebenen des Raumes anzugeben; so gelingt es unter anderm, die Anzahl der $d$-fachen Tangentialebenen der Regelflächen $k^{\text{ter}}$ Ordnung sowie die Ordnung des Ebenenbüschels, den sie bilden, und die Klasse der Fläche, die sie umhüllen, zu bestimmen.

Hierauf folgt die Untersuchung der zur $R_n$ perspectiven Ebenenbüschel; die Anzahl der linear unabhängigen unter jenen der $g^{\text{ten}}$ Ordnung beträgt $3g-n+3$.

Die weiter folgende Betrachtung besonderer, zu $R_n$ covarianter

Punktgebilde liefert den Satz, dass der Ort der Punkte, aus welchen $R_n$ in eine ebene Curve $R'_n$ projicirt wird, die mit einer zu ihr projectiven $C_w$ $(3w+3)$ Punkte entsprechend gemein hat, eine Fläche von der Ordnung

$$2(w+1)\binom{n-w-1}{3w+3}$$

ist. Dieser Satz giebt zu einer Reihe von Folgerungen Anlass.

Hieran schliesst sich die Bestimmung der Dimension der Mannigfaltigkeit, welche die zu Regelscharen $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung perspectiven Ebenenbüschel $g^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, sowie der Mannigfaltigkeit aller zu $R_n$ perspectiven Punktebenenbüschel, je nachdem ihr Mittelpunkt in einem beliebigen Raumpunkte, auf einer Ebene, auf einer Geraden oder in einem gegebenen Punkte liegt; und dasselbe wird durchgeführt für jene Ebenenbüschel, welche perspectiv zu einer Regelschar $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und zugleich Punktebenenbüschel sind.

Was ferner die Verteilung der zu $R_n$ perspectiven Regelscharen im Raume anlangt, so werden die Punkte gesucht, in welchen Regelflächen $k^{\text{ter}}$ Ordnung einen $d$-fachen Punkt besitzen. Diese Punkte liegen auf einer Curve, deren Ordnung aufgestellt wird.

Indem der Verfasser des weiteren das Verhalten einer Geraden zur $R_n$ und zu den Regelscharen ins Auge fasst, gelangt er zu den Sätzen, dass es $\infty^{2n-2}$ lineare Complexe $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, welche das Sehnensystem von $R_n$ enthalten, und dass jede Gerade des Raumes, welche $R_n$ nicht schneidet, mit $(n-3r-3)(2r+2)$ zu $R_n$ perspectiven Regelscharen $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $(n-3r-3)$ unendlich nahe Punkte gemein hat.

Von speciellen Curven werden die der dritten, fünften, siebenten und neunten, sowie die Curven der vierten Ordnung eingehend behandelt; es werden ferner die Gattungen rationaler Curven von gegebener Ordnung aufgestellt und in einem Anhange einige algebraische Sätze bewiesen, die bei den vorangehenden Entwickelungen Verwendung fanden. Bm.

---

E. Fabry. Sur une courbe algébrique réelle à torsion constante. C. R. CXIV. 158-161.

Herr Darboux erwähnt in seinen Leçons sur la théorie des surfaces (Livre I. Chap. V), dass man bisher keine Curve constanter Torsion kenne, und dass es interessant wäre, zu untersuchen, ob alle diese Curven transcendent sind. Herr Fabry bedient sich zur Untersuchung dieser Frage der von Darboux gegebenen Gleichungen:

$$x = t\int \frac{ldk-kdl}{h^2+k^2+l^2},$$

$$y = t\int \frac{hdl-ldh}{h^2+k^2+l^2},$$

$$z = t\int \frac{kdh-hdk}{h^2+k^2+l^2},$$

wo $h$, $k$, $l$ drei willkürliche Functionen einer Variable $\vartheta$ sind und $t$ die constante Torsion bedeutet. Indem er nun

$$h = A\cos\lambda\vartheta+\cos\mu\vartheta,\quad k = B\sin\lambda\vartheta+\sin\mu\vartheta,$$
$$l = C\sin\frac{(\lambda+\mu)\vartheta}{2}$$

schreibt, $\frac{\lambda}{\mu}$ als commensurabel voraussetzt und $A$, $B$, $C$ in der Weise bestimmt, dass $h^2+k^2+l^2 = \text{const.}$ ist, und die drei im Zähler der Integrale stehenden Ausdrücke linear und homogen in Bezug auf die Sinus und Cosinus der Vielfachen von $\vartheta$ sind, erhält er eine algebraische Curve. Dieselbe wird geometrisch durch einen Punkt einer Ellipse erzeugt, deren Ebene sich in gleichförmiger Bewegung um die Axe $OZ$ dreht, während der Punkt die Ellipse in der Weise durchläuft, dass der Radiusvector durch das Centrum in seiner Ebene Flächenräume beschreibt, welche proportional der Zeit sind. Die grosse Axe der Ellipse bleibt hierbei beständig in der Ebene $XOY$, und die Rotationsaxe $OZ$ trifft ihre Verlängerung. Eine nähere Untersuchung ergiebt, dass die Curve niedrigster Ordnung, die man auf diese Weise erhalten kann, vom achten Grade ist (vergl. das folgende Referat). Bm.

E. Fabry. Sur les courbes algébriques à torsion constante. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 177-196.

Mit Bezugnahme auf die im vorangehenden Referate besprochene Note, in welcher der Verfasser bereits eine solche Curve ermittelt hat, nimmt er, wie dort, als allgemeine Form der Curven constanter Torsion die Gleichungen an:

$$x = t\int \frac{ldk-kdl}{h^2+k^2+l^2}, \quad y = t\int \frac{hdl-ldh}{h^2+k^2+l^2},$$

$$z = t\int \frac{kdh-hdk}{h^2+k^2+l^2},$$

wo $h$, $k$, $l$ willkürliche Functionen einer und derselben Variable sind. Die Curven werden algebraisch, wenn $h$, $k$, $l$ lineare Functionen vom Cosinus und Sinus der rationalen Vielfachen derselben Variable sind, wenn ferner die Coefficienten so bestimmt werden, dass der Nenner $h^2+k^2+l^2$ constant und die drei Zähler homogen linear in den Cosinus und Sinus der rationalen Vielfachen der einen Variable werden. Es wird dann untersucht, welche unter den unendlich vielen Lösungen reell sind. Die aufgestellten drei Gleichungen zeigen sich als Identitäten, wenn man bei constanter Torsion $t$ die Grössen $h$, $k$, $l$ als Richtungscosinus der Binormale der gesuchten Curve betrachtet. H.

---

A. Demoulin. Sur les courbes tétraédrales symétriques. C. R. CXV. 280-282.

Herr Jamet hat in einem Aufsatze: „Sur les surfaces et les courbes tétraédrales symétriques" (Ann. de l'Éc. Norm., vgl. F. d. M. XIX. 1887. 816) den Satz aufgestellt, dass, wenn eine solche Curve in einem ihrer Punkte $M$ von einer Raumcurve dritter Ordnung, die durch die Spitzen des Symmetrietetraeders geht, berührt wird, das Verhältnis der Krümmung der kubischen Raumcurve und der tetraedralen Curve constant bleibt. Der Verfasser beweist nun, dass die beiden genannten Curven ausserdem gleiche Torsion haben. Bm.

---

## C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

P. Molenbroek. Over de meetkundige voorstelling van imaginaire punten in de ruimte. Nieuw Archief XIX. 113-131.

Sind $x_1+x_2\sqrt{-1}$, $y_1+y_2\sqrt{-1}$, $z_1+z_2\sqrt{-1}$ die Coordinaten eines imaginären Punktes in Bezug auf drei rechtwinklige Axen, so wird derselbe geometrisch gedeutet als die Gesamtheit der reellen Punkte $x,y,z$, für welche die Distanz

$$d=\sqrt{(x-x_1-x_2\sqrt{-1})^2+(y-y_1-y_2\sqrt{-1})^2+(z-z_1-z_2\sqrt{-1})^2}$$

verschwindet, wodurch sich die beiden Gleichungen ergeben

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$
$$x_2(x-x_1)+y_2(y-y_1)+z_2(z-z_1)=0.$$

Der imaginäre Punkt wird somit dargestellt durch einen Kreis, dessen Centrum im Punkte $P_1$ $(x_1, y_1, z_1)$ liegt, dessen Ebene senkrecht ist zu der Geraden, welche den Ursprung $O$ mit dem Punkte $P_2$ $(x_2, y_2, z_2)$ verbindet (Normale des imaginären Punktes), und dessen Radius der Länge dieser Geraden $OP_2$ gleich kommt. Centrum, Ebene und Radius zweier conjugirt imaginären Punkte stimmen überein, die Normalen haben jedoch entgegengesetzte Richtungen. Führt man noch den Punkt mit den Coordinaten $x_1+x_2$, $y_1+y_2$, $z_1+z_2$ als Pol des imaginären Punktes ein, so können zwei conjugirt imaginäre Punkte dadurch unterschieden werden, dass man den Kreis in *der* Richtung durchläuft, welche, von dem Pol des imaginären Punktes aus gesehen, mit dem Sinne der Bewegung der Zeiger einer Uhr übereinstimmt. Nach einer kurzen Betrachtung der imaginären Punkte einer reellen Ebene und eines reellen Ellipsoids geht der Verfasser zur Deutung der Gleichungen mit complexen Coefficienten über. Eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades mit solchen Coefficienten wird die allgemeine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades genannt. Eine einzige derartige Gleichung stellt eine „allgemeine Fläche $n^{\text{ten}}$ Grades“, zwei Gleichungen stellen eine „allgemeine“ Curve dar. Während bei reellen Figuren die imaginären Punkte stets paarweise conjugirt vorkommen, ist dies bei den „allgemeinen“ Figuren nicht der Fall. Zu jeder Curve gehört ein Ort der Centra der imaginären

Punkte und ein Ort der Endpunkte der coinitialen Normalen, je nachdem man aus den vier reellen Gleichungen, welche zwischen den Grössen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ bestehen, entweder $x_2, y_2, z_2$ oder $x_1, y_1, z_1$ eliminirt.

Ein wenig ausführlich bleibt der Verfasser bei den imaginären Punkten der allgemeinen Ebene und der allgemeinen Geraden stehen. Ist die Gleichung der ersteren

$$ax+by+cz+d=0, \text{ worin } p=p_1+p_2\sqrt{-1},$$

so zeigt sich, dass die Richtung $V$, welche senkrecht ist zu den beiden anderen, deren Richtungscosinus den Grössen $a_1, b_1, c_1$; $a_2, b_2, c_2$ proportional sind, eine ausgezeichnete Rolle spielt. Für jeden beliebig gewählten Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ist der geometrische Ort des Punktes $P_2(x_2, y_2, z_2)$ eine Parallele zur Richtung $V$, welche sich nicht ändert, wenn $P_1$ parallel zu $V$ sich bewegt. Eine einfache geometrische Construction für zwei zu einander gehörige Punkte $P_1$ und $P_2$ wird angegeben.

Die Gleichungen der allgemeinen Geraden werden in die Gestalt

$$x=au+d, \; y=bu+e, \; z=cu+f$$

gebracht, wo sämtliche Grössen complex sind, und $u$ eine beliebige Veränderliche bedeutet. Die Oerter der Punkte $P_1$ und $P_2$ sind zwei parallele Ebenen und die geometrische Construction zweier zu einander gehörigen Punkte $P_1$ und $P_2$ zeigt sich leicht ausführbar.

Zum Schluss erörtert der Verfasser den Zusammenhang zwischen diesen Betrachtungen mit den in seiner „Theorie der Quaternionen" angestellten und mit den Untersuchungen von Hrn. Tarry.

Mo.

---

E. Bernès. Note sur l'angle de deux droites en coordonnées normales et sur quelques autres questions. J. de Math. spéc. (4) I. 241-246, 265-271.

Die Betrachtungen werden mit Hülfe complexer Grössen durchgeführt, und im zweiten Teil wird der für den Winkel zweier Geraden gefundene Ausdruck auf geometrischem Wege hergeleitet.

Hieran anknüpfend, werden zum Schluss einige einfache Aufgaben behandelt. Gz.

---

F. Farjon. Sur le quadrilatère. Nouv. Ann. (3) XI. 41-47.

Legt man durch zwei auf einander folgende Ecken $A$, $B$ eines windschiefen Vierecks $ABCD$ Normalebenen zu den Seiten $BC$ resp. $AD$ und ebenso durch $B$, $C$ Normalebenen zu $CD$ resp. $BA$, durch $C$, $D$ Normalebenen zu $DA$ resp. $CB$ und durch $D$, $A$ Normalebenen zu $AB$ resp. $DC$, so liegen die vier Schnittkanten je zweier zusammengehöriger Ebenen in einer Ebene („plan orthique" des Vierecks), von welcher verschiedene Eigenschaften, besonders ihre Beziehungen zu dem durch das Viereck bestimmten hyperbolischen Paraboloid mitgeteilt werden. Den Schluss bildet eine Specialisirung der aufgestellten Sätze für ein ebenes Viereck.

F.

---

Ch. Méray. Sur la discussion et la classification des surfaces du deuxième degré. Nouv. Ann. (3) XI. 474-509.

Ch. Méray. Extrait d'une lettre. Ibid. 537.

Die Discussion der Flächen zweiten Grades gründet der Verfasser auf eine Theorie der quadratischen Formen, die er vorher in grösserem Umfang entwickelt. Doch hat, wie er in jenem Briefe sagt, schon 1874 Darboux im Journ. de Math. (2) XIX (F. d. M. VI. 68) den grössten Teil dieser Theorie ausgeführt. H.

Humbert. Note sur une équation analogue à l'équation en $S$. J. de Math. spéc. (4) I. 97-98.

Betrachtung einer Gleichung, welche bei einem ebenen Centralschnitt einer Mittelpunktsfläche zweiten Grades auftritt und mit einer in der Theorie der Kegelschnitte vorkommenden Gleichung (der $S$-Gleichung) eine gewisse Analogie besitzt. Gz.

H. B. Newson. On Salmon's and MacCullagh's methods of generating quadric surfaces. Annals of Math. VI. 198-199.

Die Identität beider Erzeugungsarten zeigt sich bei Einführung des Begriffs conjugirter Excentricitäten (F. d. M. XXI. 1889. 789).

R. M.

---

A. Thaer. Kennzeichen der Entartung einer Fläche zweiter Ordnung. Pr. (Nr. 262) Realschule Halle a. S. 10 S. 4°.

Der Verfasser liefert eine Neubearbeitung seines in F. d. M. XVI. 1884. 695 angezeigten Aufsatzes. Den Anfang bildet diesmal eine Zusammenstellung einiger Sätze über verschwindende Subdeterminanten gewöhnlicher und symmetrischer Systeme.

R. M.

---

Marchand. Solution de la question de mathématiques proposée au concours général en 1892. Nouv. Ann. (3) XI. 509-518.

Es werden folgende drei aufgegebene Sätze bewiesen. Es ist eine Fläche zweiten Grades $Q$ einem gegebenen Ellipsoid $F$ umbeschrieben. $A$ ist in Bezug auf $F$ der Pol der Ebene $P$ der Curve, in welcher sich beide Flächen berühren. Satz 1. Im allgemeinen giebt es drei Flächen zweiten Grades $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, homofocal mit $F$ derart, dass die Polarebenen $P_1$, $P_2$, $P_3$ des Punktes $A$ in Bezug auf $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ durch den Mittelpunkt von $Q$ gehen. Satz 2. Die Ebenen $P_1$, $P_2$, $P_3$ sind die Hauptebenen von $Q$, und die Kegelschnitte $C_1$, $C_2$, $C_3$, in welchen sich die Flächenpaare $(P_1 Q_1)$, $(P_2 Q_2)$, $(P_3 Q_3)$ schneiden, sind die Brennpunktslinien von $Q$. Satz 3. Die orthogonalen Projectionen von $C_1$, $C_2$, $C_3$ auf die Hauptebenen von $F$ sind homofocale Kegelschnitte. H.

A. S. Ramsay, H. W. Curjel, Madhavarao. Solution of question 11349. Ed. Times LVII. 94-96.

Es seien $\varrho$, $\varrho'$ und $2n$ die Hauptkrümmungsradien und die Länge der Normalsehne in einem Punkte des dreiaxigen Ellipsoids

$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, dessen Tangentialebene vom Mittelpunkte den Abstand $p$ hat; dann ist

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{n}=p\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Bedeutet $r$ ferner den Radius vom Mittelpunkte nach dem Punkte, so ist

$$a^2b^2c^2=np[p^2(r^2-a^2-b^2-c^2)+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2].$$

Lp.

Gillet. Théorie des plans hypercycliques des surfaces du second ordre. Mathesis (2) II. 153-157, 180-191, 223-225.

Der Verf. sucht für die Oberflächen zweiter Ordnung, welche Hyperbelschnitte besitzen, die „hypercyklischen Ebenen“ auf, d. h. die Ebenen, welche eine solche Oberfläche in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden. Dml. (Lp.)

R. Guimarães. Sur les transformées des sections planes du cône de révolution. J. de Math. élém. (4) I. 101-103.

Berichtigung der von Amiot (Leçons nouvelles de géométrie descriptive, 1853, S. 160) ohne Beweis angegebenen Polargleichung der in Rede stehenden Transformirten. Gz.

R. Guimarães. Sur l'évaluation de certaines aires coniques. Assoc. Franç. Pau XXI. 166-171.

Der Verfasser berechnet unter Bezugnahme auf seinen Artikel im J. de Math. élém. die Stücke der Mantelfläche eines Kreiskegels, welche durch elliptische, hyperbolische und parabolische ebene Schnitte abgetrennt werden, indem er den Mantel zuerst in einer Ebene abwickelt und dann die nötigen Integrationen durchführt. Die einfache Bemerkung, dass die Flächen der Projectionen der berechneten Stücke auf die Ebene eines Kreisschnittes durch Multiplication des projicirten Mantelstückes mit dem Cosinus des Neigungswinkels der Erzeugenden des Kegels gegen die Ebene des

Kreisschnittes erhalten werden, hätte die gelösten Aufgaben auf die Quadratur der Ellipse, Hyperbel und Parabel zurückgeführt.

Lp.

---

S. Mangeot. Sur l'intersection d'un tore et d'une quadrique. Nouv. Ann. (3) XI. 519-526.

Der Verfasser stellt sich die Frage: Welche Flächen zweiten Grades schneiden den „Torus“ (d. i. die von einem Kreise bei Rotation um eine Gerade seiner Ebene erzeugte Fläche) in zwei sphärischen Curven? und findet als notwendige und hinreichende Bedingung, dass sich in beide Flächen eine gemeinsame Fläche zweiten Grades $\Sigma$ einbeschreiben lässt. Die Mittelpunkte der zwei Kugeln, auf denen die zwei sphärischen Curven liegen, liegen symmetrisch zum Mittelpunkte des Torus auf dem von ihm aus auf die Ebene der Berührungscurve von $S$ und $\Sigma$ gefällten Lote. Der gemeinsame Kreis der zwei Kugeln ist der Schnitt dieser Ebene und der Kugel, welcher die zwei Parallelen enthält, in denen der Torus $\Sigma$ berührt. Die Projection des Schnittes des Torus mit $S$ auf den Meridian des Torus senkrecht auf jene Ebene besteht aus zwei Kegelschnitten. Diese Resultate sind auf Grund eines Satzes von Darboux durch geometrische Schlüsse gewonnen. Es folgt die Construction.

H.

---

S. Mangeot. Sur la construction des quadriques qui ont un contact du deuxième ordre avec une surface. Mathesis (2) II. 249-250.

Mn.

---

G. Bruyère. Solution géométrique du problème donné au concours général en 1891. Nouv. Ann. (3) XI. 317-320.

Es werden eine Reihe von Constructionen vollzogen und an der entstehenden Figur verschiedene Beobachtungen gemacht.

H.

---

H. W. Richmond. On Pascal's Hexagram. Cambr. Trans. XV. 267-302. Cambr. Proc. VII. 221. (1891. Abstract.)

Verfasser benutzt eine neue Form der Gleichung einer Fläche dritter Ordnung mit Knotenpunkt, stellt die Gleichungen der auf der Fläche gelegenen einundzwanzig Geraden in symmetrischer Form dar und leitet die auf diese Geraden bezüglichen Eigenschaften ab. Indem er nach dem Vorgange Cremona's (Atti della Reale Accademia dei Lincei 1877) die Geraden der Fläche vom Knotenpunkt aus auf eine beliebige Ebene projicirt, entsteht die Figur des Pascal'schen Sechsecks, dessen Eigenschaften sich aus den Sätzen über die Geraden der Fläche dritter Ordnung ergeben. Ho.

---

R. E. Allardice. On a surface of the third order. Edinb. M. S. Proc. X. 59-62.

In Chrystal's Algebra, Teil II (Aufg. V, 4), wird die folgende Aufgabe gestellt: Ist $2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$, und sind $x, y, z$ alle reell, so liegen alle Zahlen $x$, $y$, $z$ oder keine derselben zwischen $-1$ und $+1$. In dem gegenwärtigen Artikel wird der Satz geometrisch gedeutet; einige Eigenschaften der dargestellten Oberfläche werden betrachtet. Es wird auch gezeigt, wie die Zusammensetzung zweier einfachen harmonischen Bewegungen mit gleichen Amplituden in zu einander senkrechten Richtungen mit Hülfe der Oberfläche in dem Falle veranschaulicht werden kann, bei welchem die Perioden nahezu gleich sind. Gbs. (Lp.)

---

Drin. Sur la cubique gauche qui passe par les points d'incidence des normales à une quadrique issues d'un point. J. de Math. spéc. (4) I. 155-158.

Die Untersuchung über die im Titel genannte Raumcurve soll noch fortgesetzt werden, so dass eine Besprechung der Arbeit bis nach ihrer Vollendung verschoben werden muss. Gz.

---

E. Waelsch. Zur Geometrie der linearen algebraischen Differentialgleichungen und binären Formen. Prag. Math. Ges. 1892. 78-99.

In besonderen Fällen kann eine lineare Differentialgleichung

$n^{ter}$ Ordnung eine invariantentheoretische Gestalt erhalten, nämlich die eines Aggregates von Ueberschiebungen binärer Formen.

Ist nämlich die Gleichung vorgelegt:

$$Py^{(n)} + Qy^{(n-1)} + \cdots = 0,$$

wo die $P$, $Q$, ... ganze rationale Functionen von $x$ sind, so mache man die Gleichung zunächst homogen:

$$\Sigma a_i f_{i,n-i} = 0.$$

Hier bedeuten die $a_i$ binäre Formen derselben Ordnung $\nu$, die $f_{i,n-i}$ die $n^{ten}$ Differentialquotienten nach $x_1$, $x_2$ irgend einer „Form", d. i. einer homogenen Function $f$.

Jetzt werde $f$ speciell als ganze rationale Form $\varphi$ von einer Ordnung $\geqq n$ angenommen, so geht die linke Seite der Differentialgleichung über in ein Aggregat von Ueberschiebungen einer binären Form $\varphi$ mit anderen solchen Formen von den Ordnungen $n+\nu$, $n+\nu-2$, $n+\nu-4$ etc.

Der Verf. beschäftigt sich mit den ganz-rationalen Lösungen $\varphi$ einer solchen Differentialgleichung und gelangt so zu Verallgemeinerungen von Sätzen, die im Falle der hypergeometrischen und Lamé'schen Gleichung von Hilbert, Pick, Klein gegeben waren.

Solche Lösungen $\varphi$ stehen in eigentümlicher Beziehung zu den Collineationen des mehrdimensionalen Raumes und seiner Ebenenbündel. Denn jeder Form $\varphi$ entspricht eine bestimmte Form $\Phi$, nämlich die zugeordnete linke Seite der Differentialgleichung, und jedem linearen System von Formen $\varphi$ ein ebensolches System von Formen $\Phi$.

Ein interessantes geometrisches Beispiel liefert eine Fläche dritter Ordnung, bezogen auf eine kubische Raumcurve, welche sechs windschiefe Geraden der Fläche zu Sehnen hat. Die letzteren sind dann durch sechs quadratische Formen $\varphi$ repräsentirt, welche Lösungen von der oben skizzirten Art einer gewissen linearen Differentialgleichung sind. Die zugehörigen collinearen Ebenenbündel sind solche, welche die Fläche erzeugen.

Es ist das eine merkwürdige, in gewissem Sinne dualistische Ergänzung zu Sätzen, die Referent in seiner Apolaritätsschrift von 1883 über Flächen dritter Ordnung und zu ihnen apolare kubische Raumcurven aufgestellt hat.

Wegen des reichen Einzelinhalts sei auf die Abhandlung selbst verwiesen. My.

E. Czuber. Ueber einen geometrischen Ort und eine damit zusammenhängende krumme Fläche. Monatsh. f. Math. III. 217-233.

Der geometrische Ort für alle Punkte, welche von den Seiten eines fundamentalen Dreiecks Entfernungen haben, deren Product constant ist, ist eine Curve, welche Projection der Niveaulinie einer Fläche ist, deren Gleichung $z = u_1 u_2 u_3$ ist, wo $u_1$, $u_2$, $u_3$ die genannten Entfernungen sind. Dabei ist das Coordinaten-System zu denken, welches aus dem den drei Seiten und dem Punkte zugehörigen Coordinaten-System und einer zu ihrer Ebene senkrechten Axe besteht. In diesem Zusammenhange wird die genannte Ortscurve und die genannte Fläche analytisch-geometrisch untersucht, zuerst für die allgemeine Lage, dann dafür, dass zwei der Geraden $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ parallel sind, endlich dafür, dass diese drei Geraden durch einen und denselben Punkt gehen.

Scht.

E. Pascal. Saggio sul gruppo delle sostituzioni fra le 27 rette della superficie di 3° ordine e sui gruppi ad esso isomorfi. Annali di Mat. (2) XX. 269-332.

Bericht auf Seite 468 dieses Bandes.

## D. Andere specielle Raumgebilde.

J. Cardinaal. Over het ontstaan van oppervlakken van den vierden graad met dubbelrechte door middel van projectieve bundels van kwadratische oppervlakken. Amst. Verh. I. No. 6. 1-63.

Der Verfasser bezweckt, für eine Fläche vierten Grades mit Doppellinie die allgemeine Construction und die auftretenden Sin-

gularitäten anzugeben. Die Abhandlung stützt sich wesentlich auf die im J. für Math. CXI vom Verf. veröffentlichte Untersuchung eines besonderen Falles des $F_2$-Gebüsches und des dazu projectivischen räumlichen Systems. Zwei Räume $R$ und $R_1$ werden projectivisch auf einander bezogen. Im ersteren sind vier quadratische Flächen $A_2$, $B_2$, $C_2$, $F_2$, denen eine Gerade $d$ gemeinsam ist, enthalten. Die Büschel $A_2 B_2$ und $C_2 F_2$, zu einander in projectivische Beziehung gesetzt, erzeugen die $O_4$, worauf $d$ als Doppellinie vorhanden ist. Im Raume $R_1$ wird gleichzeitig eine Bildfläche $O_1^2$ mittels zweier projectivischen Ebenenbüschel erzeugt.

Eine Klassification der erhaltenen $O_4$ ergiebt sich, indem auf die besonderen Lagen geachtet wird, welche die Bildfläche $O_1^2$ in Bezug auf die doppelt zählende Fläche $K_1^2$ in $R_1$, deren Tangentenebenen den Kegelflächen des Systems in $R$ zugeordnet sind, oder auch in Bezug auf die abwickelbare Fläche $K_1^6$ sechster Ordnung und vierter Klasse, welche von den Ebenen umhüllt wird, die den Ebenenpaaren des Systems in $R$ zugeordnet sind, einnehmen kann. Weiter können noch die Fälle unterschieden werden, dass $O_1^2$ eine allgemeine quadratische Fläche oder ein Kegel ist, und schliesslich, dass das Flächensystem in $R$ ausser $d$ noch ein, zwei oder drei sämtlichen Flächen gemeinsame Punkte enthalten kann. Ausgeschlossen bleiben diejenigen Fälle, worin $O_1^2$ eine besondere Stellung gegen $K_1^6$ hat, wodurch noch acht verschiedene Voraussetzungen übrig bleiben, die folgendermassen schematisch dargestellt werden können:

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Flächensystem | $a$ | $a$ | $g$ | $g$ | $a$ | $a$ | $g$ | $g$ |
| $O_1^2$ | $rw$ | $rb$ | $rw$ | $rb$ | $kw$ | $kb$ | $kw$ | $kb$. |

Hierin beziehen sich $a$ und $g$ auf die Fälle, dass das in $R$ enthaltene Flächensystem ein allgemeines oder ein solches mit ein, zwei, drei gemeinsamen Punkten ist, während die Buchstaben $r$, $k$ zu erkennen geben, dass die Fläche $O_1^2$ eine beliebige Regelfläche oder ein Kegel ist, die eine willkürliche Stellung ($w$) oder eine besondere ($b$) gegen $K_1^2$ einnehmen kann. Mehrere dieser Abteilungen erfordern eine weitere Zergliederung.

Die auf der $O_4$ enthaltenen Curven dritter und sechster Ord-

nung, die den Geraden und den Kegelschnitten auf $O_1^2$ entsprechen, werden ausführlich untersucht. Singularitäten der Fläche. Als allgemeine Resultate lassen sich hervorheben: Durch die gewählte Erzeugungsweise werden alle Flächen vierter Ordnung mit Doppellinie erhalten, die höchstens vier Kegelpunkte besitzen; sämtliche Cuspidalpunkte und -Ebenen dieser Flächen können leicht bestimmt werden. Die Doppellinie kann in eine Cuspidalkante übergehen. Sobald mehr als vier Kegelpunkte vorhanden sind, ist die Lage derselben gewissen Bedingungen unterworfen.

Schliesslich wird angegeben, welche der aufgezählten Formen im Salmon-Fiedler'schen Werke sich vorfinden. Mo.

---

Korndörfer. Die Fläche vierter Ordnung mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden. Pr. (No. 282). Progymn. Neumünster. 6 S. 4°.

Die Gleichung der Fläche wird aufgestellt, und es werden ihre Schnitte mit Ebenen, sowie umschriebene Kegelflächen und der Schnitt mit einem Hyperboloide betrachtet, welches durch die beiden Doppelgeraden gelegt ist. A.

---

J. Tannery. Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques. Darboux Bull. (2) XVI. 190-192.

Herr Darboux hat in der Note XV zu dem Traité de Mécanique von Despeyrous eine Methode angegeben, um alle Rotationsflächen zu bestimmen, deren geodätische Linien sich schliessen. Herr Tannery teilt nun ohne Ableitung die Gleichung einer Fläche vierter Ordnung mit:

$$16a^2(x^2+y^2) = z^2(2a^2-z^2),$$

deren geodätische Linien sich nicht nur schliessen, sondern auch algebraisch sind. Die Fläche besitzt einen konischen Punkt und hat eine birnförmige Gestalt. Jede geodätische Linie umwindet sie zweimal. Da die geodätischen Linien auf dieser Fläche alle gleich lang sind (es lässt sich übrigens leicht nachweisen, dass dies bei

allen Flächen, auf denen die Linien sich schliessen, der Fall ist), so ergeben sich die beiden interessanten Grenzfälle, dass eine jede geodätische Linie so auf der Fläche verschoben werden kann, dass sie den ganzen Meridian einmal oder den Aequatorkreis zweimal umspannt. Die von Herrn Darboux mitgeteilte Gleichung zur Auffindung solcher Flächen lautet:

$$\sqrt{1+\varphi'^2}+\sqrt{1+\psi'^2} = \frac{4\mu a}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Hier sind $\varphi$ und $\psi$ willkürliche Functionen von $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $r=a$ ist der Radius des Aequators und $\mu$ eine rationale Zahl. Bestimmt man die Functionen $z=\varphi$ und $z=\psi$ dadurch, dass man

$$\sqrt{1+\varphi'^2} = \frac{2\mu a}{\sqrt{a^2-r^2}}+1,\quad \sqrt{1+\psi'^2} = \frac{2\mu a}{\sqrt{a^2-r^2}}-1$$

und $\mu=1$ setzt, so erhält man hieraus die obige Fläche von Tannery; $z=\varphi$ und $z=\psi$ sind die Gleichungen der beiden Flächenteile, die sich längs des Aequators $r=a$ stetig aneinander schliessen. Aus dieser Ableitung erkennt man sofort, dass und wie sich unzählige ähnliche Flächen aufstellen lassen, die sich schliessende geodätische Linien besitzen; diese sind jedoch nur in dem erwähnten einfachsten Falle algebraisch. Bm.

J. Tannery. Sur une surface de révolution du quatrième degré, dont les lignes géodésiques sont algébriques. Soc. Philom. Bull. (8) IV. 85-93.

Eine besonders einfache Fläche von dieser Eigenschaft hat die Gleichungen

$$x=\frac{a}{4}\cos u\cos\vartheta,\quad y=\frac{a}{4}\cos u\sin\vartheta,$$
$$z=a(1-\cos\tfrac{1}{2}u+\sin\tfrac{1}{2}u)$$

und ist hier Gegenstand eingehender Betrachtung. H.

A. Cayley. Sur la surface des ondes. Annali di Mat. (2) XX. 1-18.

Anknüpfend an zwei in demselben Journal 1852 (II) erschienene

Notizen von Combescure und Brioschi über die Krümmungslinien der Wellenfläche giebt der Verfasser mehrere sehr elegante Parameterdarstellungen dieser Fläche.

Sind $a > b > c$ die Quadrate der Halbaxen,

$$\alpha = b - c, \quad \beta = c - a, \quad \gamma = a - b,$$

$x, y, z$, die Coordinaten eines Flächenpunktes und

$$\xi = x^2 + y^2 + z^2, \quad \eta = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

so ist

$$(1) \qquad \beta\gamma x^2 = (\xi - a)(\eta - bc),$$

und hieraus folgen $y$ und $z$ durch cyklische Vertauschung. Bezeichnet man ferner mit $v$ das Quadrat der Senkrechten vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene: $\lambda x + \mu y + \nu z - \sqrt{v} = 0$, so kann man die Coordinaten eines Punktes der Fläche auch durch die Parameter $\xi$ und $v$ ausdrücken:

$$(2) \qquad \beta\gamma x^2 = \frac{(\xi - a)^2}{v - \xi} \{bc - (b+c)v + v\xi\}$$

u. s. w.

Ist ähnlich $u$ das Quadrat des senkrechten Abstandes des Centrums von der zur obigen parallelen Tangentialebene, so folgt:

$$(3) \qquad \beta\gamma x^2 = \frac{(u-a)(v-a)}{v(v-u)^2} \{bc - (b+c)u + uv\}^2$$

u. s. w.

Aus diesen Formeln ergiebt sich die Gleichung der Krümmungslinien in der einfachen Form:

$$(4) \qquad dv\,d\eta + v\,du\,d\xi = 0,$$

aus welcher sich durch Einführung der Werte von $\eta$ und $u$ in Function von $\xi$ und $v$ die Gleichung folgern lässt:

$$(5) \qquad d\xi^2 - d\xi\,dv\left(\frac{\xi - a}{v - a} + \frac{\xi - b}{v - b} + \frac{\xi - c}{v - c} - \frac{\xi}{v}\right) + dv^2\,\frac{(\xi - a)(\xi - b)(\xi - c)}{(v - a)(v - b)(v - c)} = 0.$$

Führt man dagegen in (4) die Parameter $u$ und $v$ ein, so erhält man:

$$(6)\qquad du^2 - du dv\left(\frac{u-a}{v-a} + \frac{u-b}{v-b} + \frac{u-c}{v-c} - \frac{u}{v}\right) + dv^2\,\frac{(u-a)(u-b)(u-c)}{(v-a)(v-b)(v-c)} = 0,$$

eine Gleichung, die auch durch Vertauschung von $\xi$ mit $u$ aus (5) folgt. Ferner ergiebt sich das analytisch interessante Theorem, dass diese nämliche Gleichung (6) auch aus (5) entsteht, wenn man daselbst

$$\xi = v - \frac{(v-a)(v-b)(v-c)}{v-u}$$

setzt. Vertauscht man hingegen in (6) $u$ mit $v$, so ändert sich diese Differentialgleichung naturgemäss; und fragt man sich, wann die zweite durch diese Vertauschung entstehende Differentialgleichung identisch mit Gleichung (6) wird — was dann eintritt, wenn die beiden Krümmungslinien, die durch die Berührungspunkte zweier parallelen Tangentialebenen laufen, bezüglich parallel sind — so findet man die Bedingung:

$$(u-v)\{2u^2v^2 - A(u+v)uv + 2Buv - C(u+v)\} = 0,$$

wobei $A = a+b+c$, $B = ab+bc+ca$, $C = abc$ ist.

Der erste Factor giebt, mit Null verglichen, die unendlich ferne Ebene, welche die Fläche nach zwei imaginären Kegelschnitten schneidet, und ausserdem die singulären Tangentialebenen, welche die Fläche einzeln nach einem reellen oder imaginären Kreis berühren. Der zweite Factor liefert eine Curve, die noch zu untersuchen bleibt. Durch Einführung der Parameter $\xi$ und $v$ ergeben sich auch beide Krümmungsradien der Fläche in eleganter Form, und es lassen sich ausserdem Gleichungen angeben, aus welchen man die Krümmungscentrafläche bestimmen kann, deren Grad der Verfasser aus den Graden der Schnittcurven der Ebene $z = 0$ mit der Fläche auf 38 fixirt.

Eine Bemerkung über die Ableitung derselben Resultate aus dem Linienelement der Fläche

$$ds^2 = Ed\xi^2 + Gd\eta^2,$$

sowie die Aufstellung der Gleichung der geodätischen Linien in diesen Parametern schliessen die Abhandlung. Bm.

E. Cosserat. Sur la cyclide de Dupin. Toulouse Ann. VI. F. 1-7.

Die Dupin'sche Cyklide ist bekanntlich die Eingehüllte einer Schar von Kugeln, welche drei Kugeln berühren, und sie wird noch von einer zweiten Schar von Kugeln berührt, zu denen jene drei Kugeln gehören. Die Coincidenzlinien jeder dieser Kugelscharen sind Kreise, und zwar sind diese Kreise die Krümmungslinien der Cyklide.

Nimmt man die umgekehrten Werte der Hauptkrümmungsradien zu Parametern, so lässt sich die Cyklide folgendermassen darstellen:

$$x=\frac{b^2-ka^2u+k(a-b)^2}{a\sqrt{a^2-b^2}(u-v)},\quad y=\frac{b}{u-v}\sqrt{a^2-\frac{(1-ku)^2}{a^2-b^2}},$$

$$z=-\frac{b}{u-v}\sqrt{-b^2+\frac{(1-kv)^2}{a^2}}.$$

Die Differentialgleichung der asymptotischen Linien wird

$$\frac{du^2}{u[(a^2-b^2)u^2-(1-ku)^2]}=\frac{dv^2}{v[-a^2v^2+(1-kv)^2]}.$$

An die Entwickelung dieser und ähnlicher Formeln wird der Beweis eines Satzes von Bonnet geknüpft: Wenn die Krümmung jeder Krümmungslinie einer Fläche constant ist, so ist die Fläche eine Dupin'sche Cyklide.

Die Mittelpunktsflächen der Cyklide sind bekanntlich in zwei confocale Kegelschnitte degenerirt, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, nämlich in die Orte der Mittelpunkte der beiden einhüllenden Kugelscharen. Die Mittelfläche derselben, d. h. der Ort der Mitten der Verbindungslinien irgend zweier Punkte dieser confocalen Kegelschnitte, ist eine Translationsfläche, welche durch Translation von zwei Kegelschnittscharen entsteht. Nach bekannten Sätzen lässt sich schliessen, dass diese Fläche durch Orthogonalität der Elemente der adjungirten Fläche einer Bonnet'schen Minimalfläche mit ebenen Krümmungslinien entspricht. Errichtet man ferner in der Mitte jeder Verbindungslinie der beiden confocalen Kegelschnitte eine darauf lotrechte Ebene, so umhüllt diese Ebene eine Fläche, die der Verfasser die mittlere Abgewickelte nennt.

Diese Fläche hat mit der Dupin'schen Cyklide selbst gleiche sphärische Darstellung, und daraus folgt, dass alle ihre Krümmungslinien eben sind. A.

---

C. ROHN. Modelle der rationalen Raumcurven vierter Ordnung und ihrer Developpabeln. Deutsche Math. Ver. I. 43-45.

Eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species liegt auf einem Hyperboloid, dessen eine Schar sie je einmal, dessen andere Schar sie je dreimal trifft, und ist bestimmt durch die auf dem „Hauptkegelschnitt" liegenden vier „Hauptpunkte". Ausser den Hauptpunkten spielen eine für die Gestaltung der Curve und ihrer abwickelbaren Fläche massgebende Rolle: 1) die vier „Punkte mit Wendeebenen", 2) die „Schnittpunkte der vier berührenden Trisecanten". Die Doppelcurve der abwickelbaren Fläche geht durch die Punkte mit Wendeebenen, welche daher als Pinch-points erscheinen. Längs der berührenden Trisecanten durchschneidet die abwickelbare Fläche das Hyperboloid. In den einfachen Punkten der berührenden Trisecanten besitzt die Doppelcurve Spitzen. — Diese Verhältnisse werden mit Beziehung auf die durch die verschiedenen Realitätsmöglichkeiten bedingten einzelnen Fälle durch die (inzwischen in Brill's Verlag erschienenen) sieben Fadenmodelle des Verfassers sehr schön veranschaulicht. Sie stellen dar: 1) eine Curve mit reellen Hauptpunkten, aber imaginären Punkten mit Wendeebenen und imaginären berührenden Trisecanten, 2) mit vier reellen Punkten mit Wendeebenen, 3) mit vier reellen berührenden Trisecanten, 4) mit zwei osculirenden Trisecanten (Uebergangstypus zwischen 2 und 3), 5) mit zwei reellen Punkten mit Wendeebenen und zwei reellen berührenden Trisecanten, 6) Specialfall von 5, wo die berührenden Trisecanten durch die Punkte mit Wendeebenen gehen, 7) Raumcurve vierter Klasse, reciprok zu 6. Hk.

---

L. BERZOLARI. Sui combinanti dei sistemi di forme binarie annessi alle curve gobbe razionali del quart' ordine. Annali di Mat. (2) XX. 101-162.

Diese sorgfältige und ausführliche Arbeit giebt eine im wesentlichen abschliessende Uebersicht der invariantentheoretisch-geometrischen Untersuchungen der neueren Zeit über die rationale Raumcurve vierter Ordnung $R_4$.

Nach den grundlegenden Vorarbeiten von Cayley, Salmon und Cremona nahm die Theorie der Curve $R_4$ einen neuen Aufschwung, als man von einer selbständigen Definition ausging, insofern die homogenen Coordinaten eines Curvenpunktes als ganze Functionen vierter Ordnung eines Parameters charakterisirt wurden. Hier sind vor allem Weyr und Bertini zu nennen.

Es entstand eine binäre Invariantentheorie auf der $R_4$: jede binäre Covariante oder verschwindende Invariante derjenigen Form vierter Ordnung, die durch ihr Verschwinden die vier Hyperosculationspunkte der Curve darstellt, führt zu Punktgruppen, die mit der Curve im quaternären Sinne projectiv verknüpft sind. Ein weiterer Fortschritt ergab sich, als man durch gewisse Ränderungsprocesse binärer invarianter Bildungen zu quaternären gelangte, die es ermöglichten, nicht nur die mit der Curve projectiv verbundenen Raumgebilde, wie Flächen, Complexe, Congruenzen, vom formentheoretischen Standpunkt aus aufzufinden, sondern auch auf Grund dieser Darstellungen eine Fülle neuer Eigenschaften der gemeinten Gebilde zu entdecken. Den Anstoss zu dieser Auffassung gaben Brill und Study.

Die Einführung der Osculanten durch Jolles nimmt eine Art Mittelstellung ein.

Vermisst hat der Referent u. a. die von ihm angegebene invariantentheoretisch-projective Erzeugung der Curven.

Die Abhandlung des Verfassers sei jedem, der dieses fruchtbare Gebiet moderner Forschung genauer kennen lernen will, empfohlen: die eingehende historische Einleitung wird dem Leser besonders willkommen sein. My.

L. Berzolari. Sopra alcuni iperboloidi annessi alla curva gobba razionale del quart'ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 950-971.

Die Gleichungen derjenigen Regelflächen zweiter Ordnung wer-

den ermittelt, die durch drei beliebige Sehnen oder Tangenten einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art gehen. Hierbei wird besonders der Fall näher untersucht, wo die drei Tangenten in Schmiegungsebenen liegen, die sich in einem Punkte der Curve schneiden. Js.

---

A. DEL RE. Sulla superficie del 5⁰ ordine dotata di cubica doppia e punto triplo. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 170-176.

A. DEL RE. Ancora della superficie del 5⁰ ordine con cubica doppia e punto triplo. Ibid. 203-210.

A. DEL RE. Altre proprietà relative alla superficie del 5⁰ ordine con cubica doppia e punto triplo. Ibid. 343-348.

A. DEL RE. Sopra alcune varietà della superficie del 5⁰ ordine con cubica doppia e punto triplo. Ibid. 378-385.

Diese Noten schliessen sich an frühere Untersuchungen des Verfassers an, über welche F. d. M. XXIII. 1891. 853 und 854 berichtet ist, und handeln von der Fläche fünfter Ordnung mit einer kubischen Doppellinie und einem dreifachen Punkt, welche in ähnlicher Weise untersucht werden, wie die betreffenden speciellen Flächen in den früheren Arbeiten. Die erste Note enthält eine Untersuchung der Fläche im Anschluss an eine früher schon erwähnte Construction. Die zweite Note giebt eine neue Construction der Fläche und ihrer Doppelcurve, die Gleichungen gewisser mit ihr zusammenhängender Connexe und zwei Methoden zur Aufstellung der Gleichung der Fläche. In der dritten Note werden die früheren Eigenschaften und die Abbildung in die Ebene benutzt, um sie zu construiren und ebenso um 11 eindeutige Correspondenzen und die entsprechenden Connexe zu betrachten. In der vierten endlich werden specielle und singuläre Fälle betrachtet, welche entstehen, wenn die kubische Doppellinie zerfällt, und es werden die verschiedenen Fälle untersucht, welche die Fläche hinsichtlich der Configuration ihrer Geraden darbietet. A.

---

H. Resal. Sur les propriétés de la loxodromie d'un cône de révolution et leur application au ressort conique. C. R. CXIV. 147-152.

Verfasser schlägt als die für die Praxis geeignetste Gestalt konischer Spiralfedern die der Kegelloxodrome vor und begründet seine Ansicht dadurch, dass er einige neue Eigenschaften der Loxodrome entwickelt und die Variationen der Coordinaten ihrer Punkte bestimmt. Bm.

---

G. Pirondini. Ligne d'intersection d'une surface de révolution avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe. Progreso mat. II. 129-136, 161-170.

Der Verf. untersucht in diesem Aufsatze die Curven, welche durch den Schnitt der Umdrehungsflächen mit Cylindern entstehen, welche ihre Erzeugenden parallel zur Axe der Oberfläche haben. Als besonderen Fall der dargelegten Theorie erhält er einen von Hrn. Ch. Robert in den Nouv. Ann. (F. d. M. XXII. 1890. 809) bewiesenen Satz, der demjenigen Falle entspricht, bei welchem die Leitlinie des Cylinders eine logarithmische Spirale ist.

Tx. (Lp.)

---

R. Godefroy. Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces et en particulier des courbes et surfaces de Lamé. J. de l'Éc. Pol. LXII. 37-46.

Der Verfasser entwickelt zunächst durch einfache geometrische Betrachtungen Beziehungen zwischen dem Krümmungsradius einer ebenen Curve und gewissen anderen Grössen, die mit dem (schiefwinkligen) Coordinatensystem zusammenhängen. Er benutzt diese, so wie ähnliche von Jamet, Fouret und Mannheim aufgefundene Beziehungen zur Bestimmung der Krümmungsradien der Curven (vergl. oben S. 666):

$$ax^m + by^n + c = 0,$$

zu welchen speciell sowohl die Lamé'schen als die parabolischen Curven gehören, ferner zur Bestimmung der Hauptkrümmungs-

radien der Lamé'schen Flächen und der Flächen, deren Gleichung die Form hat:

$$z^2 = f(x) + \varphi(y).$$

Er gelangt dabei zu einer Reihe von interessanten speciellen Resultaten. A.

G. Pirondini. Contatto e ortogonalità di due elicoidi.
Rivista di Mat. II. 127-137.

Es handelt sich um die Frage, ob sich zwei Schraubenflächen, welche dieselbe Schraubenaxe, aber beliebige Ganghöhe haben, längs einer Linie berühren oder orthogonal schneiden können. Beides ist zunächst möglich längs einer erzeugenden Schraubenlinie. Lässt man aber diesen selbstverständlichen Fall bei Seite, so erkennt man leicht, dass eine Berührung längs einer anderen Linie nicht möglich ist, wohl aber ein orthogonales Durchschneiden. Beide Flächen können dann angesehen werden als erzeugt von der Durchschnittslinie $C_1$ durch Schraubenbewegung mit verschiedenen Ganghöhen. Sind nämlich $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ die Coordinaten eines mit $u$ variirenden Punktes dieser Durchschnittslinien, ist die $z$-Axe die Schraubenaxe, und sind die Ganghöhen beider Schraubenlinien $p$ und $p_1$, so findet man leicht, dass sie der Bedingung genügen muss

$$\text{(I)} \qquad (\xi_1^2+\eta_1^2)\zeta_1'^2-(p+p_1)(\xi_1\eta_1'-\xi_1'\eta_1)\zeta_1'+(\xi_1\xi_1'+\eta_1\eta_1')^2 + pp_1(\xi_1'^2+\eta_1'^2) = 0,$$

wo die Accente die Ableitungen nach $u$ bedeuten.

(Hier findet sich in der Abhandlung ein Druckfehler; es ist nämlich der Factor $\zeta_1'$ im zweiten Gliede fortgelassen.)

Ist die eine der beiden Flächen gegeben, etwa als durch Schraubenbewegung einer Curve $C(\xi, \eta, \zeta)$ um die $z$-Axe entstanden, wo $\xi, \eta, \zeta$ gegebene Functionen sind, so ist eine beliebige Curve dieser Fläche dargestellt durch die Gleichungen:

$$\text{(II)} \qquad \xi_1 = \xi\cos U - \eta\sin U, \quad \eta_1 = \xi\sin U + \eta\cos U, \quad \zeta_1 = \zeta + pU,$$

wo $U$ eine willkürliche Function von $u$ ist. Soll diese Curve orthogonaler Durchschnitt mit einer gleichaxigen Schraubenfläche mit der Ganghöhe $p_1$ sein, so müssen $\xi', \eta', \zeta'$ die Gleichung (I) erfüllen.

Diese nimmt dann die Form an:

$$\text{(III)} \qquad \begin{aligned} &\zeta'^2(\xi^2+\eta^2)-(p+p_1)\zeta'(\xi\eta'-\xi'\eta)+pp_1(\xi'^2+\eta'^2) \\ &+(\xi\xi'+\eta\eta')^2-U'(p_1-p)[\zeta'(\xi^2+\eta^2)-p(\xi\eta'-\xi'\eta)]=0. \end{aligned}$$

Es ist also $U$ durch eine einfache Quadratur bestimmt, und zwar kann $U$ um eine beliebige Constante vermehrt werden, wie selbstverständlich. Man kann, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, $\eta=0$ annehmen, da man die Curve $C$ als in der $(xz)$-Ebene liegend annehmen, d. h. da man von einem Meridian ausgehen kann. Dann wird die Gleichung

$$\text{(IIIa)} \qquad \zeta'^2+pp_1\frac{\xi'^2}{\xi^2}+\xi'^2-U'(p_1-p)\zeta'=0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun viele Folgerungen ziehen, von denen einige hervorgehoben werden mögen. Der Fall $p_1=p$ hat keine reelle Bedeutung und kann ausgeschlossen bleiben. Die Gleichung (IIIa) für $U$ wird dann und nur dann widersprechend, wenn $\zeta'=0$, d. h. wenn der Schraubenmeridian eine Gerade senkrecht zur Schraubenaxe ist, die Schraubenfläche mithin Minimalfläche wird.

Die geradlinigen Minimalschraubenflächen sind also die einzigen, welche von keiner gleichaxigen Schraubenfläche orthogonal geschnitten werden.

Für alle übrigen Schraubenflächen lässt sich die orthogonale Durchschnittscurve bestimmen; und es giebt eine grosse Zahl einfacher Beispiele, bei denen sich die Integration in geschlossener Form ausführen lässt.

Setzt man $p$ gleich Null, so geht die gegebene Schraubenfläche in eine Umdrehungsfläche über, und auch durch diese Specialisirung ergeben sich interessante Resultate.

Andere Probleme ergeben sich, wenn keine der beiden Schraubenflächen gegeben ist und man solche Curven sucht, welche orthogonale Durchschnittscurven sein können. Man kann dann Gleichung (I) zu Grunde legen, oder in (III) $U'$ gleich Null setzen und eine der Functionen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ noch einer beliebigen Bedingung unterwerfen; man kann z. B. verlangen, dass $C$ Meridiancurve ist, oder dass $C$ eine ebene Curve ist, deren Ebene lotrecht zur

Schraubenaxe ist. In beiden Fällen wird man auf Quadraturen geführt.

Zum Schluss sei bemerkt, dass in diesem Referat der kürzeren Darstellung wegen die Bezeichnungen ein wenig andere sind, als in der Abhandlung. A.

J. Sobotka. Ueber Krümmung und Indicatricen der Helikoide. Wien. Ber. Cl. 899-919.

Der Verfasser untersucht die durch Schraubenbewegung einer beliebigen Raumcurve erzeugte Schraubenfläche in der Absicht, auf constructivem Wege die Krümmungseigenschaften der Fläche darzustellen. Die Constructionen sind im einzelnen gewiss zweckmässig und interessant, da es sich aber im wesentlichen um bekannte Dinge handelt, so ist eine Besprechung an dieser Stelle nicht geboten. A.

P. Appell. Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. Nouv. Ann. (3) XI. 115-119.

Für Curven dritten und vierten Grades ist das Resultat bekannt. Die allgemeine Untersuchung führt zur homographischen Transformirten einer auf einen Rotationscylinder gezeichneten Helix. H.

L. Raffy. Sur la déformation des surfaces spirales. Première partie. Caractères spécifiques des surfaces applicables sur les spirales. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 145-166.

In dieser Arbeit werden, wenn auch in etwas abgeänderter Darstellung, die Gesetze entwickelt, welche der Verfasser bereits früher ohne Beweis mitgeteilt hatte. (C. R. CXII. 850-852, S. M. F. Bull. XIX. 65-68, F. d. M. XXIII. 1891. 862.) A.

L. Raffy. Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèles. S. M. F. Bull. XX. 22-32.

Der Verfasser bringt im Anschluss an frühere Untersuchungen das Linienelement einer Spiralfläche mit parallelen Linien gleicher Krümmung in die Form

$$ds^2 = du^2 + F\left(\frac{u}{v}\right) dv^2.$$

Sind die Flächen auf Umdrehungsflächen abwickelbar, so wird

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^n}{v^n} dv^2.$$

Hieran schliessen sich noch einige weitere Betrachtungen ähnlicher Art. A.

L. Raffy. Sur certaines surfaces spirales. S. M. F. Bull. XX. 16.

Die geodätischen Linien der Rotationsflächen und die Bestimmung gewisser spiralischer Flächen führen im besonderen auf dieselbe Integrationsaufgabe. Durch Identificirung beider wird hier eine specielle spiralische Fläche bestimmt. Da die Zeichen nicht erklärt sind, lässt sich nichts Näheres darüber mitteilen. H.

B. Gustawicz. Theorie der Loxodrome und des loxodromischen Dreiecks in ihrer Anwendung auf Kartenzeichnen und nautische Probleme. Pr. Krakau. I. Teil. 1891. 1-41, II. Teil. 1892. 1-94. (Polnisch.)

Ausführliche Darstellung der Theorie mit mehreren Beispielen und historischen Notizen. Dn.

M. Pieri. Sopra le linee uniformemente illuminate di una superficie qualunque. Torino Atti XXVII. 347-353.

Die Linien, längs deren die Neigung der Tangentenebene gegen eine feste Gerade $r$ constant ist, sind den Orthogonaltrajectorien der zu $r$ senkrechten ebenen Schnitte conjugirt. Vi.

E. Cesàro. Sulle curve di Bertrand. Rivista di Mat. II. 153-159.
Js.

X. Stouff. Sur une classe de surfaces minima. Toulouse Ann. VI. A. 5-12.

Riemann hat gezeigt, dass die Theorie der von ihm entdeckten Minimalflächen, welche erzeugt werden von einem Kreise, dessen Ebene sich parallel mit sich selbst verschiebt, genau zusammenhängt mit dem Additionstheorem der elliptischen Functionen. Der Verfasser zeigt allgemeiner, dass das Problem der Aufsuchung von Minimalflächen, welche durch einen Kreis gehen, darauf hinauskommt, zwei analytische Functionen zu suchen derart, dass, wenn die Summe ihrer Argumente constant bleibt, sich eine gewisse Relation zwischen den Functionen selbst ergiebt. Die Entwickelung geht von der Weierstrass'schen Darstellung aus und führt zu dem Resultat, dass bei der gesuchten Fläche eine lineare Relation zwischen der absoluten und der geodätischen Krümmung der ebenen Schnitte besteht, deren Ebenen der Ebene des Kreises parallel sind.
A.

E. Stenius. Ueber Minimalflächenstücke, deren Begrenzung von zwei Geraden und einer Fläche gebildet wird. Helsingfors. 71 S. 4°.

## E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

A. Puchta. Erweiterung eines Gauss'schen Flächensatzes auf mehrdimensionale Räume. Prag. Math. Ges. 1892. 43-56.

Der in Rede stehende Satz lautet: „Bei jeder continuirlichen Deformation eines $R_n$ in $R'_n$, wobei das Curvenelement irgend zweier Punkte des $R_n$ seine Grösse nicht ändert, sind die $(n-1)$ Grössen

$$\Sigma \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_k} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

Invarianten.“ Mit seinem Beweise hängen Untersuchungen zu-

sammen, die noch zu weiteren Resultaten über Krümmungsverhältnisse in mehrdimensionalen Räumen führen. Auch wird die geometrische Deutung obiger Invarianten angegeben. Die Arbeit schliesst sich an des Verf. fast gleichzeitig veröffentlichte Abhandlung „Ueber abwickelbare Räume" an und folgt in der Bezeichnungsweise Hoppe's „Principien der Flächentheorie". Schg.

F. Nicoli. Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni reali di una equazione quadratica a quattro variabili. Modena Mem. (2) VIII. 489-505.

Die Abhandlung enthält die einfachsten Sätze, welche in Betracht kommen, wenn man im Raume von vier Dimensionen eine quadratische Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mit linearen Mannigfaltigkeiten zum Schnitt bringt. Es werden ferner solche besonderen quadratischen Mannigfaltigkeiten in diesem Raume untersucht, für welche jeder lineare Schnitt eine Kugel darstellt.

Ht.

F. Klein. Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. Katalog d. Math. Ausst. München. 3-15.

Ist

$$(1) \qquad f(z) = z^n + nAz^{n-1} + \tfrac{1}{2}n(n-1)Bz^{n-2} + \cdots + N = 0$$

eine vorgelegte Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades, so interpretire man $A, B, \dots, N$ als Punktcoordinaten in einem $n$-dimensionalen Raume $R_n$. Die Gleichung (1) repräsentirt dann, sofern man das $z$ als gegebene Grösse, die $A, B, \dots, N$ als Veränderliche ansieht, einen in diesem $R_n$ enthaltenen $(n-1)$-fach ausgedehnten $R_{n-1}$, und die ganze Reihenfolge von $R_{n-1}$, welche man für wechselnde Werte von $z$ erhält, umhüllt in ihrer Aufeinanderfolge die Discriminantenmannigfaltigkeit von (1), da ja die Discriminante als Resultante von $f(z) = 0$ und $\dfrac{df(z)}{dz} = 0$ erhalten wird. Betrachtet man ferner die „Normcurve" $(z-\lambda)^n = 0$, deren Punkte sich mit Hülfe eines

Parameters $\lambda$ so darstellen lassen:

$$(2) \qquad A = -\lambda, \quad B = \lambda^2, \ldots, \quad N = (-1)^n \lambda^n,$$

und bezeichnet man den einzelnen, durch (2) gegebenen Punkt derselben als den Punkt $\lambda$ derselben, so coincidiren alle $n$ Schnittpunkte des durch (1) gegebenen $R_{n-1}$ mit der Normcurve in den einen Punkt $\lambda = z$, oder die $R_{n-1}$ sind Schmiegungsräume der Normcurve; die Wurzeln $z_i$ aber, welche die Gleichung $f(z) = 0$ besitzt, werden auf der Normcurve durch die $n$ Punkte $\lambda = z_i$ vorgestellt, in welchen die von dem Raumpunkte $(A, B, \ldots, N)$ an die Curve laufenden Schmiegungsräume $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension berühren. Insbesondere sind von diesen Wurzeln genau so viele reell, als von dem Raumpunkte aus reelle Schmiegungsräume an die Curve gehen. Dies wird für die quadratischen Gleichungen $z^2 + 2Az + B = 0$ und für die kubischen $z^3 + 3Az^2 + 3Bz + C = 0$ durchgeführt; im ersteren Falle ist die Normcurve die Parabel $A = -\lambda$, $B = \lambda^2$ oder $A^2 - B = 0$, im zweiten eine kubische Raumcurve $A = -\lambda$, $B = \lambda^2$, $C = -\lambda^3$. Die Abzählung der reellen Wurzeln der Gleichung (1) wird dann an der Bezoutiante (nach Sylvester und Hermite) gelehrt und wiederum durch die Gleichungen zweiten und dritten Grades erläutert. Endlich wird auch noch die Abzählung der Wurzeln in einem Intervalle von $x$ bis $y$ beleuchtet, wobei das Ziel gesteckt wird, nur gerade Linien zur Feldabgrenzung zu gebrauchen. Die Cartesische Regel und der Budan-Fourier'sche Satz werden hierbei der Betrachtung unterworfen.

Lp.

R. Hoppe. Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien. Hoppe Arch (2) XI. 442-448.

Bericht auf S. 714 dieses Bandes.

# Capitel 4.

## Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

G. Koenigs. La géométrie réglée et ses applications. Suite (Étude bibliographique). Toulouse Ann. VI. 1-67.

Bekannten Sätzen über projective und involutorische Verwandtschaften zwischen den Ebenen eines Ebenenbüschels erster Ordnung und den Punkten seiner Axe folgen solche über die projectiven Eigenschaften der Büschel, Bündel und linearen Systeme von Complexen ersten Grades. An sie reiht sich eine eingehende Besprechung der infinitesimalen Eigenschaften der Complexe, gestützt auf die Arbeiten der Herren Klein, Lie und Pasch. Js.

---

A. Cayley. On the analytical theory of the congruency. London M. S. Proc. XXIII. 185-188.

Aus der Definition der Strahlencongruenz als Basis eines Complexbüschels werden die Brennpunktseigenschaften ihrer Strahlen auf analytischem Wege abgeleitet. Js.

---

C. Guichard. Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan. C. R. CXIV. 729-731.

Mittelpunkte der Strahlen einer Congruenz heissen diejenigen Punkte, welche die Abstände ihrer Brennpunkte halbiren. Liegen die Mittelpunkte in einer Ebene, so bestimmen sie Congruenzen, deren Erzeugung besprochen wird. Js.

---

E. Cosserat. Sur les congruences de droites. C. R. CXV. 929-931.

Beschreibt der Scheitel eines rechtwinkligen Dreikants $M(xyz)$ eine zur $z$-Axe normale Fläche, und ist hierbei die Lage der beiden Axen $x, y$ mit Hülfe zweier Parameter bestimmbar, so kann der

Axe des Dreikants ein zu ihr paralleler Strahl $D$ eindeutig zugewiesen werden. Von den durch die Strahlen $D$ gebildeten Congruenzen werden einige Sätze angeführt, deren Beweis in einer demnächst in den Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse erscheinenden Abhandlung geführt werden soll. Js.

---

G. Fouret. Sur la génération des congruences de droites du premier ordre et de classe quelconque. Palermo Rend. VI. 63-67.

Neuer Beweis des Satzes, dass die Congruenzen erster Ordnung $n^{\text{ter}}$ Klasse, abgesehen vom Sehnensystem der Raumcurve dritter Ordnung, erzeugt werden können durch Strahlen, die mit einer Raumcurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung und einer sie in $n-1$ Punkten schneidenden Geraden je einen Punkt gemein haben. Js.

K. Zindler. Ueber Büschel linearer Complexe. Monatsh. f. Math. III. 135-141.

Plücker'sche Untersuchungen über die Verteilung der rechts und links gewundenen Complexe in einem Büschel linearer Complexe werden rein synthetisch durchgeführt. Js.

A. Demoulin. Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires. S. M. F. Bull. XX. 122-132.

Die Schnittlinien normaler Berührungsebenen einer Fläche zweiter Ordnung bilden einen Painvin'schen Strahlencomplex. Die Painvin'schen Strahlencomplexe eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung schneiden sich in der nämlichen Congruenz. Die Complexcurven Painvin'scher Complexe, die zu confocalen Flächen zweiter Ordnung gehören, sind confocal, die Complexkegel concyklisch. Js.

Ch. P. Steinmetz. On the curves, which are self-reciprocal in a linear nulsystem, and their configurations in space. American J. XIV. 161-186.

Die Ordnungscurven eines Nullsystems, ihre Beziehungen zu einander und zu beliebigen Flächen werden untersucht; insbesondere Ordnungscurven dritter Ordnung, die durch einen Punkt gehen und zugleich auf einem Kegel zweiter Ordnung liegen, oder durch drei beliebige Punkte gehen. Jede Ordnungscurve dritter Ordnung liegt mit zwei anderen auf vierfache Weise perspectiv. Js.

---

H. Oppenheimer. Anwendungen des Ameseder'schen Nullsystems. Diss. Jena. 30 S. 8°.

Eine quadratische Verwandtschaft zwischen den Punkten und Strahlen eines ebenen Feldes, bei der im allgemeinen jeder Punkt auf seinem zugeordneten Strahle liegt, heisst Ameseder'sches Nullsystem zweiten Grades. Seine Bestimmung durch sieben Paare zugeordneter Elemente gestattet in einfacher Weise, aus den acht übrigen den neunten Grundpunkt eines Büschels von Curven dritter Ordnung abzuleiten. Punkte, denen in Bezug auf einen Büschel Ameseder'scher Nullsysteme dieselben Nullgeraden entsprechen, bilden eine Curve dritter Ordnung (die gemeinsame Nullpunktcurve des Büschels), die zugehörigen Nullgeraden einen Strahlenbüschel dritter Ordnung (die gemeinsame Nullgeradenenveloppe). Haben Ameseder'sche Nullsysteme sechs Paar Elemente entsprechend gemein und die gleiche Nullpunktcurve, so bestimmen sie einen Büschel, dessen Doppeldreiecke jener Curve einbeschrieben und deshalb „ihr selbst einbeschrieben" heisst. Analog ist die Definition der einer Curve dritter Klasse umbeschriebenen Ameseder'schen Nullsysteme. $\infty^1$ Dreiecke, die einer Curve dritter Ordnung $C_3$ ein- und einer Curve dritter Klasse $C^3$ umbeschrieben sind, können als Doppeldreiecke eines der ersteren einbeschriebenen Nullsystembüschels angesehen werden. Einem der $C_3$ einbeschriebenen Büschel von Nullsystemen entspricht ein System $\Sigma$ Steiner'scher Punktepaare, letzterem aber ein Netz von Nullsystemen. Aus conjugirten

Punktepaaren bestehenden Systemen $\Sigma$ sind conjugirte Netze von Nullsystemen zugeordnet. Die Elemente der Punktepaare von $\Sigma$ sind als „Eckpunkte“ und „Nullpunkte“ von einander zu trennen. Die Vertauschung ihrer Rollen führt zu einem Netze, das zum ersteren reciprok genannt wird. Conjugirte Netze fallen mit ihren reciproken zusammen. Recht einfach gestaltet sich mit Hülfe von Büscheln Ameseder'scher Nullsysteme die Construction von Dreiecken, die einer $C_3$ einbeschrieben sind, und deren Seiten je durch einen auf ihr gegebenen Punkt gehen. Js.

---

Fr. Deruyts. Construction d'un complexe de droites du second ordre et de la seconde classe. Belg. Bull. (3) XXIV. 571-577.

Le Paige et J. Neuberg. Rapport. Ibid. 536-539.

Man betrachte im Raume zwei Ebenen $\alpha$ und $\beta$, deren „complementare Elemente“ (Punkte und Gerade) derartig auf einander bezogen sind, dass einem Punkte der einen Ebene eine Gerade der anderen eindeutig und gegenseitig entspreche. Der fragliche Complex wird durch die Strahlen gebildet, welche die Punkte einer Ebene mit den Punkten der entsprechenden Geraden der anderen Ebene verbinden. Der Verf. behält sich die Erforschung des Grades der Allgemeinheit und der Ausartungen dieses Complexes vor. Hr. Neuberg giebt in seinem Berichte die Gleichung des Complexes in gedrängter Gestalt an. Dml. (Lp.)

---

M. Pieri. Sulle trasformazioni birazionali dello spazio, inerenti a un complesso lineare speciale. Palermo Rend. VI. 234-244.

Wenn zwischen zwei gewöhnlichen conjectiven Räumen $\Sigma$ und $\Sigma'$ eine eindeutige Verwandtschaft $V$ stattfindet, so giebt es $\infty^3$ Verbindungslinien von Paaren entsprechender Punkte, und dieselben bilden einen algebraischen Strahlencomplex $\Gamma$. Ist die Verwandtschaft $V$ gegeben, so ist es unschwer, die wichtigsten Eigenschaften des Complexes $\Gamma$ zu bestimmen. Sehr viel schwieriger ist umgekehrt

die Erforschung der Eigenschaften, welche die Verwandtschaft haben muss, damit $\Gamma$ vorgegebene Eigenschaften besitze. Eine solche Untersuchung wurde von Herrn Montesano durchgeführt, wenn $\Gamma$ ein allgemeiner Complex ersten Grades ist (F. d. M. XX. 1888. 611), und auch in anderen Fällen (vergl. S. 788). Herr Pieri hat sich die analoge Frage für den Fall gestellt, dass $\Gamma$ ein specieller Complex ersten Grades ist. Um über seine Lösung zu berichten, wollen wir $p$ die Axe des Complexes nennen und mit $I$ oder $T$ eine der gesuchten Verwandtschaften bezeichnen, je nachdem sie involutorisch ist oder nicht. Dies vorausgesetzt, haben wir Folgendes:

Eine zu einem linearen Complex $\Gamma$ gehörige Transformation $T$ ist durch zwei Linien $o$, $o'$ vollkommen bestimmt; die Ordnungen dieser Linien sind $3n-5$ und $3n'-5$, ihre Geschlechter $3n-8$ und $3n'-8$; sie stützen sich resp. in $3n-8$ und $3n'-8$ Punkten auf die Gerade $p$ und bilden im Verein mit dieser die Basis zweier Büschel von Flächen der Ordnungen $n-1$ und $n'-1$, deren jede auf $p$ einen beweglichen $(n-2)$-fachen oder $(n'-2)$-fachen Punkt besitzt. Es ist nicht schwer, mehr als eine Construction der Transformationen $T$ zu ermitteln und daraus wichtige Folgerungen zu ziehen: so besitzt $T$ eine Ordnungsfläche der Ordnung $n+n'-2$, welche $o$ und $o'$ enthält und die Gerade $p$ als $(n+n'-5)$-fache Linie. $T$ ist von der Ordnung $n+2n'-3$, während ihre inverse $T^{-1}$ von der Ordnung $n'+2n-3$ ist; erstere hat eine Fundamentalcurve der Ordnung $3n+6n'-17$, letztere eine der Ordnung $3n'+6n-17$; u. s. w.

Eine Transformation $I$ dagegen wird durch einen Büschel von Flächen $\lambda$ bestimmt und erzeugt; diese Flächen sind von der Ordnung $n-1$ und haben jede einen beweglichen $(n-3)$-fachen Punkt auf $p$ und in Folge dessen die Gerade selbst als $(n-4)$-fache Linie; alle Flächen $\lambda$ haben ferner eine Curve $o$ gemeinschaftlich, deren Ordnung $5n-11$ und deren Geschlecht $12n-38$ ist, und welche sich auf $p$ in $5n-18$ Punkten stützt. $I$ hat die Ordnung $4n-5$, hat $p$ als $(4n-13)$-fache und $o$ als 3-fache Fundamentallinie; ferner besitzt sie eine Doppelfläche, von der $p$ $(3n-10)$-fache und $o$ 3-fache Linie ist; u. s. w., u. s. w. Endlich kann man eine ein-zweideutige Raumtransformation aufstellen, deren adjungirte Transfor-

mation („conjugirte Transformation“ nach der Bezeichnung von De Paolis; vgl. F. d. M. XVII. 1885. 798) eben die Transformation $I$ sei. La.

---

M. Pieri. Sulle trasformazioni involutorie dello spazio determinate da un complesso hirstiano di rette. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 1037-1060.

Diese Arbeit steht in enger Beziehung zu der unten besprochenen Arbeit von Montesano („Su le trasformazioni univoche dello spazio“ etc.), von welcher der Verf. erst nach Abschluss dieser vorliegenden Untersuchung Kenntnis erhalten hatte.

Hr. Montesano hatte die birationalen Transformationen des Raumes, welche quadratischen Complexen entsprechen, untersucht und bewiesen, dass die einzigen quadratischen Complexe, welche hierher gehören können, entweder einen Strahlenbüschel oder lineare Congruenzen enthalten, vorausgesetzt dass diese so beschaffenen Complexe nicht andere Besonderheiten haben. Der besondere von T. A. Hirst („On the complexes generated by two correlative planes“ in Collectanea mathematica in memoriam D. Chelini, Milano, 1881) untersuchte Complex vom zweiten Grade besitzt die beiden oben angegebenen Eigenschaften. Deshalb ist es interessant, die eindeutige Raumtransformation, welche ihm entspricht, gesondert zu untersuchen, wie es der Verf. gethan hat. Hau.

---

D. Montesano. Su le trasformazioni univoche dello spazio che determinano complessi quadratici di rette. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 795-821.

Der Verf. legt sich in dieser Arbeit die Frage vor: Kann man einen Strahlencomplex immer betrachten als von den Geraden, welche in einer eindeutigen Raumtransformation entsprechende Punkte verbinden, gebildet?

Er beantwortet diese Frage in verneinendem Sinne, weil er findet, dass man den allgemeineren Strahlencomplex vom zweiten Grade nicht als von den oben erwähnten Geraden einer eindeutigen Raumtransformation gebildet ansehen kann. Damit ein quadrati-

scher Complex in dieser Weise erzeugt worden sein kann, muss der gegebene Complex entweder einen Strahlenbüschel oder lineare Congruenzen enthalten.

In der Arbeit werden dann noch diejenigen birationalen Raumtransformationen ermittelt, welche den erwähnten Complexen entsprechen. Hau.

D. MONTESANO. Su una congruenza di rette di 2° ordine e di 4ª classe. Torino Atti XXVII. 1053-1069.

D. MONTESANO. Su due congruenze di rette di secondo ordine e di sesta classe. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 77-85.

Der Verf. geht von den neueren Untersuchungen von Sturm (Math. Ann. XXXVI) und Schumacher (Math. Ann. XXXVIII) über die Klassification der Strahlencongruenzen zweiter Ordnung mit Brennlinien aus, insbesondere von denen, welche eine solche Linie von höherer als der ersten Ordnung besitzen, die aus jedem ihrer Punkte einen im allgemeinen nicht zerfallenden Kegel zweiten Grades zur Congruenz aussendet. Hr. Sturm unterscheidet drei verschiedene Arten derartiger Strahlencongruenzen, je nachdem die singuläre Linie derselben ein Kegelschnitt, eine kubische Raumcurve oder eine ebene kubische Curve mit Doppelpunkt ist.

In der ersten Arbeit untersucht der Verf. diejenige Congruenz, deren singuläre Linie ein Kegelschnitt ist. Zuerst beweist er, dass diese Congruenz zu zwei tetraedralen Complexen gehört; dann giebt er die ebene Abbildung und bestimmt die involutorischen Transformationen des Raumes, welche sie in sich selbst überführen.

In der zweiten Arbeit studirt der Verf. die beiden anderen Congruenzen und zeigt, dass auch diese auf die Ebene abbildbar sind. Die erstere dieser beiden Congruenzen gehört zu einem tetraedalen Complexe, die andere zu einem Complexe vom dritten Grade, welcher einen Büschel von Doppelstrahlen enthält.

Ausser diesen drei Congruenzen existiren keine anderen gleicher Art, d. h. keine nicht entarteten Congruenzen zweiter Ordnung, welche von den Erzeugenden von $\infty^1$ Kegeln zweiten Grades

gebildet sind, deren Spitzen auf einer einzigen Linie von höherer als der ersten Ordnung liegen.

Die Untersuchungen sind mittels rein geometrischer Methoden geführt, welche der Verf. gewöhnlich bevorzugt. Hau.

---

J. C. Kluyver. Vraagstuk No. 7. Nieuw Archief XIX. 1-34.

Die Aufgabe ist die, den Complex der Geraden zu untersuchen, welche auf sämtlichen durch sieben gegebene Punkte gehenden quadratischen Flächen liegen. Ordnet man jedem Punkte $A$ des Raumes denjenigen zu, welcher mit $A$ in Bezug auf jede Fläche des Netzes harmonisch liegt, so wird der fragliche Complex von den Verbindungsgeraden $AA'$ gebildet. Zuerst werden die allgemeinen Eigenschaften des Netzes kurz zusammengestellt. Speciell wird hingewiesen auf die Kegel des Netzes, für deren Scheitel $p$ der zugeordnete Punkt unbestimmt wird, so dass einem derartigen Punkte eine Gerade zugeordnet erscheint. Die Scheitel $p$ bilden die Kerncurve $C^6$. Durch jeden Punkt $P$ des Raumes geht eine Basiscurve $R^4$ des Netzes, und jede Sehne dieser Curve enthält ein Punktepaar $A$, $A'$. Der Complexkegel in $P$ ist deshalb dritter Ordnung und sechster Klasse. Die acht Basispunkte $H_1$, $H_2$, ..., $H_8$ des Netzes sind einfache Hauptpunkte des Complexes.

Nähere Untersuchung des Complexkegels eines Punktes $P$. Lineare Construction desselben. Die Punkte $A$, $A'$ bilden auf dem Complexkegel eine Raumcurve siebenten Grades und zwei und zwanzigsten Ranges mit zehn scheinbaren Doppelpunkten. Die Complexcurve in einer beliebigen Ebene $\pi$ ist dritter Klasse und sechster Ordnung mit neun Spitzen. Die Rückkehrtangenten sind Osculationssehnen der Basiscurven $R^4$, welche die Ebene $\pi$ osculiren. Die Construction der Curve hängt von der Lösung einer kubischen Gleichung ab. Dualistische Beziehungen zwischen dem Complexkegel eines Punktes $P$ und der Complexcurve einer durch $P$ gehenden Ebene $\pi$. Singularitäten der Complexkegel und Curven: Complexkegel mit Doppellinie. Durch jeden Punkt $P$ gehen vier Kegel des Netzes, somit auch vier Netzkegelstrahlen. Jeder derselben kommt auf dem einem einzigen seiner Punkte zugehörigen

Complexkegel als Doppellinie vor. Der geometrische Ort dieser singulären Punkte ist eine singuläre Fläche $S$. Complexkegel mit Rückkehrlinie und mit zwei Doppellinien. Es sind im Complex keine Kegel vorhanden, welche in drei Strahlenbüschel zerfallen sind. Complexcurven mit Doppeltangente und mit zwei oder drei Doppeltangenten.

Untersuchung der singulären Fläche $S$, deren Ordnung und Klasse sich schon beiläufig ergeben haben. Die Doppelcurve setzt sich zusammen aus den 28 Sehnen $H_i H_k$, den 28 Raumcurven $Q_{ik}$ dritten Grades, welche durch die sechs übrigen Basispunkte jemals hindurchgehen, und aus der Kerncurve $C^6$. Die Hauptpunkte des Complexes sind zwölffache Punkte der Fläche $S$. Weitere Singularitäten und Vergleichung ihrer Zahlen mit den von Hrn. Voss für den allgemeinen Complex dritter Ordnung angegebenen. Die Complexfläche $V$ einer gegebenen Axe ist zwölften Grades und zwölfter Klasse; die Axe $l$ enthält 24 pinch-points und ist selbst in 24 pinch-planes enthalten. Für den Büschel der Basiscurven $R^4$ wird gezeigt, dass der Ort der Inflexionspunkte mit demjenigen der zugeordneten Punkte $A$, $A'$ der Netzkegelstrahlen identisch ist, und dass die Enveloppe der Inflexionstangentenebenen die doppelt gezählte Fläche $S$ ist. Weiter wird die Congruenz der „doppelten Osculationssehnen", d. h. der vierundzwanzig jeder $R^4$ zugehörigen Sehnen, bei denen die Osculationsebenen der beiden Endpunkte die ganze Sehne enthalten, untersucht. Vier Fälle, bei denen die Basispunkte eine besondere Lage haben, werden schliesslich kurz besprochen. Mo.

---

F. Machovec. Ueber geradlinige Flächen zweiter Ordnung und über die im tetraedralen Complexe enthaltenen Strahlensysteme. Rozpravy I. No. 3. (Böhmisch.)

F. Machovec. Ueber die Normalien der Flächen zweiter Ordnung, welche den ebenen Curven derselben entsprechen. Rozpravy I. No. 38. (Böhmisch.)

---

E. P. Knothe. Bestimmung aller Untergruppen der projectiven Gruppe des linearen Complexes. Leipzig. 68 S. 8°.

---

# Capitel 5.

## Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

### A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

S. Kantor. Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques. Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Naples dans le concours pour 1883. Naples (1891). 335 S. gr. 4° u. 4 Taf.

Bekanntlich gehört zu einer Cremona'schen Transformation im allgemeinen eine endliche Anzahl cyklischer Gruppen mit vorgegebenem Index, d. h. Gruppen, deren Punkte die Eigenschaft haben, dass eine bestimmte Anzahl von Wiederholungen der Transformation auf den Ausgangspunkt zurückführt (Kantor, Annali di Mat. X. 64). Erzeugt jeder Punkt der vereinigten Ebenen einen $n$-punktigen Cyklus, so wird die betreffende Transformation „periodisch" vom Index $n$ genannt. Als Preisaufgabe für 1883 hatte nun die Neapolitanische Akademie eine Untersuchung betreffend die Bedingungen für das Auftreten der Periodicität, sowie die Construction der bezüglichen Transformationen verlangt. Damals kannte man, ausser den periodischen Collineationen (Homographien), (Battaglini, Lüroth), nur die sogenannten Involutionen, d. h. die periodischen Transformationen mit Index 2 (Bertini, Caporali) und einige Klassen von periodischen quadratischen Verwandtschaften mit beliebigem Index (Kantor).

Die vorliegende Arbeit ist eine teilweise umgearbeitete, um vieles bereicherte Wiedergabe der Abhandlung, welche 1884 preisgekrönt wurde. Sie zerfällt in vier Teile.

Der erste Teil enthält eine übersichtliche Darstellung der periodischen Collineationen. Viele Methoden und Resultate dieses Abschnitts sind wesentlich neu, darunter eine Methode zur Darstellung der Gleichungen von anallagmatischen Curven, d. h. von Curven, welche durch die betreffende Collineation in sich transformirt werden; sodann eine vollständige Aufzählung der Collineationen, welche eine kubische Curve invariant lassen; hier sind namentlich die Betrachtungen über äquianharmonische Curven neu. Eine Untersuchung der anallagmatischen Büschel von kubischen Curven ist hinzugefügt.

Der zweite Teil enthält eine sehr vollständige Theorie der periodischen quadratischen Verwandtschaften, für welche sich das Grundprincip bereits in einer Arbeit des Verfassers „Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen der Ebene" (Wiener Ber. LXXXII, F. d. M. XII. 1880. 623) findet. Dieses fundamentale Princip lautet etwa: „Damit eine quadratische Transformation $Q_2$ periodisch sei, müssen entweder sämtliche Hauptpunkte des ersten Systems mit denen des zweiten zusammenfallen, oder doch durch wiederholte Anwendung der Transformation auf ihre Lage im zweiten System in die Hauptpunkte des letzteren übergeführt werden können." Es ist eine solche Verkettung der Hauptpunkte durch eingeschaltete Punkte notwendig, damit eine Erniedrigung des Grades der transformirten Curven eintrete. Wenn nun die gegenseitige Lage der beiden Hauptpunktetripel so bestimmt werden kann, dass die $n^{te}$ Iterirung der Transformation zur Collineation wird, so erübrigt nur, die Bedingung zu suchen, unter welcher diese in eine Identität übergeht.

Ebenfalls wichtig für die Untersuchung der periodischen $Q_2$ sind die periodischen Homographien der Strahlenbüschel, welche je einen der vier Doppelpunkte der $Q_2$ zum Scheitel haben und dadurch bestimmt erscheinen, dass jedem Strahl die Tangente des Kegelschnitts zugeordnet wird, in welchen er transformirt wird.

Zunächst wird eine periodische $Q_2$ mit Index 6 ausführlich untersucht, wo das Hauptpunktetripel $a'b'c'$ des zweiten Systems in die Hauptpunkte $a, b, c$ des ersten transformirt wird; je zwei Paare von zugeordneten Hauptpunkten sind ausserdem verkettet

durch eine periodische Homographie vom Index 4. Die beiden Tripel bilden zwei vierfach perspective Dreiecke, von welchen aber nur eins beliebig gewählt werden kann. Die betreffende $Q_2$ transformirt eine Gerade der Reihe nach in einen Kegelschnitt $C_2$, in eine biquadratische Curve $C_4$ mit drei Doppelpunkten, in eine $C_5$ mit sechs Doppelpunkten, in eine $C_4$, eine $C_2$ und schliesslich wieder in die ursprüngliche Gerade. Die Punkte eines Cyklus bilden ein Brianchon'sches Sechsseit.

Aus der Fülle von interessanten Theoremen über kubische Curven, welche sich diesen Erörterungen ungezwungen anschliessen, sei Folgendes hervorgehoben. Die sechs Hauptpunkte und drei der Doppelpunkte bilden die Basis eines Büschels äquianharmonischer $C_3$, welche durch $Q_2$ involutorisch vertauscht werden; anallagmatisch sind unter ihnen eine eigentliche $C_3$, sowie die aus den Geraden *aa'*, *bb'*, *cc'* gebildete ausgeartete Curve; erstere enthält specielle Tripel, welche einer $C_3$ umbeschrieben sind.

Durch Aufstellung von Tabellen, in denen die successiven Transformationen einer Geraden bei vorgegebener „Charakteristik“ (System von Hauptpunkten und den zu deren Verkettung notwendigen Einschaltungen) angedeutet werden, untersucht der Verfasser die Charakteristiken, bei welchen Periodicität möglich ist, und erhält 13 verschiedene Fälle, welche nun in Bezug auf ihre Existenzfähigkeit des weiteren untersucht werden müssen; Zusammenfallen von Hauptpunkten wurde vorläufig ausgeschlossen.

Weil das Verfahren, durch welches die Existenz der oben erwähnten, besonders untersuchten $Q_2$ dargethan wurde, zu mühsam ist, geht der Verfasser dazu über, sich in einer Voruntersuchung die erforderlichen neuen Hülfsmittel zu schaffen. Er bestimmt nämlich zunächst alle $Q_2$, welche eine vorgegebene kubische Curve $C_3$ in sich transformiren. Aus dieser mit grosser Ausführlichkeit und unter Anwendung der Parameterdarstellungen angestellten Untersuchung ergiebt sich, dass für eine periodische $Q_2$ nur harmonische, äquianharmonische und spitzenbehaftete $C_3$ als anallagmatische Curven auftreten können.

Es wird nun die Existenz der vorher als möglich erwiesenen periodischen $Q_2$ dadurch sicher gestellt, dass eine $C_2$ oder eine $C_3$

ermittelt wird, welche durch $Q_2$ in sich übergeht. Wenn nämlich die zur betreffenden Charakteristik gehörige Tabelle mit einer Homographie abschliesst, offenbart sich die Periodicität durch die Existenz einer Curve mit periodischen Gruppen.

Als weitere Hülfsmittel der Erörterung seien noch erwähnt: a) die Betrachtung der Directionskegelschnitte, welche erzeugt werden durch die Strahlenbüschel, deren Scheitel von dem involutorischen Punktepaar der $Q_2$ gebildet werden, und wo jedem Strahl des einen die Tangente des entsprechenden Kegelschnittes im anderen Scheitel zugeordnet wird; b) die Anwendung des Theorems: Wenn eine $Q_2$ die Punkte $p, q$ in $p', q'$ umsetzt, giebt es eine Collineation, durch welche $a, b, c, p, q$ in $a', b', c', p', q'$ übergehen; c) die Bestimmung der Transformationen, welche die Punkte der Charakteristik verketten; d) das Princip der Transposition, welches den Verfasser in den Stand setzt, die gefundenen $Q_2$ auf Typen zurückzuführen; dabei wird die aus der Gruppentheorie bekannte Operation $TST^{-1}$ angewandt, wo nun unter $T$ und $S$ quadratische Verwandtschaften zu verstehen sind. Werden alle Transformationen, welche durch Transposition zusammenhängen, durch diejenige dargestellt, welche die kleinste Charakteristik besitzt, so lassen sich schliesslich sämtliche periodischen $Q_2$ zurückführen auf die nachstehenden Typen:

1) Typus der Homographie mit beliebigem Index;

2) Typus mit Verkettung $a'a'_1 \dots a'_m (\equiv b)$; $b'b'_1 \dots b'_m (\equiv a)$ und Coincidenz von $c$ und $c'$; Index $2(m+1)$;

3) Typus $b'b'_1 \dots b'_m (\equiv a)$, $a' \equiv b$; $c \equiv c'$; Index $2(m+1)$.

Vergleichende Betrachtungen über die zahlreichen wesentlich verschiedenen periodischen $Q_2$ und deren anallagmatische Curven bilden den Schluss des zweiten Abschnittes, der die Seiten 13 bis 177 umfasst.

Im dritten Teil (S. 177 bis 262) werden mit Hülfe der oben erwähnten Principien sämtliche kubischen und biquadratischen periodischen Transformationen bestimmt, welche nicht auf Collineationen oder $Q_2$ zurückgeführt werden können. Nach Ausschluss derjenigen Charakteristiken, welche trotz geeigneter Verkettung der Hauptpunkte keine Periodicität gestatten, gelangt der Verfasser schliess-

lich zu fünf Typen existirender kubischer Transformationen und nachher zu zwei Typen von biquadratischen Transformationen.

Der vierte Teil (S. 262-335) enthält, der Ueberschrift zufolge, die kanonische Lösung des Problems der birationalen periodischen Transformationen; die Anzahl der wichtigen Theoreme ist hier eine so grosse, dass Referent sich auf das Hervorheben der seines Erachtens wichtigeren beschränken muss.

Der Verfasser bemerkt, dass es sich hier eigentlich um die Integration eines Systems von Gleichungen mit endlichen Differenzen handelt. Diesem algebraischen Problem substituirt er ein geometrisches, welches er vermittelst der Principien der Verkettung und der successiven Transformationen lösen will; es umfasst einen arithmetischen Teil, wo eine geeignete Bestimmung der Hauptpunkte in Bezug auf Verkettung und Coincidenz derart zu treffen ist, dass die für die Periodicität erforderliche Erniedrigung des Grades der Transformation und der Singularitäten eintreten kann. Der allgemein gehaltenen Lösung des obigen Gleichungssystems entspringt als Bedingung für die Periodicität, dass eine gewisse Determinante nur für Einheitswurzeln verschwinde.

Weiter wird bemerkt, dass es niemals Gegenstand einer Problemstellung sein könne, sämtliche Charakteristiken für eine periodische Transformation von vorgegebenem Grade aufzustellen; vielmehr müssen die unendlich vielen möglichen Transformationen in Klassen mit veränderlicher Anzahl eingeschalteter Verkettungspunkte geordnet werden; die übrigen, mit bestimmter Anzahl von Einschaltungen, sind in endlicher Zahl vorhanden. Zu jeder Klasse von Charakteristiken gehört eine primitive Charakteristik, wo sämtliche Hauptpunkte des ersten Systems mit denen des zweiten zusammenfallen; die übrigen werden derivirte Charakteristiken genannt; in ihnen sind Verkettungen durch Coincidenzen ersetzt.

Wenn eine periodische Transformation vom Grade $2m$ ist, müssen ein Punkt und sein $m^{\text{ter}}$ transformirter einander in einer Involution der Ebene entsprechen; wenn nötig, muss der Begriff der Charakteristik ausgedehnt werden durch Hinzufügung von Doppelpunkten oder periodischen Gruppen. Hier werden die Resultate des Herrn Bertini über Involutionen verwertet. Die Charak-

teristiken vom Grade $2m+1$ lassen sich auffassen als Wiederholungen von solchen gerader Ordnung. Es giebt nur eine endliche Zahl birationaler Transformationen, wo die Anzahl der Hauptpunkte in jedem Systeme sechs, sieben oder acht beträgt; diese Zahl wird aber unendlich gross, wenn die Basis der Verwandtschaft mehr als acht Punkte enthält. Bei weniger als neun Hauptpunkten in jedem System liefert jede Charakteristik eine geschlossene Tabelle.

Alle Wiederholungen einer periodischen Charakteristik, welche denselben Index wie diese liefern, sind mit dieser Transformation äquivalent; hierzu gehörende Tabellen finden sich am Ende der Arbeit.

Der Verfasser widmet nun den Charakteristiken mit sechs, sieben oder acht Punkten eine eingehende Untersuchung, aus welcher hervorgeht, dass sämtliche Charakteristiken mit weniger als neun Punkten mittels Transpositionen sich in 27 Klassen ordnen lassen, denen noch sechs quadratische, drei kubische, eine biquadratische Transformation, sowie die Homographien zugesellt werden müssen.

Der folgende Paragraph bringt eine arithmetische Theorie der Charakteristiken birationaler Transformationen. Unter Singularitätencomplex einer Curve $C_n$ versteht der Verfasser das System der Zahlen $y_k$, welche angeben, wie oft die Curve durch jeden der Hauptpunkte geht. Es wird ein Gleichungssystem aufgestellt für die Aenderung, welche dieser Complex durch die Transformation erfährt. Diese linearen Substitutionen mit reellen, ganzen Coefficienten lassen die Formen $n(n+3)-\Sigma y(y+1)$ und $(n-1)(n-2)-\Sigma y(y-1)$ invariant. Hieraus ergiebt sich dieselbe Eigenschaft für die Formen $3n-\Sigma y$, $n^2-\Sigma y^2$ und $mm'-\Sigma y_k y'_k$, wo $m$ und $m'$ die Grade der Transformation sind.

Jede lineare Substitution mit birationaler Matrize (wie sie der Verfasser nennt) kann erzeugt werden durch wiederholte Anwendung der einfachsten Substitution:

$$\begin{aligned} n' &= 2n-y_1-y_2-y_3, \\ y'_1 &= n-y_2-y_3, \\ y'_2 &= n-y_3-y_1, \\ y'_3 &= n-y_1-y_2. \end{aligned}$$

In diesem Paragraphen werden gewisse Theoreme des Herrn Frobenius (J. für Math. LXXXIV) in Anwendung gebracht.

Als Grundlage für die Untersuchungen über Reductibilität der Transformationen wird eine charakteristische Function benutzt, deren Aenderungen durch Substitutionen ermittelt werden. Ein weiteres Hülfsmittel bilden die anallagmatischen Singularitätencomplexe, d. h. Wertsysteme, welche durch die oben erwähnten fundamentalen Substitutionen in sich transformirt werden. Es wird bewiesen, dass es stets solche Complexe giebt. Die Untersuchung gipfelt in der Aufstellung von zwei wichtigen Theoremen (S. 313—315), deren erstes sämtliche periodischen Charakteristiken durch Typen, mit ihren Matrizen, aufzählt, während das zweite Theorem die wirklich existirenden unter ihnen hervorhebt. Letztere bilden drei Hauptgruppen: a) die periodischen Homographien (mit gewissen Beschränkungen in den sie darstellenden Substitutionscyklen); b) gewisse Transformationen $n^{\text{ten}}$ Grades mit zwei zusammenfallenden $(n-1)$-fachen Hauptpunkten; c) 27 vereinzelte, auch im ersten Theorem aufgezählte Transformationen. Es ist hier zu bemerken, dass der Existenzbeweis der unter b) erwähnten Verwandtschaften erst später erbracht wird.

Ein weiterer Paragraph handelt über die uneigentlichen Gruppen. Jede Transformation enthält nämlich eine bestimmte Anzahl periodischer Gruppen mit vorgegebenem Index; diese Anzahl kann durch Verkettung und Coincidenz der Hauptpunkte verringert werden; die Basispunkte der Verwandtschaft bilden alsdann gewisse uneigentliche Gruppen.

Eine Untersuchung der zu den Transformationen des Hrn. de Jonquières gehörenden Matrizen, mit und ohne Coincidenz der vielfachen Hauptpunkte und in Bezug auf Periodicität, liefert sodann schliesslich den oben erwähnten Beweis.

Den Abschluss der in jeder Beziehung reichhaltigen und interessanten Abhandlung bildet eine Betrachtung über Gruppen von Charakteristiken und Transformationen. Vrs.

D. Montesano. Su una classe di trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio di genere arbitrario $n$ e di grado $2n+1$. Nota. Napoli. Tip. De Robertis. 15 S.

Es existirt eine birationale Transformation zwischen zwei gewöhnlichen Räumen, bei welcher in einem Raume das homaloidische System aus Flächen besteht, welche von der Ordnung $2n+1$ sind, und eine Curve vierter Ordnung und erster Art, für jede $n$-fach, und $2n$ einfache Gerade, welche Sehnen jener Curve sind, gemeinschaftlich haben; das Geschlecht der Transformation ist $n$. Im anderen Raum besitzt das bezügliche homaloidische System ganz dieselben Eigenschaften. Dieses symmetrische Verhalten der Verwandtschaft führt natürlich auf die Frage, ob dieselbe involutorisch werden kann. Es ist eben diese Frage, welche Herr Montesano bejahend beantwortet hat; zugleich hat er die Construction aller in Rede stehenden Transformationen gelehrt. Diese bilden eine Familie von eindeutigen höheren Raumtransformationen, welche die Eigenschaft besitzen, eine gewisse Strahlencongruenz in sich selbst überzuführen, eine Familie, von der man zwei ähnliche durch ältere Untersuchungen des Verf. (Lomb. Ist. Rend. (2) XXI; Rom. Acc. L. Rend. (4) $V_2$; vgl. F. d. M. XX. 1888. 595; XXI. 1889. 624) schon kennt.

La.

C. Le Paige. Rapport sur le mémoire intitulé: „Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques“, par Fr. Deruyts. Belg. Bull. XXIII. 9-11.

Hr. Fr. Deruyts verallgemeinert die homographischen Transformationen der Ebene und des Raumes, indem er die lineare Beziehung $f=0$ zwischen zwei Reihen von $n+1$ Variabeln untersucht. Wenn die Discriminante von $f$ nebst allen ihren Unterdeterminanten $(n-k+2)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet, so kommt die ausgeartete (dégénérescente) Homographie auf eine nicht ausgeartete zwischen zwei Systemen von $n-k$ Dimensionen zurück. Der Verfasser forscht nach, wo die beiden betrachteten Räume zusammenfallen, und wo ausserdem die entsprechenden Elemente incident

sind. Die Arbeit wird in den Denkschriften der Akademie in 4° veröffentlicht werden. Mn. (Lp.)

---

Fr. Deruyts. Sur la corrélation polaire involutive dans un espace linéaire quelconque. Liège Mém. XVII. 16 S.

Der Verf. untersucht die Eigenschaften der polaren involutorischen Correlation, welche durch eine gleich Null gesetzte bilineare schief symmetrische Form von $n+1$ Variabeln definirt wird.

Dml. (Lp.)

---

Fr. Deruyts. Mémoire sur la théorie de l'involution et de l'homographie unicursale. Liège Mém. XVII. 208 S.

Bericht in F. d. M. XXIII. 1891. 641 ff.

---

## B. Conforme Abbildung und dergleichen.

A. R. Forsyth. Note on a special conformation of areas. Quart. J. XXVI. 145-148.

Die Note behandelt die conforme Abbildung eines durchschnittenen Kreisringes in der $z$-Ebene auf das Innere eines Kreises in der $w$-Ebene; dabei wird die bekannte Formel

$$\frac{z}{c} = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}$$

zu Grunde gelegt, wo $c$ und $h$ reelle Constanten bedeuten. Ht.

---

Rollin A. Harris. Note on the use of supplementary curves in isogonal transformation. American J. XIV. 291-300.

Der Verfasser betrachtet zur Darstellung eines Wertes $z = x+iy$ ausser der $xy$-Ebene noch eine zweite $xw$-Ebene, wo $jw = y$ und $j^2 = i^2 = -1$; $ij = \sqrt{1}$ ist, und verfährt analog bei der Abbildung. Er erhält dann in der $xw$- resp. $\bar{X}W$-Ebene ebenfalls einander

entsprechende Curven, welche bei einer Construction der conformen Abbildung der $xy$-Ebene in die $XY$-Ebene benutzt werden können. Dies wird an sehr einfachen Beispielen erläutert. Welchen Nutzen die Betrachtungsweise gewähren soll, ist dem Referenten nicht recht ersichtlich. A.

---

Rollin A. Harris. Note on isogonal transformation; particularly on obtaining certain systems of curves which occur in the statics of polynomials. Annals of Math. VI. 77-80.

Die Note behandelt einige Probleme der conformen Abbildung einer Ebene auf die andere mit interessanten Anwendungen auf gewisse statische und hydrodynamische Probleme. A.

---

C. Castrilli. Projezione stereografica orizzontale di un emisfero terrestre. Metodo di costruzione. Batt. G. XXX. 31-34.

Die Construction der stereographischen Horizontalprojection einer Halbkugel wird durchgeführt. A.

---

Lord Kelvin. Generalization of Mercator's projection performed by aid of electrical instruments. Nature XLVI. 490-491.

Wenn eine einfach zusammenhängende krumme Oberfläche durch zwei Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Geraden in infinitesimale Quadrate zerschnitten ist, so denke man sich diese unendlich kleinen Quadrate so vergrössert, dass sie alle congruent werden. Legt man sie dann in einer Ebene neben einander so ist die krumme Fläche „mercatorisirt" nach dem Ausdrucke des Verfassers. Die praktische Ausführung lässt sich wie folgt bewirken: 1) Man fertige die zu mercatorisirende Fläche aus dünnem Metallbleche von derselben Dicke an (d. h. die Dicke ist ein kleiner Bruchteil des kleinsten Krümmungsradius). 2) Man wähle zwei Punkte $N$, $S$ der Oberfläche aus und bringe in ihnen die Elektroden

einer Batterie an. 3) Mit Hülfe der beweglichen Elektroden eines Voltameters ziehe man eine äquipotentiale Linie *E* so eng wie möglich um den einen Pol, eine zweite *F* so eng wie möglich um den anderen. Zwischen diesen beiden Aequipotentialen *E*, *F* zeichne man eine grosse Zahl *n* verschiedener Aequipotentialen, teile jede derselben in *n* gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte Linien, welche das ganze System der Aequipotentialen unter rechten Winkeln schneiden. Diese zerschneiden nach Maxwell (Electricity and magnetism, § 651) die ganze Oberfläche in infinitesimale Quadrate. 4) Man ändere die Grösse der Quadrate, so dass alle eine und dieselbe Seitenlänge haben, und lege sie in ihrer ursprünglichen Anordnung neben einander. Lp.

---

Lord Kelvin. To draw a Mercator chart on one sheet representing the whole of any complexly continuous closed surface. Nature XLVI. 541-542.

Die mehrfach zusammenhängende Fläche wird durch passende Schnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt und dann nach der Vorschrift verfahren, die im vorangehenden Referate gegeben ist. Lp.

---

A. Breusing. Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe. Leipzig. 76 S. gr. 8°.

---

# Zehnter Abschnitt.

## Mechanik.

### Capitel 1.

### Allgemeines (Lehrbücher etc.).

P. Appell. Traité de mécanique rationnelle. Tome I. Statique. Dynamique du point. Paris, Gauthier-Villars et Fils. VI + 549 S. gr. 8°, 1893. [Wiedemann Beibl. XVIII. 397-398, 1894.]

Das Lehrbuch umfasst den Inhalt der Vorlesungen des Verfs. an der Faculté des Sciences zu Paris nach den Prüfungsbestimmungen für die Lehrer an Mittelschulen. Bei dem Leser werden keine Kenntnisse über den Gegenstand vorausgesetzt; deshalb werden anfangs die unentbehrlichen Vorbegriffe dargelegt, die Theorie der Vectoren, die Kinematik des Punktes und des starren Körpers, die grundlegenden Gesetze der Mechanik, die Lehre von der Arbeit der Kräfte. Danach folgt die eigentliche Mechanik, welche in Statik und Dynamik eingeteilt ist.

Statt nun, wie sonst wohl üblich, die Lagrange'schen Methoden der analytischen Mechanik an das Ende zu verweisen und eine ganz gesonderte Darstellung von ihnen zu geben, hat der Verf. sie von Anfang an in den fortlaufenden Vortrag hineingearbeitet. So stellt er nach einer eingehenden Erörterung der elementaren Statik das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf als die Zusammenfassung aller Gleichungen des Gleichgewichts und wendet es auf zahlreiche Beispiele an. Hierauf folgt in der Dynamik des materiellen Punktes die elementare Behandlung der Bewegung eines

freien Punktes, eines Punktes auf einer Curve oder Oberfläche, die Wiedergabe des Dirichlet'schen Beweises für die Stabilität des Gleichgewichtes eines Massenpunktes. Gerade wie in Hrn. Budde's „Allgemeiner Mechanik", die jedoch die Statik als einen besondern Fall der Dynamik hinstellt und daher nicht von der letzteren trennt, werden nun für den einzelnen Massenpunkt die Gleichungen von Lagrange und Hamilton entwickelt, die Jacobi'schen Theoreme, das Princip der kleinsten Wirkung, die Sätze von Thomson und Tait.

Die analytische Dynamik wird dann in ihrer ganzen Allgemeinheit bei Gelegenheit der Bewegungen der Systeme behandelt; letztere kommen also zweimal zur Erörterung, zuerst bei der Anwendung der allgemeinen Principien, danach vermittelst der Methoden von Lagrange, Hamilton, Jacobi. — Zahlreiche in kleinerem Drucke wiedergegebene Beispiele werden im Texte behandelt; andere werden als Uebungen mit kurzen Angaben über die Lösung vorgelegt.

Das ganze Werk wird demnach das Gebiet der analytischen Mechanik in grosser Ausführlichkeit abhandeln. Dem Verf., der seit einer Reihe von Jahren manche Themata, die hierher gehören, in Einzelschriften bearbeitet und schöne Ergebnisse dabei erzielt hat, steht eine grosse Belesenheit in der einschlägigen Litteratur zu Gebote, und auch die vielen Beispiele, die er in kleinerem Drucke den einzelnen Capiteln angereiht hat, zeugen von der Aufmerksamkeit, mit welcher er alle Veröffentlichungen verfolgt, obschon eine Bevorzugung der französischen Erscheinungen, wie wohl natürlich ist, nicht verkannt werden kann. Die mathematische Vielseitigkeit des Werkes wird ihm gewiss viele Leser verschaffen. Lp.

---

ALEXANDER ZIWET. An elementary treatise on theoretical mechanics. Part I: Kinematics. Part II: Introduction to dynamics; statics. New York and London, Macmillan and Co. VIII + 181, VIII + 183 S. 8°. (1893).

Das auf drei Teile veranlagte Werk ist für die Bedürfnisse der Studirenden auf amerikanischen Hochschulen berechnet und setzt keine vorgängige Kenntnisse in der Mechanik voraus, wohl aber die Bekanntschaft mit der Infinitesimalrechnung. Der mit der

einschlägigen Litteratur wohl vertraute Verfasser hat besonders die Bedürfnisse derjenigen Studirenden berücksichtigt, welche sich den technischen Fächern zuwenden, und daher die höheren analytischen Partien ausgeschlossen, dagegen Reihen von Uebungsaufgaben den einzelnen Capiteln angehängt, deren Lösungen am Schlusse jedes Bandes zusammengestellt sind. Als einleitendes Capitel des ersten Bandes wird die Bewegung ohne Rücksicht auf die Zeit betrachtet. Die Hinzunahme des Begriffes der Zeit ergiebt dann den Gegenstand der Kinematik, eingeteilt in lineare, ebene, räumliche Kinematik. Dabei werden die Bewegungen im widerstehenden Mittel und die Centralbewegungen behandelt, die Elemente der zwangläufigen Bewegung starrer Körper (Kinematik im Reuleaux'schen Sinne) vorgetragen. Teilt man dem geometrischen Begriffe dann noch Masse zu, so wird man zur Dynamik geführt, als deren erster Teil aber die Statik abgetrennt und für sich behandelt wird im zweiten Bande, während dem dritten, inzwischen erschienenen Bande die allgemeine Dynamik zugewiesen ist. Auch in der Statik sind diejenigen Teile hervorgehoben, welche in der Technik angewandt werden, so ist z. B. ein Paragraph den Fachwerken, ein anderer den graphischen Methoden gewidmet. Das Princip der virtuellen Arbeit und die Lehre von den anziehenden Kräften mit einem Streifblick auf die Potentialtheorie machen den Beschluss. Hinweise auf die gangbarsten ausführlichen Lehrbücher der Mechanik und auf die vorhandenen Aufgabensammlungen geben dem Studirenden Fingerzeige für weitere Belehrung. Lp.

---

K. Hecht. Lehrbuch der reinen und angewandten Mechanik für Maschinen- und Bautechniker. Band I. Die reine Mechanik. Dresden. Gerhard Kühtmann. VIII + 412 + 31 S. gr. 8°.

Der Zusatz im Titel: „Elementar in leicht fasslicher Weise dargestellt mit Rücksicht auf den in Maschinenbau- und Bauschulen fortschreitenden Unterricht in der Mathematik und mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis versehen“ kennzeichnet das Buch als innerhalb des Gebietes der Elementarmathematik gehalten, als ein

„Mittelwerk“, an dessen Hand der Schüler gleichzeitig mit den Begriffen der Mathematik vertraut gemacht werden soll. Demnach ist natürlich von der Infinitesimalrechnung kein Gebrauch gemacht; die Trägheitsmomente werden in bekannter Weise mit Hülfe der Summen der Potenzen der ganzen Zahlen berechnet. Dagegen ist das Hauptgewicht auf die Veranschaulichung der Sätze durch graphische Darstellungen und durch eine grosse Zahl von durchgerechneten numerischen Beispielen gelegt. Der Ausdruck lässt zuweilen an Strenge zu wünschen übrig, sei es in Folge einer zu weit getriebenen Anbequemung an die ungeschulte Fassungskraft des Lesers, sei es zufolge der in technischen Kreisen üblichen, etwas nachlässigeren Sprache. Im übrigen ist jedoch für den vom Verfasser angegebenen Zweck die Auswahl und Behandlung des Stoffes durchaus geeignet; die vielen der Praxis entnommenen Beispiele dienen für die angehenden Techniker gewiss zur Belebung eines ihnen zunächst spröde erscheinenden Stoffes und reizen zur Vertiefung in die vorgetragenen Lehren. Die Verteilung des Inhaltes erhellt aus der nachfolgenden Uebersicht: Einleitung. Bewegungslehre. Die Mechanik der festen Körper. Begriff von Masse, Gewicht, Kraft und Beschleunigung. Das Hebelgesetz. Arbeit. Die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften und Geschwindigkeiten. Der Schwerpunkt. Grundsätze der Reibung. Die verschiedenen Gleichgewichtszustände. Die lebendige Kraft als Arbeit. Bewegungen unter gewissen Bedingungen. Die Stosskräfte. Die letzten 31 Seiten enthalten mehrere oft gebrauchte Tabellen.

Lp.

---

A. L. Selby. Elementary mechanics of solids and fluids. Oxford. Clarendon Press. XI + 299 S. 8°.

Eine durchaus frische Behandlung eines Gegenstandes, über welchen es schon manche sehr gute elementare Bücher giebt. Die von dem Lernenden vorausgesetzte Kenntnis der Mathematik ist nicht gross; aber sehr sorgfältige Darstellungen sind solchen Abschnitten gewidmet wie Bewegungen eines ausgedehnten Körpers, Gravitation, Elasticität, Capillarität, die sonst etwas oberflächlich

behandelt zu werden pflegen. Das Buch kann als verlässlich empfohlen werden. Gbs. (Lp.)

V. Faustmann. Didaktische Bemerkungen zur elementaren Mechanik. Pr. Gymn. Czernowitz 1891-92. 37 S. Lex. 8°.

Bemerkungen zum Unterricht in den Mittelschulen. 1) Differentialquotienten. 2) Integrationen. 3) Kraft und Masse. 4) Masseinheiten. 5) Angriffspunkt einer Kraft. 6) Schwerpunkt. 7) Maschinen. 8) Hebel. 9) Krummlinige Bewegung. 10) Fliehkraft. 11) Aenderung der Schwere infolge der Axendrehung der Erde. 12) Newton's Anziehungsgesetz. 13) Die drehende Bewegung und das physische Pendel. 14) Erscheinungen, die in genügender Weise sich elementar nicht erklären lassen. 15) Versuch einer Abgrenzung des Lehrstoffes aus der Geomechanik nach dem Mindestausmasse für Gymnasien in zweckmässiger Aufeinanderfolge. Lp.

J. G. MacGregor. On the fundamental hypotheses of abstract dynamics. Presidential address. Trans. Roy. Soc. Canada. 21 S. 4°, Science XX. 71-75.

Hr. MacGregor bemerkt in einer Fussnote zu dieser Schrift: „Durch den beklagenswerten Tod des Secretärs der Section ging das Manuscript dieser Ansprache verloren. Ich habe sie wieder niedergeschrieben mit Hülfe roher Noten und eines in Science, vol. XX, p. 71 (1892) veröffentlichten Auszuges. Beim Niederschreiben habe ich einige durch die Kritiken der Herren Hoskins und E. T. Dixon (Science XX, 122 u. 149) veranlasste Aenderungen gemacht.“

Die Bemerkungen des Verfassers erstrecken sich auf vier Punkte: 1) ob die Newton'schen Bewegungsgesetze eine präcisere Fassung erhalten können, 2) ob sie unabhängig von einander sind, 3) ob sie hinreichen zur Ableitung aller Gesetze der analytischen Mechanik, und wenn nicht, was für ein Zusatz zu diesem Zwecke ihnen zugefügt werden müsse, 4) ob die so als notwendig aufgefundenen Bewegungsgesetze an Zahl verringert werden können.

In Betreff der ersten Frage wird die Notwendigkeit eines Bezugsystems für die drei Newton'schen Gesetze hervorgehoben, ohne

welches ihre Fassung nicht bestimmt erscheint. Die von verschiedenen Autoren angestellten Untersuchungen über die zweite Frage werden vorgeführt und kritisirt; daraus zieht der Verf. den Schluss betreffs der Unabhängigkeit der Bewegungsgesetze, dass, während das erste Gesetz in dem zweiten wieder ausgesprochen sei, das zweite und dritte sich einer Ableitung aus einander oder aus einfacheren Hypothesen unzugänglich erwiesen hätten. Als unmöglich zu erschliessen aus den Bewegungsgesetzen wird das Princip von der Erhaltung der Energie bezeichnet. Damit wird dann nach einer Besprechung der Ansichten hervorragender Forscher über diese Frage der Versuch einer neuen Formulirung begründet:

„Während es also für Unterrichtszwecke vorteilhaft sein kann, die Bewegungsgesetze gemäss der geistigen Auffassungskraft der dem Unterrichte unterstellten Lernenden in kleinere oder grössere Teile zu zerlegen, können sie logisch in zwei Sätzen ausgesprochen werden, die ungefähr wie folgt zu fassen sind:

Das Bewegungsgesetz. Bezüglich irgend eines Systems von Massenpunkten, die frei von der Einwirkung einer Kraft sind und dieselbe Geschwindigkeit haben, ist die von einer Kraft in einem anderen Massenpunkte erzeugte Beschleunigung der Kraft proportional und hat dieselbe Richtung.

Das Gesetz des Zwanges. Die Naturkräfte können als Anziehungen oder Abstossungen angesehen werden, deren Grösse nur mit den Abständen der Massenpunkte sich ändern, zwischen denen sie wirken“. Lp.

---

P. Mansion. Sur les principes de la mécanique rationnelle. Brux. S. sc. XVI A. 81-85.

Nach dem Verf. sind die Principien der reinen Mechanik eine logische Folge der Definition der Ausdrücke: „Kraft“; Kraft, welche „zugleich“ auf einen Punkt wirkt; Systeme, welche „denselben“ äusseren Kräften unterworfen werden. Der Note folgen Bemerkungen, in denen Hr. de Tilly seine Anschauungen über denselben Gegenstand auseinandersetzt. Mn. (Lp.)

---

A. G. GREENHILL. Weight. Nature XLVI. 247-252.

Der Zweck dieser Erörterungen erhellt aus den Einleitungsworten: „Die folgenden Bemerkungen werden mit der Absicht dargebracht, die sich vergrössernde Kluft auszufüllen, welche zwischen der Behandlung der grundlegenden Vorstellungen der Dynamik, wie sie in unseren akademischen Lehrbüchern von dem Standpunkte der Wortabstraction aus gelehrt wird, und zwischen den Vorstellungen und der Redeweise derer entsteht, welche mit den vorhandenen Naturerscheinungen in Wirklichkeit zu rechnen haben“. Die Darlegungen suchen den Gebrauch des Wortes weight (Gewicht) in seinen verschiedenen Bedeutungen zu rechtfertigen, also nicht bloss als Mass für die Masse, sondern auch für Kräfte, wie diese Ansichten des Verfassers auch aus seinen früheren Aufsätzen hervorgehen. Die Gründe sind praktischer und sprachlicher Art. In letzterer Hinsicht vermisst der Verf. im Englischen ein Synonym des französischen „pesanteur“ gegenüber dem „poids“. Lp.

---

G. S. CARR. On the terms „centrifugal force“ and „force of inertia“. Nature XLV. 463.

Erörterungen über den Begriff der „Centrifugalkraft“; die Beibehaltung wird empfohlen gegenüber den „Elementen der Dynamik“ Loney's, der den Ausdruck abschaffen möchte. Die vielen hierüber in Deutschland gepflogenen Erwägungen sind nicht berücksichtigt. Lp.

---

J. DUCLOUT. Conferencias sobre Mecanica dadas en la Sociedad cientifica argentina. Anales de la Sociedad cientifica argentina XXXIV.

Vorträge über den Begriff der Energie und über die Anschauungsart der Mechanik, wenn man jenen Begriff als Grundlage dieser Wissenschaft annimmt, gehalten in dem argentinischen wissenschaftlichen Verein. Tx. (Lp.)

---

W. Williams. On the relation of the dimensions of physical quantities to directions in space. Phil. Mag. (5) XXXIV. 234-271.

Der charakteristische Zug dieser Abhandlung liegt in der Behandlung der Einheit der Länge als eines Vectors, so dass die einzigen Grössen, welche die Einheit als ihre Dimensionsformel haben, blosse Zahlen und Grössen von der Art der Tensoren, nämlich Verhältnisse zwischen ähnlichen und ähnlich gerichteten Concreten sind. Es ist praktisch unmöglich, einen Auszug aus diesem Aufsatze zu geben; doch mögen die folgenden Beispiele eine Vorstellung von dem allgemeinen Gedankengange erwecken. Bedeutet $M$ die Einheit der Masse, $T$ die der Zeit $X$, $Y$, $Z$ die längs der Coordinatenaxen genommenen Einheitslängen, so würde eine Fläche die Dimensionen $XY$, $YZ$, $ZX$ haben, ein Volumen $XYZ$, eine Kraft $MXT^{-2}$, $MYT^{-2}$, $MZT^{-2}$, eine Arbeit $MX^2T^{-2}$ u. s. w., eine Energie auf die Volumeneinheit $MXY^{-1}Z^{-1}T^{-2}$ u. s. w., ein Kräftepaar $MXYT^{-2}$ u. s. w. Den Winkeln werden so Dimensionen beigelegt: Winkel $XY^{-1}$ (Richtung des Radius $Y$, des Bogens $X$), Winkelgeschwindigkeit $XY^{-1}T^{-1}$, Arbeit eines Kräftepaares $MX^2T^{-2}$, räumlicher Winkel $YZX^{-2}$ (Fläche durch Radiusquadrat, Radius längs der $x$-Axe). In dieser Verbindung werden der Zahl $\pi$ Dimensionen beigelegt. Der interessanteste Teil der Schrift ist vielleicht der, welcher vom Elektromagnetismus handelt; doch sind die Symbole hier so zahlreich, dass wir auf den Text selbst verweisen müssen; wir bemerken nur, dass nach Verwerfung mehrerer Formen aus mannigfachen Gründen zwei verschiedene Dimensionsformeln für $\mu$ verbleiben: 1) $M(XYZ)^{-1}$, in welchem Falle $\mu$ die Dichtigkeit des Mediums wird und die magnetische Energie kinetisch ist, 2) $M^{-1}XYZ^{-1}T^2$, in welchem Falle $k$ die Dichtigkeit des Mediums wird und die elektrische Energie kinetisch ist. Gbs. (Lp.)

Bragg. Mathematical analogies between various branches of Physics. Nature XLV. 423.

Kurzer Auszug aus der Rede, welche der Verf. als Vorsitzender der Section A (Mathematik, Physik, Mechanik) der australischen

Association for the advancement of science zu Hobart (7-14 Jan.) gehalten hat. Lp.

---

TH. BECK. Historische Notizen. XII. Giambattista della Porta. XIII. Skizzen aus der Zeit der Hussitenkriege. Civiling. XXXVIII. 189-206, 617-634.

In der ersten Notiz werden zunächst die äusseren Lebensumstände des genannten Naturforschers (1538-1615) besprochen und dann Mitteilungen aus seinen Werken „Magia naturalis" und Pneumaticorum libri III" gemacht.

In der zweiten Notiz wird der Inhalt eines alten, auf der Königl. Bibliothek zu München befindlichen Manuscriptes über Artilleriewissenschaft besprochen. F. K.

---

A. MC AULAY. Quaternions as a practical instrument of physical research. Nature XLV. 423.

Kurzer Auszug aus einem Vortrage in der australischen Association for the advancement of science (vgl. oben S. 647). Lp.

---

Weitere Litteratur.

X. ANTOMARI. Leçons de cinématique et de dynamique, suivies de la détermination des centres de gravité. Paris. IV + 232 S. 8°.

R. ARNDT. Bemerkungen über Kraft und auslösende Kraft im besonderen. Greifswald. Abel. IV + 50 S. Lex. 8°.

PARK BENJAMIN. Modern Mechanism. London and New York. Macmillan and Co. VI + 924 S. [Nature XLVII. 241-243.]

CH. BRISSE. Cours de Mécanique à l'usage de la classe de Mathématiques spéciales, entièrement conforme au dernier programme d'admission à l'École Polytechnique. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

CH. CELLÉRIER. Cours de mécanique. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

J. C. Horobin. Theoretical mechanics. Part I. London. 154 S. 8°.

Jamieson. Elementary manual on applied mechanics. London. C. Griffin and Co. [Nature XLVII. 147-148.]

R. Lauenstein. Leitfaden der Mechanik. Stuttgart. 160 S.

G. H. Lock. Key to J. B. Lock's Elementary Dynamics. London. Macmillan and Co. [Nature XLVI. 173.]

S. L. Loney. Elements of statics and dynamics. 2nd edition, revised. (In 2 parts). Part I: Elements of statics. Cambridge.

S. L. Loney. Solutions to the examples in a treatise on elementary dynamics. Cambridge.

P. Magnus. Lessons in elementary mechanics. New edition rewritten and enlarged. London. 376 S.

A. Ritter. Lehrbuch der technischen Mechanik. Sechste umgearbeitete und vermehrte Auflage. Leipzig. Baumgärtner. XV + 784 S. 8°.

E. J. Routh. Treatise on analytical statics. With numerous examples. Vol. II. Cambridge. XII + 224 S. 8°.

E. J. Routh. Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Part II: Advanced part. 5th edition, revised and enlarged. London. XII + 432 S. 8°.

J. Spencer. Theoretical mechanics. A classbook for the elementary stage of the science and art department. London. 236 S. 8°.

J. Violle. Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausgabe von E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, D. Kreichgauer, S. Lindeck. 1. Teil: Mechanik. 2. Band: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Berlin. Springer. XI + S. 497-992. 8°.

A. M. Washington. Dynamics of rotation; an elementary introduction to rigid dynamics. London. 162 S.

A. Wernicke. Beiträge zur Theorie der centro-dynamischen Körper. Pr. (No. 687) Neues Gymn. Braunschweig. 36 S. 4°.

Siehe Abschnitt X, Capitel 5.

R. Wormell. Elementary textbook of mechanics. London. 240 S. 8°.

## Capitel 2.
## Kinematik.

W. H. Besant, A. B. Basset, M. am Ende. Phoronomy. Nature XLV. 462-463, 486.

Befürwortung des Ausdruckes „Phoronomie" für reine Bewegungslehre statt des jetzt üblichen Wortes „Kinematik", also in dem Sinne von Hrn. Reuleaux (F. d. M. XXII. 1890. 846) geschrieben. Lp.

D. Seiliger. Theorie der Bewegung eines ähnlich veränderlichen Körpers. Kasan Ber. (2) II. No. 1. (Russisch.)

Die Abhandlung enthält die Kinematik und Dynamik eines ähnlich veränderlichen Körpers. In der Kinematik betrachtet der Verfasser eine Bewegung, die er „radiale Ausdehnung" nennt, und beweist, dass jede Bewegung des ähnlich veränderlichen Körpers aus der radialen Ausdehnung und aus der Drehung um eine durch den Mittelpunkt der radialen Ausdehnung gehende Axe zusammengesetzt werden kann. In der Dynamik bestimmt er die Bewegung des ähnlich veränderlichen Körpers, welche um den Schwerpunkt infolge der Trägheit oder unter Wirkung der gegenseitigen Anziehungskräfte der Molekeln gemäss dem Gesetz der directen Proportionalität zur Entfernung erfolgt. Er gelangt zu denselben Resultaten, zu welchen schon früher Durrande (C. R. LXXX, F. d. M. VII. 1875. 578) gekommen war. Die Eigentümlichkeit der Darlegung besteht in der Anwendung einer Untersuchungsmethode, die analog der Methode von Poinsot ist. Jk.

C. Rodenberg. Ein Beitrag zur systematischen Behandlung der ebenen Bewegung starrer Systeme. Nachsatz dazu. Schlömilch Z. XXXVII. 218-256, 311-315.

Die ebene Bewegung einer Anzahl starrer Systeme ist für ein Zeitelement in geometrischer Hinsicht durch die Polconfiguration charakterisirt. Zur Bestimmung derselben nimmt man gewöhnlich eine Anzahl von Polen als gegeben an; hierbei entspricht die Angabe eines Poles der Angabe zweier Constanten; Herr Rodenberg führt behufs grösserer Allgemeinheit der Untersuchungen Strahlen ein, auf denen ein bestimmter Pol liegen soll, die sogenannten Normalstrahlen; jeder Normalstrahl entspricht einer Constante. Es zeigt sich, dass, wenn die Anzahl der Systeme grösser als fünf ist, auch nicht ein Pol direct gegeben zu sein braucht. In § 1 wird die Construction der Polconfiguration aus diesen linearen Bestimmungsstücken rein geometrisch durchgeführt, § 2 lehrt allgemein gültige Kennzeichen für die Bestimmtheit der Bewegung. Entfallen auf eine Systemgruppe mehr Constanten, als zur Bestimmung ihrer Polconfiguration nötig sind, so bildet dieselbe momentan ein starres System oder eine tote Gruppe; für solche Gruppen wird in § 3 eine rein geometrische Definition gegeben, § 4 stellt die Kennzeichen für die Zwangläufigkeit kinematischer Ketten auf. Von § 5 an wird die Bewegung von $n$ Systemen während zweier Zeitelemente betrachtet. Bei der Bewegung dreier ebenen Systeme besteht zwischen je zweien derselben hinsichtlich der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte eine quadratische Verwandtschaft. Drei Punkte der drei Systeme, welche sich paarweise in jeder der drei Verwandtschaften entsprechen, bilden ein „Tripel"; insbesondere existirt auf derjenigen Geraden, welche die drei Pole enthält (der Polgeraden), im allgemeinen stets ein und nur ein solches Tripel. Genau so, wie die Polconfiguration ein Bild der Relativbewegung von $n$ starren Systemen während eines Zeitelementes giebt, wird diese Bewegung während eines weiteren Zeitelementes durch Hinzufügung des Tripels auf jeder der Polgeraden dargestellt, sobald $n > 3$ ist, d. h. alsdann ist die quadratische Verwandtschaft zwischen je zweien der Systeme bestimmt. In § 6 werden diese Verwandtschaften im Falle

von Totlagen aufgesucht, und § 7, der letzte dieser gehaltreichen Arbeit, beschäftigt sich mit den Verzweigungslagen sowie der Construction der mehrdeutigen Pole und der zugehörigen quadratischen Verwandtschaften. Bk.

---

C. Rodenberg. Ueber die Tripel entsprechender Krümmungs-Mittelpunkte, welche bei der ebenen Relativ-Bewegung dreier starrer Systeme auftreten. Schlömilch Z. XXXVII. 366-373.

In der im vorangehenden Referate besprochenen Arbeit beweist Herr Rodenberg den Satz: „Bewegen sich drei starre Systeme in einer Ebene, so gehen die Aronhold'schen Collineationsaxen, welche den Strahlen eines starren Tripels, d. h. eines solchen, dessen Ecken nicht in gerader Linie liegen, in Bezug auf die Polgerade zugeordnet sind, durch einen Punkt“. Hiervon ausgehend, weist Herr Rodenberg nach, dass im allgemeinen für jede Phase der Bewegung fünf starre Tripel existiren, von denen also eines sicher reell ist, und lehrt die Construction derselben. Er betrachtet ferner das gegenseitige Verhalten zweier starren Tripel; da sich die homologen Seiten derselben in den drei (auf einer Geraden gelegenen) Momentanpolen schneiden, gehen die Verbindungslinien homologer Ecken durch einen Punkt, das Perspectivitätscentrum der Polgeraden. Aus diesem werden die beiden starren Tripel und die drei Momentanpole durch die sechs Strahlen einer gleichseitigen hyperbolischen Involution projicirt, und zwar ist dem Verbindungsstrahl zweier einem System angehörigen Tripelpunkte der Strahl nach dem Pole der beiden übrigen Systeme zugeordnet. Den Schluss der Arbeit bildet die Betrachtung des Sonderfalles, dass sich die Systeme zwei Zeitelemente hindurch um drei Punkte einer starren Geraden drehen. Bk.

A. Schoenflies. Ueber die Bewegung starrer Systeme im Fall cylindrischer Axenflächen. Math. Ann. XL. 317-331.

Herr Mannheim hat in seiner Arbeit: „Sur le déplacement

d'une figure de forme invariable dont tous les plans passent par des points fixes" (J. de l'École Polyt. Cah. LX, F. d. M. XXII. 1890. 863) den Satz bewiesen: „Wenn ein Rotationscylinder im Innern eines ebensolchen Cylinders von doppeltem Querschnitt rollt und gleichzeitig so gleitet, dass ein mit ihm verbundener Punkt auf einer festen Ebene verbleibt, so beschreiben alle bewegten Punkte ebene Linien". Diese Bewegung hat Herrn Schoenflies veranlasst, ganz allgemein diejenigen räumlichen Bewegungen zu untersuchen, bei welchen die Axenflächen Cylinder sind; er gewinnt seine Resultate durch Specialisirung der in seinem Aufsatz „Zur Theorie der Bewegung starrer räumlicher Systeme" (J. für Math. XCVIII, F. d. M. XVII. 1885. 827) gefundenen Ergebnisse, indem er annimmt, dass die Axen der Drehung und Gleitung in den verschiedenen Phasen der Bewegung parallel sind. Da alsdann sämtliche Punkte einer zur Momentanaxe parallelen Geraden congruente Curven erzeugen, so genügt die Untersuchung der Bewegung einer zur Momentanaxe senkrechten Ebene $\eta$. Besondere Durchsichtigkeit erhält die Untersuchung durch die gleichzeitige Betrachtung der Bewegung, welche die Orthogonalprojection des räumlichen Systems auf eine zur Momentanaxe senkrechte feste Ebene $\varepsilon$ in dieser vollführt. Die Hauptresultate sind folgende: Die Wendecurve, welche im allgemeinen bekanntlich eine Raumcurve dritter Ordnung ist, reducirt sich auf eine zur Momentanaxe parallele Gerade $w$, die Wendegerade; ihr Ort ist also eine Cylinderfläche $\mathfrak{W}$. Die Punkte mit stationärer Schmiegungsebene bilden in jeder Phase einen Kreiscylinder $\mathfrak{C}$, welcher die Fläche $\mathfrak{W}$ in der Wendegeraden berührt. Die Schmiegungsebenen aller Punkte eines Normalschnitts dieses Cylinders bilden einen Ebenenbüschel erster Ordnung. Auf $\mathfrak{C}$ existirt eine Gerade, deren Punkte fünfpunktig berührende Schmiegungsebenen besitzen; ferner giebt es für jede Phase drei im Endlichen gelegene Geraden, deren Punkte Bahnen mit stationärer Krümmungsaxe durchlaufen. Die Punkte mit stationärer Krümmungskugel erfüllen eine besondere Cylinderfläche dritter Ordnung u. s. w.

Am Schlusse seiner Arbeit geht Herr Schoenflies näher auf die am Eingange des Referats erwähnte, von Herrn Darboux ent-

deckte und von den Herren Mannheim (l. c.) und Reye, Geometrie der Lage, III. Auflage, Seite 317—325, studirte Bewegung ein.

Bk.

---

F. Castellano. Alcune applicazioni cinematiche della teoria dei vettori. Rivista di Mat. II. 19-31.

Mit Hülfe der Vectoren-Theorie entwickelt der Verfasser zunächst die Fundamentaleigenschaften der Beschleunigung beliebiger Ordnung eines bewegten starren räumlichen Systems; er führt selbst an, dass die Resultate zum grösseren Teile bekannt seien, und in der That finden sich bereits in Schell's „Theorie der Bewegung und der Kräfte", Bd. I., Seite 568, 569 weiter gehende Sätze. Alsdann beschäftigt sich Herr Castellano specieller mit den Geschwindigkeiten; er sucht in einer beliebigen Ebene des bewegten Systems denjenigen Punkt, welcher die kleinste Geschwindigkeit besitzt, zeigt, dass die mit letzterer zusammenfallende Gerade $a$ die Momentanaxe ist, und stellt ihre wichtigsten Eigenschaften auf. Zum Schluss werden die Beschleunigungen erster Ordnung untersucht. Bei der Construction des bezüglichen Beschleunigungscentrums geht der Verfasser in folgender Weise vor: er bestimmt diejenige Ebene $\pi'$ des bewegten Systems, deren Beschleunigungen normal zur Momentanaxe $a$ gerichtet sind; in dieser, der Momentanaxe parallelen Ebene existirt eine zu $a$ parallele Gerade $b$, deren Beschleunigungen auf $\pi'$ senkrecht stehen; auf ihr ist das gesuchte Beschleunigungscentrum leicht zu finden. Ferner wird nachgewiesen, dass der Ort für die Beschleunigungspole aller durch einen Punkt $P$ führenden Geraden ein durch $P$ und das Beschleunigungscentrum gehendes Rotationsparaboloid ist, dessen Axe parallel der Momentanaxe liegt. So ist jedem Punkte des Raumes ein bestimmtes Rotationsparaboloid zugewiesen; die hieraus fliessenden Beziehungen werden eingehender untersucht.

Bk.

---

M. Grübler. Ueber die Kreisungspunkte einer complan bewegten Ebene. — Berichtigung dazu. Schlömilch Z. XXXVII. 35-56, 192.

Bewegt sich ein starres ebenes System in seiner Ebene, so

liegen, wie Herr Schoenflies in seiner „Geometrie der Bewegung“ § 5 gezeigt hat, in jeder Phase der Bewegung diejenigen Punkte desselben, welche Bahnstellen mit stationärem Krümmungskreise durchlaufen, in einer Curve dritter Ordnung. Die Mittelpunkte derselben bilden eine in der ruhenden Ebene gelegene Curve, welche ebenfalls von der dritten Ordnung ist. Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen die beiden Curven ihre Bedeutung. Herr Grübler nennt die betreffenden Punkte Kreisungs-, bzw. Angelpunkte; mit ihnen und ihren Oertern beschäftigt er sich in der vorliegenden Arbeit. Im I. Abschnitt wird nachgewiesen, dass auf jedem Polstrahl nur ein Kreisungs- und entsprechend ein Angelpunkt existirt, und dass die Lage dieser Punkte durch ein Hüllcurvenpaar, welches sich auf dem Polstrahl berührt, und durch die Polcurvennormale schon völlig bestimmt ist. Abschnitt II lehrt sehr interessante metrische Relationen, mit deren Hülfe man aus zwei Paaren zugehöriger Hüllbahnen, die sich selbstverständlich auf verschiedenen Polstrahlen berühren müssen, die ersten Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen finden kann. Im Abschnitt III wird der Zusammenhang zwischen den ersten und zweiten Krümmungsradien dreier Hüllbahnpaare klargestellt; durch Specialisirung erhält man die Polargleichung der Kreisungs- und Angelpunktcurven, welche am Schlusse des Abschnitts in sehr einfacher Form erscheint. Sie ist, wie auch Herr Schoenflies bereits bemerkt hat, eine focale à noeud, hat im Pol einen Doppelpunkt, und Tangente und Normale der Polbahnen sind ihre Doppelpunkttangenten. Alsdann wird gelehrt, wie man diese Curven mit Hülfe der ersten Krümmungsradien der Polbahnen findet; der letzte Abschnitt bringt einige elegante Constructionen der genannten Curven, unter andern eine mechanische; den Schluss bildet die Betrachtung mehrerer Specialfälle. — Die „Berichtigung“ bezieht sich auf eine irrtümliche Bezeichnung einer in der Arbeit vorkommenden Geraden als Asymptote der Kreisungspunktcurve; dieselbe ist der Asymptote nur parallel und ist die Focalaxe der genannten Curve. Bk.

---

V. Retali. Sullo spostamento finito di una figura piana nel suo piano. Bologna Mem. (5) II. 585-589.

§ 17 des Aufsatzes von Chasles: „Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable“ (C. R. LI) enthält den Satz: „Ist ein fester Punkt $P$ gegeben, so liegen diejenigen Paare homologer Punkte beider Figuren, deren Verbindungssehnen von $P$ aus unter einem Winkel von gegebener Grösse erscheinen, auf zwei durch $P$ gehenden Kegelschnitten. Und diese Sehnen hüllen eine Curve der vierten Klasse und sechsten Ordnung ein, welche drei Doppeltangenten besitzt, von denen die eine, reelle, im Unendlichen gelegen ist, während die beiden anderen, imaginären, Asymptoten eines Kreises sind, dessen Mittelpunkt in dem den beiden Figuren gemeinsamen Centralpunkte liegt.“ Herr Retali weist nach, dass dieser Satz ungenau ist; er gilt in der Chasles'schen Fassung für den allgemeinen Fall, dass die Paare homologer Punkte von dem festen Punkte $P$ aus durch zwei projective Strahlenbüschel projicirt werden. Für den speciellen Fall, dass diese Büschel gleich sind, gehen die beiden Kegelschnitte in zwei congruente Kreise über, und die Enveloppe der Verbindungssehnen ist alsdann ein Centralkegelschnitt, welcher jeden der beiden Kreise doppelt berührt. Bk.

---

Ch. Speckel. Sur la géométrie cinématique. Nouv. Ann. (3) XI. 268-276.

Gegenstand der Untersuchung ist die ganz specielle ebene Bewegung, bei welcher eine in dem bewegten System liegende Gerade $g$ mit einem bestimmten ihrer Punkte $A$ auf einer Curve $a$ des ruhenden Systems gleitet. Dass die Polbahn des bewegten Systems eine Gerade (das Lot in $A$ auf $g$), diejenige des ruhenden die Evolute von $a$ sein muss, liegt auf der Hand. Die Beziehungen, welche Herr Speckel betreffs der Krümmungsmittelpunkte der Punktbahnen findet, gelten ganz allgemein für jede beliebige ebene Bewegung, und die Sätze, welche er hinsichtlich der Punkte stationärer Krümmung für den Sonderfall, dass die Evolute von $a$ ein Kreis ist, aufstellt, gelten für jede cyklische Rollung. Bk.

---

W. Hartmann. Ein neues Verfahren zur Aufsuchung des Krümmungskreises. Z. deutsch. Ing. XXXVI. 7 S.

Auf Grund der bekannten Beziehungen, welche bei der Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene zwischen den Geschwindigkeiten der Systempunkte und der Wechselgeschwindigkeit des Momentanpols bestehen, gelangt der Verfasser zu einer Construction der Krümmungsmittelpunkte, welche sich als Specialfall der vom Referenten in seiner Arbeit „Elemente der kinematischen Geometrie des zweigliedrigen ebenen Systems", Wissensch. Blg. z. Programm d. Städt. R. G. zu Charlottenburg, 1890, gegebenen erweist. Auf diesen Specialfall ist l. c. S. 26 in Form einer Aufgabe besonders hingedeutet. Bk.

---

F. Balitrand. Sur le déplacement d'une figure plane dans son plan. J. de Math. spéc. (4) I. 121-125, 159-163.

Die Figur wird als von unveränderlicher Form vorausgesetzt, und ihre Bewegung hauptsächlich hinsichtlich der Krümmung der Trajectorien ihrer Punkte studirt. Eine unendlich kleine Ortsveränderung der Figur lässt sich als Rotation um einen Punkt betrachten, das momentane Rotationscentrum. Dieses spielt naturgemäss bei der Behandlung eine wichtige Rolle. Unter den Resultaten möge folgender Satz herausgegriffen werden: Bei der Bewegung einer ebenen Figur existiren im allgemeinen vier Punkte, deren Trajectorien eine Berührung vierter Ordnung mit einem Kreise besitzen. Gz.

---

R. Müller (Braunschweig). Ueber die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen. Schlömilch Z. XXXVII. 129-150.

In § 1 entwickelt Herr Müller Formeln für den ersten, zweiten und dritten Krümmungsradius einer beliebigen Hüllbahn, gewinnt aus ihnen durch Specialisirung die betreffenden Formeln für eine Punktbahn und weist nach, dass die Constructionen des ersten, zweiten und dritten Krümmungsmittelpunktes einer Hüllbahn auf die entsprechenden Constructionen für eine Punktbahn zurückführbar sind. § 2 enthält die Anwendung des Vorgetragenen auf die von Systemgeraden erzeugten Hüllbahnen. Ein sehr einfacher geometrischer Beweis lehrt, dass in jeder Phase der Bewegung die

Krümmungsmittelpunkte beliebiger Ordnung dieser Hüllbahnen auf einer Reihe von Kreisen liegen. Das Gleiche gilt nach dem Princip der Umkehrung der Bewegung für die Krümmungsmittelpunkte derjenigen Curven des bewegten Systems, welche gerade Linien einhüllen. Wird die Reihe dieser letzten Kreise mit $w$, $w_1$, ... bezeichnet, wobei $w$ der bekannte Wendekreis des bewegten Systems ist, so schneiden sich $w$ und $w_1$ ausser im Wendepol noch in einem zweiten Punkte, welcher sich, als Systempunkt betrachtet, gerade in einem Undulationspunkte seiner Bahn befindet; es ist der Ball'sche Punkt der betreffenden Bewegungsphase. Die Kreise $w$, $w_1$, $w_2$ des bewegten Systems, oder die entsprechenden $k$, $k_1$, $k_2$ des ruhenden, sind fünf unendlich benachbarten Systemlagen äquivalent. In § 3 wird gezeigt, wie man sie, bzw. die ersten, zweiten und dritten Krümmungsradien einer beliebigen Punktbahn findet, sobald die Krümmungsradien derselben Ordnung für zwei zu verschiedenen Polstrahlen gehörigen Punktbahnen bekannt sind. Der folgende Paragraph lehrt die Beziehung zwischen den erwähnten Kreisen und den ersten und zweiten Krümmungsradien der Polbahnen. Interessante Resultate ergeben sich für die Sonderfälle, dass eine Polbahn eine Gerade ist, oder dass beide Kreise sind; für den letzten Fall wird in § 5 eine vereinfachte Construction der zweiten und dritten Krümmungsradien einer Punktbahn hergeleitet. Die Gleichung der Kreispunktcurve (vgl. das Referat über M. Grübler, oben S. 817) wird in § 6 gewonnen, indem man in dem allgemeinen Ausdruck für den zweiten Krümmungsradius einer Punktbahn diesen gleich Null setzt. Diese Curve, welche im Momentanpol einen Doppelpunkt besitzt und die gemeinsame Normale und Tangente der Polbahnen zu Doppelpunktstangenten hat, enthält den der Phase entsprechenden Ball'schen Punkt des bewegten Systems; die zu ihrer Asymptote parallele Focalaxe geht durch den Ball'schen Punkt des ruhenden Systems. Durch Umkehrung der Bewegung wird die Kreispunktcurve des letzteren bestimmt. In jeder Phase der Bewegung existiren vier Punkte des bewegten Systems, welche Bahnstellen mit vierpunktig berührendem Krümmungskreise durchlaufen, die Burmester'schen Punkte. Sie liegen mit dem Pol $\mathfrak{P}$ auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{k}$, welcher in $\mathfrak{P}$ die Verbindungslinie dieses Punktes

mit dem Ball'schen Punkte des bewegten Systems zur Tangente hat; derselbe geht überdies durch den Schnittpunkt 𝔑 der Polbahnnormale mit der Verbindungslinie der Focalcentren der beiden Kreispunktcurven. Die Burmester'schen Punkte der umgekehrten Bewegung liegen auf einem Kegelschnitt 𝔨', welcher gleichfalls durch 𝔓 und 𝔑 geht, in 𝔓 von der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ball'schen Punkte des ruhenden Systems berührt wird und dem Kegelschnitt 𝔨 homothetisch ähnlich ist. Die Arbeit schliesst mit der Bestimmung der Burmester'schen Punkte für specielle Fälle.

Bk.

---

R. Müller (Braunschweig). Construction der Burmester'schen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck. Schlömilch Z. XXXVII. 213-217.

Für den Fall des Gelenkvierecks muss sich die Construction der Burmester'schen Punkte wesentlich vereinfachen. Denn da für jede Phase der Bewegung (vergl. das vorangehende Referat) nur vier solcher Punkte im bewegten, bezw. im ruhenden System existiren und die Gelenkpunkte der Koppel und des Stegs zu ihnen gehören, bleiben nur noch zwei solcher Punkte zu bestimmen. Herr Müller zeigt, wie dies ohne Construction der Kreispunktcurve und des Kegelschnitts 𝔨 möglich ist. Mit Hülfe der Winkel, welche die vier Seiten des Gelenkvierecks mit der Verbindungslinie von Pol und Nebenpol bilden, wird zum Schluss die Realitätsbedingung für die Existenz der Burmester'schen Punkte aufgestellt. Bk.

---

H. Resal. Sur une interprétation géométrique de l'expression de l'angle de deux normales infiniment voisines d'une surface, et sur son usage dans les théories du roulement des surfaces et des engrenages sans frottement. C. R. CXIV. 381-385.

Ist $AB$ die Schnittlinie der Tangentialebenen einer Fläche $S$ in den unendlich benachbarten Punkten $O$ und $m$, so bilden $AB$ und die ihr parallelen Geraden durch $O$ und $m$ drei unendlich benachbarte Erzeugende eines Cylinders. Diejenige zu $O$ gehörige Normalebene der Fläche, welche durch $m$ führt, schneidet den Cy-

linder in den Bogenelementen $OJ$ und $Jm$ einer Schraubenlinie. Nennt man den Radius des in der genannten Ebene liegenden Normalschnitts der Fläche $\varrho$, das Complement des Winkels, welchen $Jm$ mit $AB$ bildet, $90^\circ - i$, den Neigungswinkel der beiden Tangentialebenen $\varepsilon$ und endlich das Bogenelement $OJ$ $d\sigma$, so gilt die Formel:

$$\varepsilon = \frac{d\sigma}{\varrho . \cos^2 i}.$$

Der Normalschnitt der Fläche ist gleichzeitig Normalschnitt des Cylinders. — Von dieser Betrachtung ausgehend, zeigt Herr Resal, dass eine Fläche auf einer Ebene nach beliebiger Richtung hin rollen kann, während dies bei zwei beliebigen Flächen $S$ und $S'$ in jedem Moment nur nach zwei bestimmten Richtungen hin möglich ist, aus denen sich im Verlaufe der Bewegung die sogenannten Rolllinien (lignes de roulement) ergeben. Er wendet die erhaltenen Resultate zur Bestimmung reibungsloser Verzahnungen an; er denkt sich einen beweglichen Kegel $C$, welcher auf einem festen Kegel $C'$ rollt, zeichnet auf ersterem eine geodätische Linie, welche während der Bewegung auf dem zweiten eine Linie gleicher Art erzeugt, nennt die längs beider Linien construirten Normalien $S$ und $S'$ und giebt an, dass $S$ und $S'$ im Verlaufe der Bewegung auf einander rollen, dass man also mit Hülfe dieser Flächen reibungslose Verzahnungen construiren kann. Man vgl. hierzu Resal, Traité de cinématique pure, chap. III, § VII, insbes. S. 166, 167, und das folgende Referat. Bk.

---

A. Rateau. Sur les engrenages sans frottement. C. R. CXIV. 580-582.

Die Note des Herrn Rateau bezieht sich auf die im vorangehenden Referate besprochene Arbeit des Herrn Resal. Dass die betreffende Momentanaxe durch $O$ gehen muss, ist evident; sie wird im allgemeinen schräg zur Tangentialebene der Fläche $S$ in $O$ stehen. Die Drehung um diese Axe zerlegt Herr Resal in Drehungen um zwei Axen, von denen die eine mit der Flächennormale coincidirt, während die andere in die Tangentialebene fällt. Die Wirkung der ersten Drehung vernachlässigt Herr Resal, „weil

sie in der Zeit $dt$ an den Punkten von $S$, welche $O$ unendlich benachbart sind, und die allein in Betracht kommen, nur unendlich kleine Verrückungen zweiter Ordnung hervorruft". Mit Recht hebt Herr Rateau hervor, dass aus demselben Grunde auch die in der Tangentialebene liegende Rotationscomponente vernachlässigt werden könnte. (Vgl. Schell, „Theorie der Bewegung und der Kräfte", S. 308, § 18). Ferner ist Herr Rateau der Ansicht, dass die von Herrn Resal angegebenen reibungslosen konischen Verzahnungen nicht functioniren können. Zur Begründung betrachtet er den Specialfall, dass die Kegel in Cylinder übergehen; die Normalien sind dann gerade Schraubenflächen. In jedem senkrechten Querschnitt der Cylinder hätte man zwei Räder, deren Zähne je eine gerade Flanke besitzen; das ist aber nicht angängig, weil die ausserhalb der Grundkreise liegenden Stücke der Flanken bei der Bewegung in einander eindringen würden. Herr Rateau hält es überhaupt für aussichtslos, reibungslose Verzahnungen aufzusuchen, da bei solchen die Höhe der Zähne gleich Null sein müsste; man kann die Reibung nur vermindern, indem man die Höhe der Zähne vermindert. Hierbei braucht man nicht gleichzeitig den Schritt zu vermindern, wenn man auf den Kegelflächen als Leitlinien der Zähne Curven verzeichnet, welche sich bei der Bewegung auf einander abwälzen. Verringert man auch den Schritt, so gelangt man zu „geriefelten" Rädern und im Grenzfalle zu den Reibungsrädern. (Vgl. Burmester's Kinematik, Art. 95). Bk.

---

G. B. Folco. L'appoggio considerato in generale. Politecnico XL. 608-615.

Es wird untersucht, welche Bewegungen mit der Existenz von ein, zwei, drei, vier Stützen verträglich sind. Vi.

---

G. Susloff. Kinetische Trigonometrie. Kiew Nachr. XXXII. No. 2. 1-7. (Russisch.)

Der Verfasser betrachtet die Bewegung eines materiellen Punktes mit Erhaltung der Energie; indem er unter einer kinetischen Geraden den wirklichen Weg zwischen zwei Punkten versteht, bestimmt er das kinetische Dreieck als eine Figur, die von drei

Geraden begrenzt ist; als Dreieckswinkel sieht er die Winkel zwischen den Tangenten der Seiten an den Scheiteln an, und als Länge der Seiten die sogenannte Wirkung

$$V = \int v ds$$

nach dieser Seite; ferner werden einige Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln des Dreiecks, zwischen den Elementen concentrischer kinetischer Kreise gegeben, sowie die kinetische Ellipse und Hyperbel bestimmt, wobei das Theorem von der Congruenz der Winkel zwischen den Tangenten dieser Curven und den Brennstrahlen in Kraft bleibt. Jk.

---

G. Schebujeff. Anwendung der Quaternionentheorie auf die Mechanik der ähnlichvariabeln homogenen Systeme. Kasan Ber. (2) II. No. 3. 111-169. (Russisch.)

Die Arbeit behandelt die Anwendung der Quaternionentheorie und eines vom Verfasser speciell eingeführten Symbols $D$ auf die Kinematik, Statik und zum Teil auch auf die Dynamik der oben genannten Systeme. Jk.

---

G. Davoglio. Nuovi principi di cinematica. Bergamo. Cattaneo. 129 S. 8°.

---

A. F. Vierkandt. Allgemeines und Specielles über gleitende und rollende Bewegung. Diss. Leipzig.

---

# Capitel 3.
# Statik.

## A. Statik fester Körper.

E. Claussen. Statik und Festigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Bauconstructionen; analytisch und graphisch behandelt. Mit 285 Figuren und zahlreichen Beispielen. Berlin. R. Oppenheim (Gust. Schmidt). VI + 285 S. (1893.)

Mit vielem Vergnügen hat Referent in den letzten Jahren eine Reihe elementar gehaltener Lehrbücher der Festigkeitslehre besprochen. Denn nach Meinung des Referenten hatten es die Verfasser der in Betracht kommenden Werke recht gut verstanden, die Regeln der Festigkeitslehre in einer dem ins Auge gefassten Publicum angemessenen Weise darzustellen. Es erschienen ihm die Werke meist recht geeignet, denjenigen, welche in die Lage kommen, die Formeln der Festigkeitslehre anzuwenden, ohne doch auf einer höheren technischen Lehranstalt studirt zu haben, ein Verständnis für die Begründung und Anwendung dieser Formeln zu verschaffen. Der Verfasser des vorliegenden Werkes ist anderer Meinung; er behauptet, dass in Folge derartiger Werke „so hervorragend wichtige Rechnungen wie die statischen schablonenmässig und häufig sogar recht fehlerhaft aufgestellt werden“. Ausserdem hat er das bei unbefangener Beurteilung wohl unverständliche Bedenken, „dass ein derartiges Vorgehen dazu angethan ist, die technische Wissenschaft und ihre berufenen Vertreter in den Augen anderer herabzusetzen“.

Der Verfasser sagt in der Vorrede weiter. „Aus diesem Umstande hat sich eine Reihe von Collegen veranlasst gesehen, mir den Wunsch nahe zu legen, die „Statik und Festigkeitslehre“ in einer Weise darzustellen, die nicht bloss dem wissenschaftlichen Standpunkte eines gebildeten Technikers entspricht, sondern auch durch die Wahl des Stoffes dem praktischen Bedürfnis Rechnung trägt und neben der analytischen Methode die graphische in gleicher Weise berücksichtigt.“

Nach diesen Proben aus der Vorrede wird man es begreiflich finden, dass Referent bei der Beurteilung des Werkes zunächst den höchsten Massstab glaubte anlegen zu dürfen, dass er in demselben eine wissenschaftliche Darstellung der Festigkeitslehre und ihrer Begründung mittels der allgemeinen Elasticitätstheorie zu finden erwartete. In dieser Erwartung hat sich nun Referent arg enttäuscht gesehen; die Darstellung der Festigkeitslehre steht genau auf demselben Niveau wie in den so hart angegriffenen elementaren Lehrbüchern und unterscheidet sich von denselben nur durch die Anwendung der Differential- und Integralrechnung, welche dem

Verfasser natürlich sein Geschäft wesentlich erleichtert. Jedoch finden sich ausserdem noch manche Mängel, die selbst bei elementarer Darstellung vermieden werden müssten. So wird z. B. bei der Berechnung des Biegungswiderstandes gar nicht deutlich die Annahme ausgesprochen, dass bei der Biegung die einzelnen Querschnitte eben bleiben, und doch ist diese Hypothese eine der wichtigsten Grundlagen der ganzen Theorie. Nach Meinung des Referenten muss deshalb die Ableitung des Verfassers jedem unverständlich bleiben, der die Biegungstheorie nicht auch aus anderer Quelle kennt.

Die Bestimmung der Torsionsfestigkeit beruht auf der veralteten Vorstellung, dass zwischen dem Torsionswiderstand $W_p$, dem polaren Trägheitsmoment $J_p$ in Bezug auf den Schwerpunkt und der Entfernung $a$ des äussersten Punktes vom Schwerpunkte die Gleichung

$$W_p = \frac{J_p}{a}$$

besteht. Diese Formel beruht auf der neuerdings mit Recht verworfenen Annahme, dass bei der Torsion die einzelnen Querschnitte eben bleiben, welche bekanntlich allein für den Kreisring zulässig ist. In ganz eigentümlicher Weise sucht der Verfasser allerdings diesem Umstande an einer Stelle gerecht zu werden, wo man eine solche Notiz nicht suchen würde. Er sagt nämlich in einer Anmerkung zu der Bestimmung des polaren Trägheitsmomentes: „Für Querschnitte, bei denen die äquatorialen Trägheitsmomente nicht gleich sind, ist noch eine Correction des polaren Trägheitsmomentes erforderlich, durch welche das Windschiefwerden der Querschnitte in Folge der Verdrehung berücksichtigt wird.“ Dann folgt noch der dem Referenten völlig unklar gebliebene Satz: „Es wird dann für das Rechteck

$$J_p = \frac{1}{3}\,\frac{b^3h^3}{b^2+h^2} \quad \text{und} \quad W_p = \frac{1}{3}\,\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}\text{“}.$$

Das Verständnis wird noch dadurch erschwert, dass zweimal unter No. 3 auf Seite 166 unrichtige Formeln aufgeführt werden.

Auch die Ableitung der Knickfestigkeit scheint nicht ganz einwurfsfrei. Nachdem der Verfasser ganz richtig die Gleichung der gebogenen Säule für excentrische Belastung aufgestellt hat, kommt

er für den Fall, dass die Excentricität gleich Null ist, zu der Gleichung

$$f \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, l\right) = 0,$$

wo $f$ die Ausbiegung des oberen Endes bezeichnet, während die übrigen Buchstaben die übliche Bedeutung haben. Der Verfasser schliesst nun: „Die Durchbiegung $f$ kann nicht Null werden, es muss daher $\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, l\right) = 0$ sein.“ Der richtige Schluss wäre aber offenbar der gewesen, dass im allgemeinen $\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, l\right)$ nicht gleich Null sein könne, und dass also, wenn Gleichgewicht herrschen solle, $f = 0$ sein müsse; wenn $\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, l$ aber gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ ist, kann $f$ einen ganz beliebigen Wert haben, und es herrscht doch Gleichgewicht. Daraus würde dann folgen, dass für $\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, l = \frac{\pi}{2}$ das Gleichgewicht der Säule ein indifferentes ist, und es wäre Sache des Verfassers gewesen, zu zeigen, dass für kleinere Werte $P$ das Gleichgewicht stabil, für grössere labil ist; dann wäre klar gewesen, warum $P = \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$ die obere Grenze der Belastung ist. Nach der Schlussweise des Verfassers wären aber nur solche Belastungen zulässig, bei welchen $\sqrt{\frac{P}{EJ}}\, l$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, während jede andere Belastung das Gleichgewicht stören würde.

Ob dasjenige, was der Verfasser über die Gewölbetheorie beibringt, hinreichend ist, um in allen Fällen die Entscheidung der Stabilitätsfrage zu erreichen, will ich dahin gestellt sein lassen. Dagegen erscheint mir gerade im Hinblick auf den Einwand, welchen der Verfasser gegen die Wirkung elementarer Lehrbücher erhebt, die Behandlung der Theorie des Erddrucks völlig unzureichend. Es wird nämlich ohne irgend welche Begründung eine praktische

Construction der Gleitfläche und des Erddrucks nach Rebhann angegeben. Mehr als zweifelhaft erscheint mir die Zulässigkeit der vom Verfasser gegebenen Construction des Erddrucks für gebrochene Wände.

Ein Mangel, der sich durch das ganze Werk hindurchzieht, das Verständnis vieler Teile nicht unerheblich erschwert, und der bei einem Werke mathematischen Inhaltes besonders schwer ins Gewicht fällt, ist eine ganz aussergewöhnliche Ungenauigkeit der Ausdrucksweise. So sagt der Verfasser gleich auf der ersten Seite: „Gesetzt, es wirken auf den beliebigen Körper $A$ die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$, so lassen sich diese durch Horizontalkräfte $H_1$, $H_2$, $H_3$ und Verticalkräfte $V_1$, $V_2$, $V_3$ in ihrer Wirkung ersetzen. Soll nun dieser Körper keine Bewegung ausführen, so müssen offenbar folgende drei Bedingungen erfüllt werden:

1) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2) die nach links wirkende Kraft $H_1$ muss genau so gross sein als die nach rechts wirkenden Kräfte $H_2$ und $H_3$, oder es muss die Summe der Horizontalkräfte gleich Null sein.“

Die Voraussetzung dieses Satzes, dass die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ einer verticalen Ebene parallel sein müssen, wird nirgends ausgesprochen.

Auf S. 13 sagt der Verfasser:

„Das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine ausserhalb des Schwerpunktes gelegene Drehaxe, ist gleich dem Trägheitsmoment einer durch den Schwerpunkt gelegten Drehaxe plus der Masse des Körpers, multiplicirt mit dem Quadrate der Entfernung der beiden Drehaxen.“ Hier fehlt die Angabe, dass die beiden Axen parallel sein müssen. Die Beispiele liessen sich häufen; die beiden angeführten werden genügen, unsere Behauptung zu beweisen.

Besser gelungen als die Auseinandersetzung begrifflicher Schwierigkeiten ist dem Verfasser die Darstellung graphischer Methoden, und nach dieser Richtung wird das Werk geeignet sein, Nutzen zu stiften. F. K.

H. S. Hele Shaw. Second report on the development of graphic methods in mechanical science. Brit. Ass. Report 1892. 373-531.

Dieser Bericht ist sehr umfangreich; sein Plan ist der folgende:

I. Geometrische Betrachtungen, enthalten 1) in der graphischen Darstellung von Resultaten, 2) in graphischen Rechnungen: 1. Benutzung einer einzigen Raumdimension, entsprechend einer Messung von einem festen Punkte in einer Ebene aus, zur Erledigung der Behandlung einer Veränderlichen. Benutzung zweier Dimensionen des Raumes, entsprechend den Messungen von zwei festen Punkten in einer Ebene aus, zur Erledigung zweier, durch die Lage eines Punktes darzustellenden, veränderlichen Grössen. Die Benutzung dreier Dimensionen oder die Darstellung dreier Variabeln durch die Lagen eines Punktes schliesst den Gebrauch von Modellen oder der Stereotomie ein, ist aber in Anbetracht der Behandlung graphischer Methoden auch einbezogen worden. 2. Praktischer Unterschied zwischer analytischer Behandlung und der Geometrie der Lage. Das graphische Rechnen.

II. Die Darstellung von Resultaten. 1. Das Entwerfen von Zeichnungen; die Benutzung von karrirtem Papier. Zunehmende Verbreitung der Methode. Tabellenentwürfe. Beiträge zum Schiffsbau von Hrn. H. H. West und über elektrische Arbeit von Hrn. F. G. Baily. Anwendungen im Ingenieur-Baufache und Maschinenfache. 2. Instrumente zum Zeichnen bekannter Curven im Gebrauche bei graphischen Methoden. Verbesserungen bei einfachen Zeicheninstrumenten. Ellipsographen. Zeichnen der Parabel. Harmonische Curven. Die Evolute, Cykloide, Spirale. Gabarit. Integraph. 3. Selbstregistrirende Apparate. Markirende Anordnungen. Arten zur Herrichtung der Oberfläche für die Aufnahme der Registrirung. Die Bewegung der registrirenden Anordnungen. Instrumente zum Registriren von a) Höhenmarken, b) Druck, c) magnetischer Anziehung, d) Geschwindigkeit, e) Temperatur, f) Schwingungen und Stössen, g) Ergebnissen mathematischer Operationen, h) chronographischen Ergebnissen.

III. Graphische Lösung von Aufgaben. 1. Betrachtung der modernen Methoden des graphischen Rechnens, hauptsächlich in

Hinsicht auf den festländischen Gebrauch und auf die Meinungen betreffs der Anwendung projectiver Geometrie in der graphischen Statik. 2. Addition paralleler Strecken, gleitende Rechnung und Gleitlineale. Zeichnungen der Schwerkraft und Belastung. 3. Addition nicht paralleler Strecken. Uebersicht über die Anwendungen des Princips der reciproken Figuren. 4. Die Anwendungen der graphischen Multiplication. Die Rectification und die Quadratur. Uebersicht über die Aufgaben im Ingenieurwesen, auf welche die Methoden der graphischen Multiplication angewandt werden.

Ein Nachtrag von mehr als 97 Seiten giebt eine klassificirte Liste von Abhandlungen, welche in englischen Zeitschriften erschienen sind und in welchen graphische Methoden benutzt werden.

Gbs. (Lp.)

---

L. M. Hoskins. The elements of graphic statics. A textbook for engineering students. London. Macmillan and Co. VIII + 191 S. 8°.

Das Buch soll hauptsächlich die Bedürfnisse der Studirenden des Ingenieurfaches befriedigen und scheint innerhalb dieses Rahmens zur Einführung in den Gegenstand geeignet. Die Zeichnungen sind deutlich und sorgfältig ausgeführt. Gbs. (Lp.)

---

E. Breglia. Di una relazione tra i raggi di curvatura in punti corrispondenti della curva delle grandezze e della curva delle componenti radiali. Batt. G. XXX. 344-348.

Zu einer von Isè gegebenen Formel der graphischen Statik bildet die im Titel bezeichnete Relation ein Analogon. R. M.

---

J. Mandl. Zur Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades auf graphischem Wege. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXIII. 759-764.

Das Verfahren hat eine gewisse Verwandtschaft mit den von Hrn. d'Ocagne in der Nomographie dargelegten Methoden (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 1251), die der Verf. nicht gekannt zu haben

scheint. Sind die Coordinaten $x_i$, $y_i$ dreier Punkte $P_i$ $(i=1,2,3)$ als Functionen dreier Parameter $a_i$ dargestellt: $x_i=\xi_i(a_i)$, $y_i=\eta_i(a_i)$, so ist der Ort jedes Punktes eine Curve, und die Bedingung dafür, dass die drei Punkte in einer Geraden liegen, ist die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi_1(a_1) & \xi_2(a_2) & \xi_3(a_3) \\ \eta_1(a_1) & \eta_2(a_2) & \eta_3(a_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Indem man nun die den Parametern $a_i$ entsprechenden Curvenscharen zeichnet und die Punkttripel aufsucht, welche in einer Geraden liegen, findet man die Lösung jener Gleichung. Lp.

---

E. Breglia. Sulla composizione delle forze infinitesime col metodo del fascio di connessione. Il Politecnico. XL. 321-326.

Ist ein unendliches System von unendlich kleinen Kräften gegeben, und gehen die Wirkungslinien durch einen Punkt, reducirt sich ferner das Kräftevieleck auf einen Kegelschnitt, so reducirt sich ebenfalls das „Connexionsvieleck" auf einen Kegelschnitt. Man bezeichnet damit das Vieleck, dessen Seiten mit den Strahlen parallel sind, welche die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden $t$ mit den Wirkungslinien von einem beliebigen Pole $P$ projiciren, und dessen Ecken auf den durch die Ecke des Kräftevieleckes parallel zu $t$ gezogenen Geraden liegen. Vi.

---

P. Appell. Sur certaines propriétés d'une position d'équilibre d'un système. Toulouse Ann. VI. C. 1-6.

Wenn ein System, dessen Verbindungen von der Zeit unabhängig sind, der Einwirkung von Kräften unterliegt, die eine Kräftefunction $U$ besitzen, so entsprechen den Gleichgewichtslagen des Systems die Maxima und Minima dieser Function $U$, als Function der unabhängigen Parameter, welche die geometrische Configuration des Systems bedingen. Von dieser bekannten Eigenschaft ausgehend, kann man auch für ein System, das der Einwirkung von Kräften unterliegt, die nicht aus einer Kräftefunction fliessen,

zu unendlich vielen Functionen gelangen, die bei einer gegebenen Gleichgewichtslage des Systems extreme Werte erhalten. Dadurch gewinnt man Sätze, welche Eigenschaften der betrachteten Gleichgewichtslage aussprechen, aber im allgemeinen nicht diese Lage aufzufinden lehren, weil nach ihrer Fassung die Gleichgewichtslage bekannt sein muss. Dies wird an den bezüglichen Sätzen von Lagrange und Möbius erläutert, denen einige analoge Verallgemeinerungen angereiht werden. Lp.

---

L. C. Almeida. Nova interpretação das condiciões de equilibrio dos corpos solidos. Instituto de Coimbra XL.

Der Verf. zeigt, für das Gleichgewicht starrer Körper sei es notwendig und hinreichend, dass die den betrachteten Körper angreifenden Kräfte in paarweise gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte zerlegbar seien, die in der Richtung der Verbindungsgeraden ihrer Angriffspunkte wirken. Tx. (Lp.)

---

N. Schiller. Bemerkung über das Gleichgewicht eines starren Körpers unter Wirkung der Reibung, die in einem ebenen Teile seiner Oberfläche stattfindet. Arb. d. phys. Section der Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde zu Moskau. V. 17-19. (Russisch.)

Der Verfasser löst das Problem des Gleichgewichtes eines starren Körpers, der sich mit der ebenen Basis auf eine unbewegliche Ebene stützt. Die Unbestimmtheit des Problems, die von den unbestimmten Richtungen der Reibungskräfte herrührt, welche zwischen den Elementen der ebenen Basis und der stützenden Ebene entstehen, wird hier dadurch beseitigt, dass man den Grenzfall betrachtet, unter dessen Voraussetzung die äusseren Kräfte derart anwachsen, dass der Körper um eine auf der Ebene senkrecht stehende Axe zu rotiren beginnt. Hierbei fallen die Richtungen der Reibungskräfte mit denen der Verschiebungen, welche die Elemente der ebenen Basis erfahren, zusammen. Indem der Verfasser den Normaldruck der Ebene auf die Elemente der ebenen Basis durch lineare Functionen der Coordinaten dieser Elemente ausdrückt,

eliminirt er aus den Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers die Coordinaten der augenblicklichen Rotationsaxe und erhält somit das Verhältnis zwischen den äusseren Kräften, welches das Vorhandensein des vorliegenden Grenzfalls charakterisirt. Jk.

---

Frétille. Note sur le centre de gravité des solides à la mesure desquels est applicable la règle des trois niveaux. J. de Math. spéc. (4) I. 132-136, 153-155, 179-184.

Es wird zunächst die bekannte Formel für das Volumen eines Obelisken, für welchen der Verfasser den Namen „tronc polyédrique" gebraucht, hergeleitet und dann zur Bestimmung des Schwerpunkts der genannten Körper übergegangen. Alsdann folgt eine Ausdehnung der Betrachtung auf Regelflächen und auf Segmente von Flächen zweiter Ordnung. Gz.

---

Louis Bénézech. Note de géométrie et de mécanique. J. de Math. élém. (4) I. 58-62, 107-110, 131-135.

Elementare Betrachtungen über den Schwerpunkt von $n$ gegebenen Punkten, die geometrische Resultante von Strecken u. dgl., die nichts wesentlich Neues zu bieten scheinen. Gz.

---

F. Lucas. Note relative aux points centraux. S. M. F. Bull. XX. 10-12.

Bezeichnet die Gleichung

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_p) = 0$$

ein ebenes System von $p$ Punkten mit der Masse 1, so bestimmt die Gleichung

$$\frac{d^k f(z)}{dz^k} = 0$$

den $k^{\text{ten}}$ Centralpunkt des Systems, für $k=p-1$ den Schwerpunkt. Ein ebenes System von Punkten und die Systeme seiner Centralpunkte haben dieselben Trägheitsaxen. Damit die Trägheitsellipse ein Kreis sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Summe der Coordinaten bezüglich auf zwei rechtwinklige Axen,

die durch den Schwerpunkt gehen, identisch Null sei. In diesem Falle sind die Trägheitsellipsen aller Systeme von Centralpunkten Kreise. H.

## P. B. Richter. Erweiterung der Guldin'schen Regel.

Schlömilch Z. XXXVII. 172-177.

Ohne auf die Erweiterungen der Guldin'schen Sätze Bezug zu nehmen, die schon früher ausgesprochen sind (vergl. Collignon, Traité de Mécanique II, § 211), stellt der Verf. folgendes Resultat fest: Hat man einen Körper allein durch Rotationen einer unveränderlichen ebenen Fläche um eine Axe in ihrer Ebene erzeugt, so erhält man bei Rotationen um 360° einen ebenso grossen Körper, wenn dabei A) die erzeugenden Flächenteile sich während der Rotation, ohne sich zu decken, so verschieben, dass der Schwerpunkt derselbe bleibt; B) der Schwerpunkt der Fläche sich parallel der Axe mit beliebig veränderlicher Beschleunigung bewegt; $C_1$) der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche sich bei constanter Winkelgeschwindigkeit in ganzen (Doppel-) Schwingungen mit beliebig veränderlicher Beschleunigung so um die Lage, die er bei Erzeugung des entsprechenden einfachen Rotationskörpers hat, bewegt, dass die Summe der Geschwindigkeitscomponenten, senkrecht zur Axe genommen, immer für zwei zu jener typischen Lage symmetrische Punkte entgegengesetzt gleich ist; $C_2$) der Schwerpunkt der erzeugenden Fläche senkrecht zur Axe einen gleich grossen Weg von seiner Lage im einfachen Körper nach beiden Seiten zurücklegt, und zwar bei constantem Verhältnis seiner Geschwindigkeit zur Winkelgeschwindigkeit um die Axe. Lp.

## E. Cesàro. Costruzioni baricentriche. Rivista di Mat. II. 43-54.

Zuerst wird die Aufgabe behandelt, einer gegebenen Curve $(M)$ in einer Ebene eine andere $(N)$ so zuzuordnen, dass der Schwerpunkt eines beliebigen Bogens von $(M)$ der Sehne des entsprechenden Bogens von $(N)$ angehöre. Als besonderer Fall ergiebt sich hierbei: Der Bogen $s$ der Klothoide $\varrho s = a^2$ ($\varrho$ = Krümmungsradius im Endpunkte von $s$) besitzt zum Schwerpunkt einen Aehnlichkeits-

punkt der Krümmungskreise in den Endpunkten von $s$, und es giebt keine andere ebene Curve mit der nämlichen Eigenschaft. Darauf folgen Betrachtungen über den Fall, dass zwischen $(M)$ und $(N)$ besondere Beziehungen festgesetzt werden, dass die eine Curve z. B. die Evolute der anderen ist. Aus den aufgestellten Gleichungen fliesst eine mechanische Construction für den Schwerpunkt eines Curvenbogens. Mit denselben Mitteln werden dann die entsprechenden Fragen für Raumcurven beantwortet, wobei sich interessante Eigenschaften specieller Curven auf der Kugel und dem Cylinder ergeben. Eine weitere Verallgemeinerung wird dadurch erzielt, dass die Dichte der Masse auf den Curvenbogen nicht mehr constant, sondern als Function des Ortes, z. B. von $s$, angenommen wird. Constructionen für den Schwerpunkt eines Bogens, wie sie der Verf. schon früher veröffentlicht hat (F. d. M. XVIII. 1886. 831), und für den Schwerpunkt von Flächenstücken lassen sich aus den Ergebnissen folgern und werden kurz angedeutet. Lp.

---

G. Pennacchietti. Sulle curve funicolari I, II. Palermo Rend. VI. 14-25, 26-39; Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania. (4) III, IV.

Die Analogie zwischen dem Gleichgewichte an einem Faden und der Bewegung eines Punktes ist der Titel des siebenten Capitels im zweiten Teile des Lehrbuchs der Statik von Möbius, und dasselbe Thema ist seitdem oft erörtert worden, so im VIII. Capitel des zweiten Bandes von Schell's Theorie der Bewegung und der Kräfte (2. Aufl. 1880). Der Verf. liefert hierzu neue Beiträge, ohne jedoch der eben erwähnten früheren Bearbeitungen der Frage zu gedenken. Er selbst spricht sich über den Zweck seiner Abhandlung kurz so aus: „Nach Aufstellung der Differentialgleichungen des Gleichgewichtes eines biegsamen und unausdehnbaren Fadens unter verschiedenen Gestalten beweise ich über die Fadencurven einige Theoreme, welche bekannten Eigenschaften bezüglich der Bewegung eines Punktes analog sind.“ Da die ganze Arbeit in eine Reihe von Einzelbetrachtungen zerfällt, so müssen wir uns mit der Bemerkung begnügen, dass besonders in der zweiten Hälfte

das Bestreben sich geltend macht, solche Probleme zu charakterisiren, welche zu gleichen oder correspondirenden Lösungen führen, welche Tendenz ja gegenwärtig auch in der Dynamik herrscht. Um von den gefundenen Sätzen einige hier zur Kennzeichnung des Inhaltes vorzuführen, wählen wir gegenüber einigen von sehr breiter Fassung solche aus, die sich kurz aussprechen lassen: (S. 24) „Wenn bei dem Gleichgewichte eines biegsamen und unausdehnbaren Fadens die Wirkungslinien der Kraft einem linearen Complexe angehören, so ist das Moment der Spannung bezüglich des Complexes in allen Punkten des Fadens constant.“ (S. 29) „Eine beliebige Curve kann Gleichgewichtsgestalt eines Fadens sein, von dem jeder Punkt durch eine Kraft angegriffen wird, deren Wirkungslinie in einem willkürlich angenommenen linearen Complexe sich ändert.“ (S. 33) „Die Gleichungen (11) sind die beiden Gleichungen der Fadencurve in endlichen Gliedern. Wenn die gegebenen Werte $x_0$, $y_0$, $z_0$, $\eta_0$, $\zeta_0$ von $x$, $y$, $z$, $\eta$, $\zeta$, die einem gegebenen Werte $s_0$ von $s$ entsprechen, dieselben durch alle Probleme der durch die Gleichungen (2), (7), (8) definirten Klasse sind, so ist die Fadencurve die nämliche für alle Probleme, bei denen die Kräfte den beiden nachfolgenden Bedingungen genügen“.

Lp.

---

R. Marcolongo. Alcune applicazioni delle funzioni ellittiche alla teoria dell'equilibrio dei fili flessibili. I, II. Napoli Rend. (2) VI. 71-79, 89-96.

G. Battaglini. Rapporto. Ibid. 70-71, 88.

In der ersten Note behandelt der Verf. das Gleichgewicht eines Fadens, wenn die auf ihn wirkende abstossende Kraft senkrecht zu einer festen Axe und direct proportional dem Abstande von dieser Axe ist. Die Aufgabe stimmt daher überein mit derjenigen, die Gleichgewichtscurve eines rotirenden unelastischen Fadens zu finden, welche in der Dissertation von Plettenberg behandelt ist (vgl. F. d. M. XV. 1883. 796), nachdem Clebsch im J. für Math. LVII. 93ff. (§. 3) schon das Wesentliche der Lösung beigebracht hatte. Unter der auf Seite 78 der vorliegenden Ar-

beit angeführten Litteratur ist die Plettenberg'sche Dissertation nicht enthalten.

Nachdem der Verf. das Problem auf Quadraturen gebracht hat, drückt er die Coordinaten der Curvenpunkte, den Fahrstrahl und die Anomalie der Projection der Curve auf eine Normalebene zur Axe durch Jacobi'sche Thetafunctionen aus. Die einfachen Ausdrücke, welche er gewinnt, ermöglichen die vollständige Discussion der Curve in ihrer Projection. Bemerkenswert ist die Thatsache, dass die Coordinaten der Projection sich rational durch doppeltperiodische Functionen zweiter Gattung ausdrücken lassen, und dass der zwischen einem Maximum und dem nächsten Minimum liegende Winkel der Fahrstrahlen immer grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist. Zum Schlusse wird die enge Verwandtschaft des Problems mit der des sphärischen Pendels hervorgehoben und die Brauchbarkeit der jetzt abgeleiteten Formeln für dieses andere Problem betont.

Die zweite Note beschäftigt sich in ähnlicher Weise mit der sphärischen Kettenlinie und führt in der Litteratur über diesen Gegenstand Gudermann, Clebsch und Appell an. Wie Ref. bei der Besprechung der Abhandlung dieses Letzteren bemerkt hat (F. d. M. XVII. 1885. 855), ist es bedauerlich, dass die Biermann'sche Dissertation „Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta“ (Berolini 1865) im Auslande wenig bekannt geworden ist; in ihr ist nämlich die sphärische Kettenlinie sorgfältig untersucht. Wir enthalten uns daher des weiteren Eingehens auf den Gegenstand und begnügen uns mit der Bemerkung, dass die Coordinaten der Punkte der sphärischen Kettenlinie ebenfalls rational durch periodische Functionen zweiter Gattung ausgedrückt werden. Lp.

---

L. Bianchi. Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 41-48.

Indem der Verf. die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung durch den Abstand der Tangentialebene einer Fläche vom Coordinatenanfangspunkt darstellt und in die Gleichung für die Verschiebungsfunction einsetzt, erhält er eine Gleichung, welche be-

züglich der beiden genannten Grössen symmetrisch ist. Fasst man andererseits die Verschiebungsfunction als Abstand einer Ebene auf, welche der Tangentialebene parallel ist, so erhält man in der Enveloppe dieser Ebene eine neue Fläche, welche der ersten nach übereinstimmender Richtung der Normalen entspricht. Ferner entspricht den asymptotischen Linien der einen ein conjugirtes System der anderen und umgekehrt. Der Verfasser nennt derartige Flächen associirte Flächen. Bei solchen Flächen ist also der Abstand der Tangentialebenen der einen Fläche vom Coordinatenanfangspunkt gegeben durch die Verschiebungsfunction der anderen.

Das conjugirte System der einen Fläche, welches den asymptotischen Linien der anderen Fläche entspricht, hat die Eigenschaft, dass es bei einer unendlich kleinen Verbiegung ein conjugirtes System bleibt. Das führt dann zu dem Satz: Damit ein conjugirtes System diese Eigenschaft bei einer unendlich kleinen Verbiegung beibehalte, müssen die Bilder dieser Systeme auf der Gauss'schen Kugel zugleich die Bilder der asymptotischen Systeme einer anderen Fläche sein.

Dann zeigt der Verfasser, dass diejenigen Flächen, bei welchen ein System conjugirter Linien durch geodätische Linien gebildet wird, den pseudosphärischen Flächen associirt sind. Im letzten Paragraphen findet der Verfasser, dass, wenn die Fläche sich in mehrfacher Weise so biegen lässt, dass ein gewisses System conjugirter Linien erhalten bleibt, die letzteren die Bilder der asymptotischen Linien von Flächen sein müssen, für welche das Krümmungsmass in den Parametern dieser Linien: $K = -\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}$ sein muss.

F. K.

---

G. Picciati. Sull'equilibrio e sul moto infinitesimo delle superficie flessibili ed estendibili. Batt. G. XXX. 1-30.

Nachdem durch Lecornu und Beltrami die Gleichgewichtsbedingungen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche aufgestellt sind, war es für den Verfasser verhältnismässig leicht, die allgemeinen Bewegungsgleichungen für ein beliebiges biegsames Flächen-

gebilde aufzustellen, und dann von diesen zu den Gleichgewichtsbedingungen überzugehen.

Im zweiten Capitel beschäftigt sich der Verfasser mit der infinitesimalen Deformation der Oberflächen und wendet die gewonnenen Resultate im dritten Capitel dazu an, die Schwingungen einer Fläche um eine Gleichgewichtslage zu bestimmen. Bezüglich der physikalischen Natur der Fläche wird vorausgesetzt, dass ihr dieselbe Eigenschaft zukommt, welche die Flüssigkeiten in einem Gebiet von drei Dimensionen besitzen, d. h. dass alle Linienelemente, welche durch einen Punkt gehen, gleich grosse normale Spannung erleiden. Besonders behandelt wird erstlich der Fall, dass auf das Innere der Fläche gar keine Kräfte wirken und auf den Rand eine constante Normalkraft. Die Gleichgewichtslage wird eine Minimalfläche und die Spannung für die ganze Fläche constant. Im zweiten Falle wird vorausgesetzt, dass die Gleichgewichtslage eine Kugel und die auf die Fläche wirkende Kraft nach dem Mittelpunkte der Kugel gerichtet ist. F. K.

---

G. Bardelli. Dell' uso delle coordinate obliquangole nella teoria dei momenti d' inerzia. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 444-458.

Der Verf. spricht sich am Anfange der Abhandlung folgendermassen über ihren Zweck aus: „Verschiedene Autoren, insbesondere Chelini (Bologna Mem. (2) V. 1865, gleichbetitelt) und Ruffini (vergl. F. d. M. XIII. 1881. 684) haben sich mit dem Gebrauch schiefwinkliger Coordinaten in der Theorie der Trägheitsmomente der materiellen Systeme beschäftigt; aber ihre Forschungen verfolgen mehr den Zweck, die allgemeinen Eigenschaften jener Momente festzustellen in Verbindung mit ihrer geometrischen Darstellung vermittelst specieller ellipsoidischer Oberflächen, statt Formeln zu liefern, die zur wirklichen Bestimmung derselben in besonderen Fällen sich wertvoll erweisen, und die allgemeine Theorie der Hauptträgheitsaxen und Momente auseinanderzusetzen, wenn die Bezugsaxen beliebig sind, ähnlich wie es von anderen Autoren für die der Oberflächen zweiter Ordnung geschehen ist. Gerade diese etwas verschiedenen Ziele sind es, die ich mir in der gegen-

wärtigen Arbeit stecke, die, wie ich meine, des Interesses nicht bar sein wird bei einem Gegenstande von allgemein anerkannter Wichtigkeit".

Nach vollständiger Durchführung aller notwendigen Rechnungen (§§ 1-6) behandelt der Verf. zwei Beispiele zur Veranschaulichung der Nützlichkeit seiner Formeln, nämlich das homogene Tetraeder und ein ebenes Massensystem. Lp.

---

J. Finger. Ueber die gegenseitigen Beziehungen gewisser in der Mechanik mit Vorteil anwendbaren Flächen zweiter Ordnung nebst Anwendungen auf Probleme der Astatik. Wien. Ber. CI. 1105-1142, Wien. Anzeigen 1892. 123-124.

Die Abhandlung soll die von Hrn. Darboux gefundenen geometrischen Resultate astatischer Probleme ergänzen und erweitern; sie ist als Einleitung gedacht zu einer Reihe von Untersuchungen über den Kräftepol eines beliebigen, auf ein starres Punktsystem einwirkenden Kräftesystems, welche Untersuchungen vom Verf. nach langjähriger Arbeit zum Abschluss gebracht sind und demnächst veröffentlicht werden sollen. In der vorliegenden Abhandlung findet man vorwiegend die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen der Flächen zweiter Ordnung:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy = C,$$

$$A_{11}x^2+A_{22}y^2+A_{33}z^2+2A_{23}yz+2A_{31}zx+2A_{12}xy = \frac{\Delta}{C},$$

$$(a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z)^2+(a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z)^2 +(a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z)^2 = C^2,$$

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)^2+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)^2 +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)^2 = C^2,$$

$$(A_{11}x+A_{21}y+A_{31}z)^2+(A_{12}x+A_{22}y+A_{32}z)^2 +(A_{13}x+A_{23}y+A_{33}z)^2 = \frac{\Delta^2}{C^2},$$

$$(A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z)^2+(A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z)^2 +(A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z)^2 = \frac{\Delta^2}{C^2}.$$

Hierin bedeuten $a_{mn}$ gegebene Constanten, $\Delta$ die Determinante aus ihnen, $A_{mn}$ die den $a_{mn}$ adjungirten Subdeterminanten. Die gewonnenen Resultate werden auf die Bestimmung der Richtungen der Seitenkräfte der auf drei gegebene, orthogonale, astatische Arme reducirten Kräftepaare für ein beliebiges Kräftesystem und einen willkürlichen Reductionspunkt angewandt, ferner auf die Bestimmung der Lage des Centralpunktes und der Centralebene dieses Kräftesystems, der Richtungen und Grössen der Halbaxen des Darboux'schen astatischen Hauptcentralellipsoids, der Lagen der Möbius'schen Gleichgewichtsaxen u. s. w. Gelegentlich findet man neben einer abweichenden Herleitung ein neues Resultat oder die Berichtigung einer Aussage bei einem früheren Bearbeiter.

Lp.

---

J. Finger. Ueber jenes Massenmoment eines materiellen Punktsystems, welches aus dem Trägheitsmomente und dem Deviationsmomente in Bezug auf irgend eine Axe resultirt. Wien. Ber. CI. 1649-1674, Wien. Anzeigen 1892. 236-238.

Die Abhandlung führt den Begriff des dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechenden Massenmomentes $M_a^{(0)}$ eines Punktsystems in Bezug auf diese Axe ein und erforscht seine Eigenschaften, die denjenigen des Trägheitsmomentes vielfach ähneln. Der Verf. geht nämlich von folgender Ueberlegung aus. Ist $a$ eine feste Axe, $O$ ein Punkt auf ihr, $M$ ein Punkt des Punktsystems mit der Masse $m$, so ziehe man $OM = r$, projicire $M$ auf $a$ in $N$; dann entsteht das rechtwinklige Dreieck $MNO$ mit dem Winkel $MON = \varphi$. Dreht man nun Dreieck $MNO$ in seiner Ebene um einen rechten Winkel derart, dass die frühere Richtung $MN$ in die positive Richtung von $a$ gelangt, so gehe $MNO$ in $M'N'O'$ über. Durch Multiplication der Seiten von $M'N'O'$ mit $m.M'N'$ erhält man für den Punkt $M$:

1) $m.\overline{M'N'}^2 = mr^2\sin^2\varphi = i_a =$ Trägheitsmoment,

2) $m.M'N'.N'O' = mr^2\sin\varphi\cos\varphi = d_a^{(0)} =$ Deviationsmoment,

3) $m.M'N'.M'O' = mr^2\sin\varphi = m_a^{(0)} =$ Massenmoment,

das letztere vollständig als das „dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechende, auf die Axe $a$ bezogene (resultirende) Massenmoment" bezeichnet, das die geometrische Summe der beiden ersteren vorstellt. Ist $O$ der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so folgen für die Projectionen von $m_a^{(O)}$ (oder seine Componenten) die folgenden Ausdrücke, in denen $\alpha_x$, $\alpha_y$, $\alpha_z$ die Richtungscosinus von $a$ bezeichnen:

$$(6)\qquad \begin{cases} m_a^{(O)}.\cos(x,\, m_a^{(O)}) = \alpha_x . m(y^2+z^2) - \alpha_y . mxy - \alpha_z . mxz, \\ m_a^{(O)}.\cos(y,\, m_a^{(O)}) = \alpha_y . m(z^2+x^2) - \alpha_z . myz - \alpha_x . myx, \\ m_a^{(O)}.\cos(z,\, m_a^{(O)}) = \alpha_z . m(x^2+y^2) - \alpha_x . mzx - \alpha_y . mzy. \end{cases}$$

Die geometrische Summe der durch diese Gleichungen bestimmten Massenmomente aller materiellen Punkte des Systems liefert das dem Punkte $O$ der Axe $a$ entsprechende Massenmoment $M_a^{(O)}$ des Punktsystems in Bezug auf diese Axe. Bezeichnet man die Richtungscosinus desselben mit $\mu_x$, $\mu_y$, $\mu_z$, so hat man demnach:

$$(8)\qquad M_a^{(O)}.\mu_x = \alpha_x \Sigma m(y^2+z^2) - \alpha_y \Sigma mxy - \alpha_z \Sigma mxz$$

nebst den beiden entsprechenden Gleichungen. Man setze noch

$$a_{11} = \Sigma m(y^2+z^2), \quad a_{22} = \Sigma m(z^2+x^2), \quad a_{33} = \Sigma m(x^2+y^2),$$
$$a_{23} = -\Sigma myz, \qquad a_{31} = -\Sigma mxz, \qquad a_{12} = -\Sigma mxy,$$

wobei also die erste Zeile die Trägheitsmomente, die zweite die Deviationsmomente enthält und $a_{ik} = a_{ki}$ ist, dann sind die Componenten des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ bestimmt durch

$$(10)\qquad \begin{cases} M_a^{(O)}.\mu_x = a_{11}\alpha_x + a_{21}\alpha_y + a_{31}\alpha_z, \\ M_a^{(O)}.\mu_y = a_{12}\alpha_x + a_{22}\alpha_y + a_{32}\alpha_z, \\ M_a^{(O)}.\mu_z = a_{13}\alpha_x + a_{23}\alpha_y + a_{33}\alpha_z. \end{cases}$$

„Die Uebereinstimmung der Form der Gleichungen (10) sowohl mit jenen bekannten Gleichungen, die bei der astatischen Reduction der Kräfte eines auf ein starres Punktsystem einwirkenden Kräftesystems auf eine Reductionsresultante und auf drei Kräftepaare — mit orthogonalen astatischen Armen von der Länge 1 — zur Bestimmung der im Endpunkte eines dieser Arme wirkenden Seitenkraft des entsprechenden Kräftepaares dienen, als auch mit jenen Gleichungen, welche in der Kinematik homogener Deformationen die Lage und Länge einer Geraden des Körpers nach

erfolgter Deformation bestimmen, und auch mit jenen Gleichungen, mittels welcher man in der Elasticitätstheorie die Richtung und Grösse der resultirenden Spannung berechnet, springt sofort ins Auge, so dass nach der Ansicht des Verfassers diese Analogie allein schon die Einführung des Begriffes des Massenmomentes in die Geometrie der Massen empfehlen dürfte, ganz abgesehen von den anderen Vorteilen, die aus den folgenden Auseinandersetzungen ersichtlich sein werden."

Die Richtung und Grösse sowohl des Massenmomentes $M_a^{(O)}$ als auch der zur Axe $a$ normalen Componente $D_a^{(O)}$ desselben lässt sich für die verschiedenen, durch $O$ gehenden Axen mittels der Reciprocalfläche des Cauchy-Poinsot'schen Trägheitsellipsoids bestimmen. Die weitere Untersuchung, deren Einzelheiten wir hier nicht wiedergeben können, erstreckt sich auf die Beziehungen zwischen den verschiedenen, demselben Punkte entsprechenden Massenmomenten, zwischen den Massenmomenten bezüglich paralleler Axen u. s. w. Lp.

R. Hoppe. Das Tetraeder bezogen auf seine Hauptträgheitsaxen. Hoppe Arch. (2) XI. 85-92.

Der Verf. bezweckt durch seine Darstellung zunächst, den Nachweis zu führen, dass das bei der Herleitung von ihm angewandte Princip der Aneinanderfügung von Strecken mittels Addition ihrer Projectionen auf eine willkürliche Gerade geeignet sei, die Hamilton'sche Methode der Streckenaddition durch die gewöhnliche Coordinatenrechnung zu ersetzen. Nach Ermittelung der Bedingungen für die Hauptträgheitsaxen (§ 1) wird in § 2 die Aufgabe gelöst: Ein Tetraeder darzustellen, dessen Hauptträgheitsaxen gegeben sind. In § 3 werden nach Auswahl von 6 Bestimmungsstücken die übrigen rational durch dieselben bestimmt.

Lp.

---

F. Lucas. Sur l'ellipse centrale d'inertie d'un système plan de points matériels de même masse. S. M. F. Bull. XX. 17-19.

Der Verf. hatte früher den Satz gefunden, dass die Verbindungslinie der beiden Centralpunkte $(p-2)^{ter}$ Ordnung eines ebenen Systems von $p$ Massenpunkten mit einer der Hauptaxen der Centralträgheitsellipse des Systems zusammenfällt. Jetzt ergänzt er diesen Satz dahin, dass jene Verbindungslinie mit der grossen Axe der Ellipse zusammenfällt, und dass die Differenz der Quadrate der Hauptträgheitsradien gleich dem $(p-1)$-fachen Quadrate des halben Abstandes der beiden Centralpunkte $(p-2)^{ter}$ Ordnung ist. Bemerkungen über die Reduction jener Ellipse auf einen Kreis.

Lp.

Hj. Tallqvist. Bestimmung der Trägheitsmomente für die mit Masse gleichförmig beladene Fläche eines ungleichaxigen Ellipsoids. Helsingfors. Acta Soc. Fennicae. XVII. 493-501.

Die Bestimmung der Trägheitsmomente mit Bezug auf die Axen wird mit Hülfe der Weierstrass'schen Theorie der elliptischen Functionen ausgeführt. Bdn.

R. Land. Einfache Darstellung der Trägheits- und Centrifugalmomente von Flächen, nebst Ermittelung der Spannungsverteilung und des Kernes bei unsymmetrischen Querschnitten. Zeitschr. f. Bauw. XLII. 550-568.

In zwei Bänden des Civiling. (1887/1888) hatten Herr Mohr und der Verf. Untersuchungen über die Trägheitsmomente von Flächen bekannt gemacht; der Verf. giebt hier eine neue Darstellung der gewonnenen Resultate und wendet dieselben an, um die Verteilung der Spannungen in Querschnitten zu ermitteln.

F. K.

Th. Kalep. Die Methoden der experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente von Maschinenteilen. Civiling. (2) XXXVIII. 381-394.

Herr Kalep macht verschiedene Bedenken gegen die von Herrn

M. Kohn im Civiling. XXXVI (F. d. M. XXII. 1890. 881) vorgeschlagene Methode der Bestimmung von Trägheitsmomenten geltend. Die von Herrn Kalep angestellten Versuche zeigen, dass die Kohn'sche Methode in der That ungenauer ist als verschiedene andere Methoden. Zum Vergleich hat der Verf. die Methode des Torsionspendels und die des physikalischen Pendels geprüft, ausserdem auch eine von Herrn Grübler in Riga vorgeschlagene Methode, welche auf der Theorie des Rollpendels beruht, experimentell untersucht. F. K.

---

N. Joukowsky. Sur un appareil nouveau pour la détermination de moments de l'inertie des corps. Bull. Soc. Imp. de Naturalistes de Moscou. Année 1891. No. 2 & 3. 415-416.

Die wenig umfangreiche Abhandlung enthält die Beschreibung eines vom Autor für das mechanische Cabinet der Unversität zu Moskau construirten Apparats. Die Idee des Apparats beruht auf dem Princip der Erhaltung der Flächen. Das Trägheitsmoment des zu prüfenden Körpers wird bestimmt, indem man es mit dem Trägheitsmoment eines bestimmten, constanten, zum Apparate gehörigen Cylinders vergleicht. Jk.

---

J. G. MacGregor. On the graphical treatment of the inertia of the connecting rod. Trans. Nova Scotia Inst. of Science (2) I. 193-202.

Bei langsam gehenden Dampfmaschinen ist der Fehler nicht beträchtlich, den man macht, wenn man bei der Berechnung der Wirkung der Pleuelstange auf die Kurbel die Masse der Pleuelstange vernachlässigt. Bei Maschinen von hoher Geschwindigkeit wird jedoch auf diese Weise ein bedeutender Fehler herbeigeführt. Zur Bestimmung der stattfindenden Wirkung beschreibt der Verf. eine graphische Methode, welche nach seiner Ansicht richtige Resultate ergiebt, während der von Hrn. Kennedy in dem Werke „On the mechanics of machinery“ (1886) angegebene Weg unzuverlässig sei. Lp.

---

F. Ravieri. Linee d'influenza delle aste delle travi reticolari indeformabili, prive di aste sorrabbondanti, di qualsiasi forma, soggette a carichi mobili. Il Politecnico. XL. 550-558, 660-672, 722-736.

Man erhält (nach Fränkel) die auf einen Schnitt eines Trägers bezügliche „Influenzlinie", wenn man die den verschiedenen Lagen der Belastung entsprechenden Tangentialkräfte oder Biegungsmomente als Ordinaten aufträgt. Vi.

Fränkel. Erddruck. Civiling. (2) XXXVIII. 417-418.

Nach dem kurzen Referat über einen Vortrag des Verfassers gelangt derselbe zu dem Resultat, dass man zu einer Lösung des Erddruckproblems nur gelangen könne, wenn man den Erdboden als elastischen Körper betrachte. F. K.

A. Föppl. Das Fachwerk im Raume. Leipzig. Teubner. VIII u. 156 S. Mit Figuren u. 2 Taf. 8°.

H. Froelich. Elementare Anleitung zur Anfertigung statistischer Berechnungen für die im Hochbau üblichen Constructionen mit eisernen Trägern und Stützen. Unter besonderer Berücksichtigung der Berliner Verhältnisse und baupolizeilichen Vorschriften, nebst einer kurzen Behandlung der Winddruckberechnung. Berlin. Polyt. Buchhandl. V + 50 S. 8°.

P. Frolow. Lehrbuch der Physik. Tl. I. Statik. Poltawa. (Russisch, 1891.)

## B. Hydrostatik.

G. M. Minchin. Hydrostatics and elementary hydrokinetics. Oxford. Clarendon Press. XI + 424 S. 8°.

Dieses Lehrbuch besitzt dieselbe Klarheit der Darstellung und Vollständigkeit im einzelnen, welche des Verfassers Statik (F. d. M. XVII. 1886. 803) verdientermassen so beliebt gemacht haben. Der grössere Teil des Buches ist der Hydrostatik gewidmet, und die Behandlung ist so einfach und gründlich, wie zu wünschen ist; die Abschnitte über Kinetik bilden dagegen eine gute Einleitung für die schwierigeren Werke. Das Buch kann ohne Vorbehalt den Studirenden empfohlen werden. Gbs. (Lp.)

W. H. Besant. Elementary hydrostatics. „Cambridge mathematical series". Cambridge. Deighton, Bell, and Co. [Nature XLVI. 172-173.]

---

N. Sarkar, D. Biddle, D. Edwardes. Solution of question 11207. Ed. Times LVI. 103-105.

Ist ein Viereck vollständig eingetaucht in Wasser, und sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die Tiefen seiner vier Ecken, $h$ die seines Schwerpunktes, so liegt der Mittelpunkt des hydrostatischen Druckes in der Tiefe

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\frac{1}{6h}(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta).$$

Lp.

---

A. B. Basset. On the stability of Maclaurin's liquid spheroid. Cambr. Proc. VIII. Part I. 23-40. (1892.)

Die Stelle über Maclaurin's flüssiges Sphäroid in Thomson und Tait's Natural philosophy ist ziemlich dunkel und hat den Verfasser veranlasst, das angegebene Resultat nachzuprüfen, bezw. herzuleiten, nämlich dass das Sphäroid unstabil wird, wenn seine Excentricität den Wert 0,8127 überschreitet.

Im Verlaufe der Untersuchung macht Herr Basset darauf

aufmerksam, dass sich in der Arbeit des Herrn Poincaré (Acta Math. VII. 259ff.) ein Versehen findet, insofern nämlich übersehen ist, dass die Winkelgeschwindigkeit der gestörten Figur nicht gleich derjenigen der ursprünglichen ist. Dies bewirkt, dass zu dem von Herrn Poincaré (a. a. O. S. 315) angegebenen Ausdruck für die Totalenergie der gestörten Figur noch ein Glied hinzuzufügen ist. Inwieweit dies die Poincaré'schen Resultate für die Ellipsoide beeinflusst, lässt der Verfasser dahingestellt sein. Gz.

## A. B. Basset. Stability and instability of viscous liquids.

Lond. R. S. Proc. LI. 273-276.

Auszug aus einer Abhandlung, die wahrscheinlich in den Phil. Trans. erscheinen wird. Gegenstand ist der Versuch, eine theoretische Erklärung der Instabilität zäher Flüssigkeiten zu erhalten, deren experimentelle Untersuchung Hr. Osborne Reynolds 1883 durchgeführt hat (Lond. Phil. Trans. CLXXIV. 935).

Cly. (Lp.)

## Éd. Collignon. Problèmes sur les corps flottants.

Assoc. Franç. Pau XXI. 7-17.

Die Aufgaben beziehen sich auf die Stabilität des Schwimmens nach Massgabe der Function $I-aV$, in der $I$ das kleinste Trägheitsmoment der Curve, in welcher die Oberfläche der Flüssigkeit den schwimmenden Körper berührt, bezüglich einer durch den Schwerpunkt dieser Curve gezogenen Geraden bedeutet, $a$ den Abstand des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeit von dem des schwimmenden Körpers, $V$ die verdrängte Flüssigkeit. Es werden solche Körperformen aufgesucht, welche einen constanten Wert dieser Function sichern, wie tief auch der Körper eintaucht. Dabei erfahren die Fälle eine besondere Behandlung, bei denen die Horizontalschnitte des eintauchenden Teiles ähnlich, oder wo sie affin sind, ferner bei denen eine Relation $\alpha = \varphi(\beta)$ zwischen den beiden Coefficienten der Affinität besteht, insbesondere $\alpha = \beta^n$, und dann wieder $\alpha$ constant, $\beta$ constant, $n = 1$, $n = -1$. Zuletzt

wird die Art besprochen, ein indifferentes Gleichgewicht in ein stabiles überzuführen. Lp.

---

Ph. Forchheimer. Verfahren zur Berechnung von Schwimmdocks. Zeitschr. f. Bauw. XLII. 278-288.

Die mathematische Grundlage bildet die Theorie des Trägers mit Gegendrucken proportional der Einsenkung. Bezüglich derselben bezieht sich der Verfasser auf eine Abhandlung von Zimmermann über Berechnung des Eisenbahnoberbaus aus dem Jahre 1888 und giebt die betreffenden Resultate mit einer kurzen Ableitung wieder. F. K.

---

## Capitel 4.

## Dynamik.

### A. Dynamik fester Körper.

W. W. Johnson. The mechanical axioms or laws of motion. New York M. S. Bull. I. 129-139.

Der Zusammenhang der Newton'schen Bewegungsgesetze unter einander und mit den als Principe in der Mechanik bezeichneten Sätzen wird erörtert. Am Schlusse wird eine Gedankenreihe skizzirt, welche die Erhaltung der Energie in ihren mechanischen Formen der kinetischen und der potentiellen Energie von Massen direct aus den Axiomen der „unabhängigen beschleunigenden Wirkung der Kraft", der „Dualität des Zwanges" und der „Abhängigkeit der Intensität allein von der Entfernung" herleitet. Lp.

Lord Kelvin. On graphic solution of dynamical problems. Brit. Ass. Rep. Edinb. LXII. 648-652; Phil. Mag. (5) XXXIV. 443-448.

Eine Erweiterung der Methode, welche der Verfasser in seinen „Popular lectures and addresses" zum Entwerfen der Meridiane

ür capillare Umdrehungsflächen angegeben hat, und welche wir mit den Worten des Originals wiedergeben.

Man nehme an, es sei verlangt, den Weg eines in beliebiger Richtung mit irgend welcher gegebenen Geschwindigkeit von einem Punkte $P_0$ aus geworfenen Massenpunktes zu finden unter Einwirkung einer Kraft, deren Potential für jeden Punkt der Ebene gegeben ist. Man berechne die normale Kraftcomponente in diesem Punkte und dividire das Quadrat der Geschwindigkeit durch diesen Wert, um den Krümmungsradius der Bahn in jenem Punkte zu finden. Indem man diesen Radius in den Zirkel nimmt, findet man den Krümmungsmittelpunkt $C_0$ in der Linie $P_0K$ senkrecht zu der gegebenen Richtung durch $P_0$; um $C_0$ beschreibe man einen kleinen Bogen $P_0P_1Q_1$, indem man $P_1Q_1$ etwa halb so lang macht, wie das zweite geplante Bogenelement. Nun berechne man die geänderte Geschwindigkeit für die Lage $Q_1$ dem Potentialgesetze gemäss und, wie zuvor für $P_0$, einen neuen Krümmungsradius für $Q_1$, indem man die normale Kraftcomponente für die geänderte Normalenrichtung und für die der Lage von $Q_1$ entsprechende Geschwindigkeit findet. Mit diesem Radius findet man die Lage des Krümmungsmittelpunktes $C_1$ in $P_1C_0L$, der Richtung des Krümmungsradius durch $P_1$, und beschreibe sofort den Bogen $P_1P_2Q_2$ u. s. w.

Als Beispiele bildet der Verf. die Bahncurven ab für:

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -yx^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -xy^2;$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\omega\dfrac{dy}{dt} - \omega^2(a+x) = -\dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\omega\dfrac{dx}{dt} - \omega^2 y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}, \end{cases}$$

in welchem zweiten Falle $V$ das Potential der Anziehungen der Sonne und der Erde auf den Mond, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit des Fahrstrahls der Erde ist, und zwar in diesem Falle eine schleifenförmige Bahncurve, wie Hr. Poincaré sie in seinen Méthodes nouvelles de la mécanique céleste S. 109 angedeutet hat.

Lp.

Lord KELVIN. Reduction of every problem of two freedoms in conservative dynamics, to the drawing of geodetic lines on a surface of given specific curvature. Brit. Ass. Rep. Edinb. LXII. 652-653.

Die Mitteilung, in Länge einer halben Druckseite, führt kurz aus, dass jeder conservative Fall einer Bewegung mit zwei Graden der Freiheit auf einen entsprechenden Fall der Bewegung eines materiellen Punktes in einer Ebene zurückführbar sei.

Lp.

---

A. B. BASSET. On the steady motion and stability of dynamical systems. Cambr. Proc. VII. 351-357.

Es soll eine Methode entwickelt werden zur Bestimmung der stetigen Bewegung und der Stabilität dynamischer Systeme mittels des Energieprincips und der „theory of the ignoration of coordinates". Nach Angabe des Verfassers ist der Gegenstand bereits von Routh (Stability and Motion, 1878) behandelt worden; inwieweit die vorliegende Behandlung von der a. a. O. befolgten abweicht, lässt sich nicht ersehen, da die Routh'sche Abhandlung dem Ref. nicht zugänglich gewesen ist. Die angewandte Methode stellt sich folgendermassen dar.

Es mögen die Coordinaten eines dynamischen Systems aus einer Gruppe $\Theta$ und einer Gruppe $\chi$ bestehen; diese letzteren seien die „ignored coordinates". Ferner sei $\varkappa$ das den Geschwindigkeiten $\dot{\chi}$ entsprechende Moment. Werden dann die Geschwindigkeiten $\dot{\chi}$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{dT}{d\dot{\chi}} = \varkappa$$

eliminirt, so wird bekanntlich die kinetische Energie des Systems die Form

$$T = \mathfrak{T} + \mathfrak{K}$$

haben, wo $\mathfrak{T}$ eine homogene quadratische Function der Geschwindigkeiten $\dot{\Theta}$ und $\mathfrak{K}$ eine ähnliche Function der constanten Momente $\varkappa$ ist. Bezeichnet nun $V$ die potentielle Energie, gemessen bei einer Configuration stabilen Gleichgewichts, so findet der Verfasser

als die Gleichungen der stetigen Bewegung

$$\frac{d\mathfrak{K}}{d\Theta} + \frac{dV}{d\Theta} = 0,$$

deren Anzahl gleich der der Coordinaten $\Theta$ ist. Als Bedingung für die Stabilität der Bewegung ergiebt sich nach dem Verfasser, dass der Ausdruck $\mathfrak{K}+V$ ein Minimum ist.

Der Verf. erläutert die Tragweite der benutzten Methode an Beispielen, im besonderen an solchen der Hydrodynamik.

Gz.

A. B. Basset. Modern dynamical methods. Nature XLVI. 516-517.

Zuerst stellt der Verf. Betrachtungen an über die verschiedenen Gestalten, in denen die kinetische Energie eines dynamischen Systems ausgedrückt werden kann; er unterscheidet die Lagrange'sche Form, die Hamilton'sche Form und eine dritte, in der Hydrodynamik vorkommende, die zuerst von Hrn. Routh, dann 1887 von ihm selbst in Cambr. Proc. aufgestellt und benutzt ist. Der Aufsatz hängt im übrigen mit der Abhandlung, welche im vorangehenden Berichte besprochen ist, eng zusammen und gipfelt in dem oben ebenfalls schon angeführten Satze: „Man eliminire alle den ignorirten Coordinaten entsprechenden Geschwindigkeiten aus dem Ausdruck für die kinetische Energie des Systems, so dass die letztere in Gliedern mit der Geschwindigkeit $\dot{\Theta}$ und den Momenten $\varkappa$ ausgedrückt ist. Es sei $\mathfrak{K}$ und $V$ derjenige Teil der gesamten Energie, die nicht von den $\dot{\Theta}$ abhängt; dann sind die Bedingungen für die stetige Bewegung die, dass $\mathfrak{K}+V$ stationär sein muss, und die stetige Bewegung ist stabil, falls diese Grösse ein Minimum ist".

Lp.

G. Pennacchietti. Sopra integrali che comprendono, come caso particolare, l'integrale delle forze vive. Palermo Rend. VI. 109-114.

Sind $n$ Massenpunkte gegeben, zwischen deren $3n$ Coordinaten $k$ Bedingungsgleichungen bestehen, so hängt das System von $3n-k=\mu$ Parametern $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_\mu$ ab. Bezeichnen die

Accente Differentiationen nach der Zeit und $T$ die totale Energie des Systems, so untersucht der Verf., unter welchen Bedingungen ein Integral von der Form

$$(3) \qquad f(t,\, q_1,\, q_2,\, \dots,\, q_\mu,\, q'_1,\, q'_2,\, \dots,\, q'_{\mu-1},\, T) = h$$

existirt, und weist nach, dass man auf die Formen

$$(6) \qquad f(t,\, q_1,\, q_2,\, \dots,\, q_\mu,\, T) = h,$$

$$(12) \qquad f(q_1,\, q_2,\, \dots,\, q_\mu,\, T) = h$$

kommt, und dass die gefundenen Bedingungen im Falle der Existenz des Integrals der lebendigen Kraft erfüllt sind.

Lp.

G. Vivanti. Su certi integrali primi delle equazioni del moto d'un punto. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 689-699.

Der Verf. untersucht in § 1, unter welcher Bedingung die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes $x''=X$, $y''=Y$, $z''=Z$ ein erstes Integral von der Form

$$(1) \qquad Ax'^2+By'^2+Cz'^2-Dy'z'-Ez'x'-Fx'y' = 2V+\text{const.}$$

besitzen, wo $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $V$ Functionen der Coordinaten $x$, $y$, $z$ des beweglichen Punktes sind. Er findet, dass jene Coefficienten die Gestalt haben müssen:

$$(7) \qquad \begin{cases} A = c_0y^2+a_1yz+b_0z^2+a_2y+a_3z+a_4, \\ B = a_0z^2+b_1zx+c_0x^2+b_2z+b_3x+b_4, \\ C = b_0x^2+c_1xy+a_0y^2+c_2x+c_3y+c_4; \end{cases}$$

$$(9) \qquad \begin{cases} D = -a_1x^2+2a_0yz+b_1xy+c_1xz+b_2y+c_3z+a_5x+a_6, \\ E = -b_1y^2+2b_0zx+c_1yz+a_1yx+c_2z+a_3x+b_5y+b_6, \\ F = -c_1z^2+2c_0xy+a_1zx+b_1zy+a_2x+b_3y+c_5z+c_6, \end{cases}$$

worin $a_5+b_5+c_5=0$ zu nehmen ist; $V$ unterliegt keiner Beschränkung.

In § 2 wird gefragt, ob zu beliebig gegebenen $X$, $Y$, $Z$ immer ein Integral von der Form (1) gefunden werden kann. Es ergiebt sich, dass bei willkürlicher Annahme von $X$ und $Y$ die dritte Componente $Z$ wenigstens teilweise bestimmt ist. Statt dessen können auch andere Voraussetzungen gemacht werden, z. B. dass

die gegebene Kraft eine constante Richtung hat (§ 3), oder dass zwei Relationen zwischen den drei Componenten stattfinden (§ 4). Bezüglich der hierher gehörigen Litteratur verweist der Verf. auf Cerruti (Collectanea math. S. 171-182), Pennacchietti (vgl. F. d. M. XVII. 1885. 873, XXIII. 1891. 934) und Bertrand (Journ. de Math. (2) II. 113-140). Lp.

G. Vivanti. Sugl' integrali delle equazioni del moto d'un punto che sono funzioni lineari fratte delle velocità componenti. Palermo Rend. VI. 127-138.

In ähnlicher Weise, wie in der Abhandlung, über welche im vorangehenden Referate berichtet ist, bestimmt der Verf. in dem vorliegenden Aufsatze die Form der Functionen $A$, $B$, ..., $H$ von $x$, $y$, falls

$$\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{Ex'+Fy'+Gz'+H}=\text{const.}$$

ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen $x''=X$, $y''=Y$, $z''=Z$ ist. Lp.

O. Staude. Ein Beitrag zur Discussion der Bewegungsgleichungen eines Punktes. Math. Ann. XLI. 219-259.

Die Gleichungen der Bewegung eines Massenpunktes im Raume seien

$$(1) \qquad x_i=\varphi_i(t) \qquad (i=1,2,3).$$

Der Verf. entwickelt die laufenden Coordinaten $\xi_i$ des beweglichen Punktes nach Potenzen von $\tau-t$, wo $t$ einen gegebenen Moment bestimmt:

$$(2) \qquad \xi_i=x_i+x_i'(\tau-t)+\tfrac{1}{2}x_i''(\tau-t)^2+\cdots \qquad (i=1,2,3),$$

und nennt die durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \xi_i=x_i+x_i'(\tau-t)$$

charakterisirte Bewegung die „Tangentialbewegung“ der Hauptbewegung (1) im Zeitpunkt $t$ mit der Geschwindigkeit $s'=\{\Sigma x_i'^2\}^{\frac{1}{2}}$, deren Richtungscosinus $x_i'/s'$ sind; ferner die durch die Gleichungen

$$(6) \qquad \xi_i=x_i+x_i'(\tau-t)+\tfrac{1}{2}x_i'^2(\tau-t)^2 \qquad (i=1,2,3)$$

bestimmte Bewegung die „Schmiegungsbewegung“ zu (1) im Zeitpunkte $t$ mit der Beschleunigung $g = \{\Sigma x_i''^2\}^{\frac{1}{2}}$, deren Richtungscosinus $x_i''/g$ sind. Die Bahn der Schmiegungsbewegung ist also eine in der Schmiegungsebene von (1) liegende Parabel, deren Beziehung zu (1) in den §§ 3-6 erörtert wird.

Da nun die analytischen Bestimmungsstücke der Schmiegungsbewegung wesentlich von den beiden ersten Differentialquotienten der Coordinaten des bewegten Punktes nach der Zeit abhängen, so können gewisse Sätze über die Bewegung aus den Differentialgleichungen hergeleitet werden, ohne dass die vollständige Integration der letzteren ausgeführt wird. Diesen Anwendungen sind die Capitel II und III gewidmet, von denen das erstere die freie, das andere die an eine Fläche gebundene Bewegung mit Kräftefunction behandelt. Beispielsweise wird der Satz aus der Theorie der parabolischen Wurfbewegung, dass die Leitlinien der Bahnparabeln aller bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit und verschiedenen Elevationen erhaltenen Bewegungen in einer und derselben Ebene liegen, auf die Bewegung eines Punktes unter Einfluss einer Kräftefunction mit entsprechenden Modificationen verallgemeinert (§ 7). Es wird ferner eine Eigenschaft der Newton'schen Centralbewegung abgeleitet, durch welche diese Bewegung als die einfachste der Centralbewegungen erscheint, in ähnlichem Sinne, wie der Kreis als die Curve der einfachsten Krümmungsverhältnisse (§ 10). Es wird weiter untersucht, wann eine Spitze der Bahncurve einer Bewegung eine völlige Umkehr der Bewegung in die bereits durchlaufene Bahn oder einen Uebergang auf einen neuen, in der Spitze sich anschliessenden Curvenzweig mit sich bringt (§§ 9, 14). Zur Erläuterung dieser letzteren Betrachtung wird ausführlich das Vorkommen einer pendelartigen Oscillation auf einer doppelt gekrümmten Bahncurve erörtert (§ 15). Lp.

P. Appell. Extension des équations de Lagrange au cas du frottement de glissement. C. R. CXIV. 331-334.

Durch die Verknüpfung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten mit dem d'Alembert'schen Principe hat Lagrange den An-

satz aller mechanischen Probleme in Gleichungen auf ein gleichmässiges Verfahren gebracht. Falls manche Punkte des Systems mit Reibung auf Oberflächen gleiten, kann man ebenfalls die Lagrange'sche Methode anwenden, wofern man zu den direct angebrachten Kräften die Reibungskräfte hinzunimmt, deren Masszahlen unbekannt sind, weil sie zu den Normalwiderständen der Oberflächen proportional sind. Der Verf. ändert die Lagrange'sche Methode so weit ab, dass er Bewegungsgleichungen erhält, die weder die Verbindungskräfte noch die Reibungskräfte enthalten. Handelt es sich z. B. um einen Punkt, der sich auf der Fläche $g(x, y, z) = 0$ mit dem Reibungscoefficienten $f$ bewegt, so hat man nach bekannter Bezeichnung:

$$\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}+X\right)\delta x+\left(-m\frac{d^2y}{dt^2}+Y\right)\delta y+\left(-m\frac{d^2z}{dt^2}+Z\right)\delta z=0,$$

ausserdem aber für die $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ folgende zwei Wertsysteme:

$$\delta_1 x=\left(y'\frac{\partial g}{\partial z}-z'\frac{\partial g}{\partial y}\right)\delta\lambda, \qquad \delta_2 x=\left(\varrho x'+fv\frac{\partial g}{\partial x}\right)\delta\lambda,$$
$$\delta_1 y=\left(z'\frac{\partial g}{\partial x}-x'\frac{\partial g}{\partial z}\right)\delta\lambda, \qquad \delta_2 y=\left(\varrho y'+fv\frac{\partial g}{\partial y}\right)\delta\lambda,$$
$$\delta_1 z=\left(x'\frac{\partial g}{\partial y}-y'\frac{\partial g}{\partial x}\right)\delta\lambda. \qquad \delta_2 z=\left(\varrho z'+fv\frac{\partial g}{\partial z}\right)\delta\lambda,$$

wo $\varrho$ für $\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ gesetzt ist. Aehnlich ist das Gleichungssystem für ein System von $n$ Punkten gebildet. Daran schliesst sich eine kurze Erörterung über eine aus den Gleichungen zu ziehende Folgerung. Lp.

P. Appell. Sur une transformation de mouvement et les invariants d'un système en mécanique. S. M. F. Bull. XX. 21-22.

P. Appell. Sur des transformations de mouvements. J. für Math. CX. 37-41.

Beide Noten schliessen sich an frühere Aufsätze über dasselbe Thema an (Cf. Appell, American J. XII u. XIII, C. R. CVIII, F. d. M. XXI. 1889. 904 u. XXII. 1890. 900; Goursat und Dar-

boux, C. R. CVIII, F. d. M. XXI. 1889. 906; Dautheville, Ann. de l'Éc. Norm. (3) VII, F. d. M. XXII. 1890. 896; Stäckel, J. für Math. CVII, F. d. M. XXIII. 1891. 932). In der ersten Note wird „summarisch" die Bedingung dafür ausgesprochen, dass bei Abwesenheit von Kräften die in diesem Falle „geodätisch" genannte Bewegung eines Systems von Massenpunkten in eine ebensolche Bewegung eines zweiten Systems transformirt werden kann. Der zweite Aufsatz zeigt den zu diesem Resultate führenden Gedankengang etwas vollständiger, so dass man am Schlusse des ersten Paragraphen zunächst den allgemeinen Satz erhält: Man kann auf unendlich viele Arten jeder Bewegung des einen der Systeme bei Einwirkung von Kräften, die von den Lagen und Geschwindigkeiten abhängen, eine analoge Bewegung des anderen zuordnen. Der zweite Paragraph giebt dann die Bedingungen wieder, unter denen die zugeordneten Bewegungen geodätisch sind, und weist unter Bezugnahme auf die Stäckel'sche Abhandlung und auf die inzwischen veröffentlichten Mitteilungen der Herren Painlevé und Liouville (vgl. das folgende Referat) auch auf die älteren Arbeiten hin, in denen das Thema berührt worden ist. Ueber die Invarianten, deren Gleichheit die Transformation der geodätischen Bewegung ermöglicht, werden weitere Veröffentlichungen in Aussicht gestellt. Lp.

---

P. Painlevé. Sur les transformations en mécanique. C. R. CXIV. 901-904, 1104-1107, 1412-1414.

P. Painlevé. Sur les intégrales de la dynamique. C. R. CXIV. 1168-1171.

P. Painlevé. Sur les transformations des équations de Lagrange. C. R. CXV. 495-498.

P. Painlevé. Sur la transformation des équations de la dynamique. C. R. CXV. 714-717.

P. Painlevé. Rectification d'une faute d'impression dans une communication sur les équations de la dynamique. C. R. CXV. 874-875.

R. Liouville. Sur un problème d'analyse qui se rattache aux équations de la dynamique. C. R. CXIV. 974-977, CXV. 403-406.

R. Liouville. Sur les équations de la dynamique. C. R. CXIV. 1171-1172, CXV. 646-648, 792-793.

Die Reihe der vorliegenden, unter einander zusammenhängenden Noten wird durch eine Mitteilung des Hrn. Painlevé eröffnet, in welcher er die folgende Aufgabe behandelt. Es seien $T(q'_1, \dots, q'_k, q_1, \dots, q_k)$ und $T_1(q_1, \dots, q_k, q'_1, \dots, q'_k)$ zwei quadratische Formen der Variabeln $q'_i$, deren Discriminanten $\Delta$ und $\Delta_1$ von Null verschieden sind; ferner seien $Q_i$, $Q'_i$ beliebige Functionen der $q_1, q_2, \dots, q_k$. Man setzt die Lagrange'schen Gleichungen an ($i = 1, 2, \dots, k$):

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad q'_i = \frac{dq_i}{dt};$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q'_i, \quad q'_i = \frac{dq_i}{dt_1}.$$

Aus einem gegebenen Systeme (1) alle Systeme (2) so zu bilden, dass die durch (1) und durch (2) zwischen den $q_i$ definirten Beziehungen zusammenfallen. Wenn alle $Q_i$ Null sind (und ebenso dann auch die $Q'_i$), so kann man vom Systeme (1) zu (2) durch die Transformation übergehen:

$$(5) \qquad \frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{k+1}}} = C\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{k+1}}}.$$

Wenn $T$ und $T_1$ diesen Bedingungen genügen, so entsprechen beliebigen Functionen $Q_i$ derartige Functionen $Q'_i$, dass die Systeme (1) und (2) dieselben Beziehungen zwischen den $q_i$ definiren, und man gelangt immer noch von (1) zu (2) durch die Transformation (5). Lässt man im allgemeinen Falle zwei Transformationen unberücksichtigt, die bei jedweder Form von $T$ anwendbar sind, so kann es keine Gleichungen (2) geben, die der Aufgabe entsprechen, wofern nicht das Problem der Geodätischen in Bezug auf $T$ ein Integral zweiten Grades zulässt. Hr. Liouville, dessen Note „Sur un problème d'analyse qui se rattache aux équations de la dynamique" (C. R. CXII, F. d. M. XXIII. 1891. 934) im Gebiete zweier

Variabeln eine verwandte Frage behandelt hatte, geht nun in dem gleich betitelten neuen Aufsatze mit einer Methode, die von der des Hrn. Painlevé ganz verschieden ist, auf die Behandlung des folgenden Problems ein: Wenn ein Massensystem der Einwirkung von Kräften unterliegt, die ein Potential haben, und wenn die Lage des Systems durch die Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$ in einem beliebigen Augenblicke bestimmt wird, so kann man die Differentialgleichungen, welche die Bahncurven der einzelnen Punkte bestimmen, in die Gestalt setzen:

$$(1^*) \qquad dx_i d^2 x_k - dx_k d^2 x_i = \sum_{(hh')} (p_{hh'}^{(k)} dx_i - p_{hh'}^{(i)} dx_k) dx_h dx'_h .$$

Ein Gleichungssystem vom Typus (1*) gehört nicht immer zu den Bahncurven eines Massensystems. Die hierzu notwendigen Bedingungen folgen aus dem Theorem: Damit die Gleichungen (1*) die Bahncurven der Punkte eines Massensystems definiren, das der Einwirkung von Kräften unterliegt, die ein Potential haben, genügt es und ist notwendig, dass die $\frac{1}{2}m(m-1)(m+2)$ folgenden Gleichungen:

$$(2^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f_{i2}}{\partial x_{i'}} - 2\Sigma_h p_{hi'}^{(i)} f_{i1} = 0 = \dfrac{\partial f_{ik}}{\partial x_{i'}} - \Sigma_h (p_{hi'}^{(k)} f_{ih} + p'_{hi} f_{hk}), \\ \dfrac{\partial f_{i2}}{\partial x_{i'}} - 2\dfrac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} - 2\Sigma_h (p_{ih}^{(i)} f_{ih} - p_{kh}^{(k)} f_{ih} - p_{hk}^{(i)} f_{hk}) = 0 \end{cases}$$

von den $\frac{1}{2}m(m+1)$ Unbekannten $f_{i2}$, $f_{ik}$, die in ihnen linear vorkommen, befriedigt werden. Ist dies der Fall, so sei $\varDelta$ die symmetrische Determinante der $f_{i,k}$; dann stellt die quadratische Form

$$(3^*) \qquad 2T = \Sigma_{ik} \frac{\partial \varDelta}{\varDelta^2 \partial f_{ik}} dx_i dx_k$$

die lebendige Kraft der durch (1*) definirten Bewegungen dar, und das entsprechende Integral zweiten Grades ist $2T = \text{const.}$ Es kann geschehen, dass die Gleichungen (2) mehrere verschiedene Lösungen haben. Bezeichnet man dann mit $f_{ik}^0$ die Functionen, welche ein zweites den Gleichungen (2*) genügendes System bilden, mit $\varDelta^0$ die mit $\varDelta$ analoge Determinante, so ist das Verhältnis

$$(4^*) \qquad \Sigma \frac{\partial \varDelta}{\partial f_{ik}} dx_i dx_k : \Sigma \frac{\partial \varDelta^0}{\partial f_{ik}^0} dx_i dx_k$$

gleich einer Constante und liefert ein Integral der Differentialgleichungen der Bahnlinien. Dies ist aber eine andere Form des Painlevé'schen Satzes. Hr. Liouville schliesst an seine Untersuchung noch einige neue Folgerungen an. Hr. Painlevé giebt dann in seiner nächsten Note Bemerkungen und Verallgemeinerungen zu den Betrachtungen in seiner ersten Mitteilung; das Problem formulirt er von neuem so:

Ist ein System Lagrange'scher Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{dq_i'}\right) - \frac{\partial T}{dq_i} = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k) \qquad \left(q_i' = \frac{dq_i}{dt}\right)$$

gegeben, so soll man alle Systeme

$$\text{(B)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial r_i'}\right) - \frac{\partial T'}{\partial r_i} = Q_i'(r_1, r_2, \ldots, r_k) \qquad \left(r_i' = \frac{dr_i}{dt}\right)$$

bilden, so dass die durch (B) definirten Beziehungen zwischen den $r_i$ sich aus den durch (A) definirten Beziehungen zwischen den $q_i$ durch eine Vertauschung der Variabeln

$$\text{(C)} \qquad q_i = \varphi_i(r_1, \ldots, r_k)$$

herleiten lassen. Zugleich beginnt mit dieser Note über die Tragweite und Richtigkeit der von Hrn. Liouville aufgestellten Sätze ein Streit, in dem jeder der beiden Autoren zunächst genötigt ist, die eigenen, zuerst etwas aphoristisch gehaltenen Darstellungen zu ergänzen und zu erläutern. Besonders in der Note S. 495-498 thut dies Hr. Painlevé und fasst hier seine Ansicht in der Stelle zusammen: „Hr. Liouville glaubte dieses Theorem ebenfalls gefunden und vervollständigt zu haben, in dem Falle, dass $U$ existirt, vermöge einer Methode, die in Wahrheit nur auf den Fall sich anwenden liess, in welchem die Kräfte Null sind. ... Hr. Liouville versichert von neuem, es sei sehr leicht, mein Theorem in allen Fällen zu vervollständigen, in denen eine Kräftefunction $U$ besteht. Wenn nach ihm das System (1) ein correspondirendes zulässt, so lässt das Problem der Geodätischen in Bezug auf $T$ ein vollständiges System von Integralen zweiten Grades zu. Dieser Satz ist nicht genau. Zu seinem Beweise bemerken wir, dass Hr. Liouville a priori die Existenz von $U_1$ mit der von $U$ annimmt, was im allgemeinen nicht richtig ist. Aber selbst in dem Falle, wo es sich so verhält, ist die Schlussweise des Hrn. Liouville unzulässig,

weil er annimmt, dass die Bahnlinien, die einem gegebenen Werte ($\infty$) von $h$ entsprechen, auch einem constanten Werte von $h'$ entsprechen, was nur vermittelst ganz besonderer Annahmen gilt." Dies erläutert Hr. Painlevé an einem Beispiele mit zwei Variabeln, und als Hr. Liouville dieses ausgeschlossen wissen will, durch eins mit dreien.

Nicht in unmittelbarem Zusammenhange mit dieser Streitfrage, wohl aber innerlich damit verknüpft steht die Note des Hrn. Painlevé „Sur les intégrales de la dynamique"; in derselben verallgemeinert der Verf. den Satz des Hrn. Darboux (F. d. M. XXI. 1889. 907): Wenn man das Problem der Bewegung eines Punktes $M$ auf einer Oberfläche für eine gewisse Kräftefunction lösen kann, so kann man auch die Geodätischen dieser Oberfläche bestimmen. Ebenso beschäftigt sich Hr. Liouville in der Note „Sur les équations de la dynamique" mit der Frage des Zusammenhanges der Dynamik und der Theorie der Geodätischen einer Oberfläche. Lp.

---

C. H. C. Grinwis. De kinetische energie der centrale beweging. Amst. Versl. en Meded. (3) IX. 211-225.

Zerlegt man bei einer centralen Bewegung eines materiellen Punktes die Geschwindigkeit nach der Richtung des Radiusvectors und senkrecht zu derselben, so kann für die beiden Componenten die Grösse der kinetischen Energie aufgestellt werden. Das Verhältnis dieser Componenten bei einer parabolischen und einer elliptischen Bahncurve wird untersucht. Merkwürdige Punkte dieser Curve. Bestimmnng der Grösse $A = 2\int T dt$ („action" nach Hamilton), wo $T$ die kinetische Energie bedeutet, und der mittleren kinetischen Energie. Bei elliptischer Bewegung mit constanter grosser Axe ergiebt sich, dass jene Grösse $A$ unabhängig von der Excentricität der Bahn ist. Mo.

E. Ritter. Bewegung eines materiellen, mit Elektricität geladenen Teilchens unter Einwirkung eines ruhenden Centrums bei Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes. Schlömilch Z. XXXVII. 8-24.

Das behandelte Problem ist ein rein mechanisches. Die Kräftefunction des Weber'schen Gesetzes:

$$V = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r}\left(1 + \frac{r'^2}{c^2}\right)$$

giebt in der Richtung des Fahrstrahles $r$ die folgende wirksame Kraft:

$$R = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial r'}\right) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2 - 2rr''}{c^2}\right).$$

Mithin werden die Componenten der Kraft nach den Coordinatenaxen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X = -\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) = R \cdot \frac{x}{r},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y = -\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right) = R \cdot \frac{y}{r},$$

oder in Polarcoordinaten $r$, $\varphi$:

$$m(r'' - r\varphi'^2) = R = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2 - 2rr''}{c^2}\right),$$

$$m(r\varphi'' + 2r\varphi') = 0.$$

Der Verf. stellt die ersten Integrale dieser Bewegungsgleichungen auf, nämlich das Princip der Erhaltung der Energie und das der Flächen, und discutirt an der Hand derselben die möglichen Formen der Bahnen; die Ergebnisse sind durch zwei Figurentafeln erläutert. Von der früheren Litteratur über den Gegenstand werden citirt: 1) Seegers, De motu perturbationibusque planetarum secundum legem Weberianum solem ambientium, Diss. Göttingen, 1864. 2) Tisserand, Sur le mouvement des planètes autour du Soleil d'après la loi électrodynamique de Weber, C. R. LXXV, 1872. 3) Riecke, Ueber Molecularbewegung zweier Teilchen, deren Wechselwirkung durch das Weber'sche Gesetz bestimmt wird, Götting. Nachr. 1874. 4) Lolling, Ueber Bewegungen elektrischer Teilchen nach dem Weber'schen Grundgesetz der Elektrodynamik, Diss. Göttingen 1882 und Nova Acta Leopoldina XLIV. Während in der letzten Arbeit, welche die umfassendste Darstellung des Gegenstandes bietet, die zweiten Integrale durch elliptische Transcendenten ausgedrückt und der Discussion zu Grunde gelegt sind, ist

Hr. Ritter bloss mit Hülfe der ersten Integrale zu einer erschöpfenden qualitativen Untersuchung aller Bewegungsformen gelangt, hat sogar einige Unvollständigkeiten der Lolling'schen Arbeit beseitigt und ergänzt. Lp.

A. DE SAINT-GERMAIN. Mouvement d'un point attiré par un point fixe suivant la loi de Newton. Nouv. Ann. (3) XI. 89-97.

Der Verf. nimmt das von Cellérier in Darboux Bull. (2) XV (F. d. M. XXIII. 1891. 942) behandelte Problem der Bewegung eines Punktes auf, welcher einer Newton'schen Centralkraft und der Schwerkraft unterworfen ist, weil „die Analyse des gelehrten Genfers sehr scharfsinnig, aber schwer wieder zu finden und nachzubilden ist". Da das Problem zu denen gehöre, deren Lösung mit bemerkenswerter Leichtigkeit mit Hülfe der Gleichungen von Hamilton und Jacobi erhalten werde, so entwickele er sie unter diesem Gesichtspunkte mit Ergänzungen einiger Ergebnisse bei Cellérier. Lp.

F. FOLIE. Un corollaire inédit des lois de Kepler. Belg. Bull. (3) XXIV. 542-543.

Der Umfang einer Ellipse ist $u = 2\pi a(1-E)$, wo $E$ von der Excentricität abhängt und mit ihr Null wird. Ist $V_m$ die mittlere Geschwindigkeit eines Planeten, $\tau = c.a^{\frac{3}{2}}$ seine Umlaufszeit, so ist:

$$V_m = \frac{u}{\tau} = \frac{2\pi}{c} a^{-\frac{1}{2}}(1-E).$$

Für $E = 0$ ist diese Formel von Hrn. Dewar empirisch gefunden worden. Lp.

KARL HABART. Charakter und Darstellung der Büschel von Wurfcurven constanter Wurfkraftrichtung. Pr. Staatsrealschule Elbogen 1891/92. 13 S. 8°.

Wenn bei dem parabolischen Wurfe der Abgangswinkel constant gehalten, die Anfangsgeschwindigkeit aber geändert wird, so erhält man eine Schar von Parabeln, deren Haupteigenschaften

schon öfter untersucht sind (vgl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Aufl. 1870, S. 252). Ohne einen Vorgänger zu nennen, stellt der Verf. eine Reihe von Sätzen über diese Parabelschar auf. Lp.

---

A. Schülke. Eine Herleitung des Newton'schen Gesetzes für Gymnasien. Hoffmann Z. XXIII. 241-249.

Ableitung des Newton'schen Gravitationsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen mit den Hülfsmitteln der analytischen Geometrie der Ebene. Lp.

---

J. Hundhausen. Ein Beitrag zu der Lehre von der Centrifugalbewegung. Wolf Z. XXXVII. 162-166. Lp.

---

A. Leduc. Démonstration de la formule du pendule simple avec terme correctif. Almeida J. (3) I. 390-393.

Zwei Beweise der bekannten Näherungsformel:

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Lp.

---

Karl Völker. Die Centralbewegung. Pr. Realsch. Hedwigstrasse Cassel. 36 S. [Ref. von M. Koppe in Poske Z. VI. 106.]

Lp.

---

Elliot. Sur le mouvement d'un point matériel dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse. C. R. CXV. 1262-1264; Ann. de l'Éc. Norm. (3) X. 231-252. (1893.)

Die in den C. R. erschienene Note ist ein Auszug aus der in den Ann. de l'Éc. Norm. des folgenden Jahres veröffentlichten Abhandlung, über welche wir daher gleichzeitig berichten.

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Punktes von der Masse 1 unter der Einwirkung von Kräften, die ein Potential $U$ besitzen, das nur von den Coordinaten des Massenpunktes

abhängt, sind, wenn ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand vorhanden ist:

$$(1)\qquad \frac{d^2x_i}{dt^2}+k\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial U}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Führt man mittels der Gleichungen $x_i=\varphi_i(q_1,q_2,q_3)$, wo die $\varphi_i$ die Zeit nicht enthalten, die Veränderlichen $q_i$ statt der $x_i$ ein, so gehen die Gleichungen (1) über in

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_h}\right)+k\frac{\partial T}{\partial q'_h}-\frac{\partial T}{\partial q_h}=\frac{\partial U}{\partial q_h}\qquad (h=1,\ 2,\ 3).$$

Der Verf. bringt nun (4) auf die kanonische Form, d. h. er führt eine derartige Vertauschung der Variabeln aus, dass diese Gleichungen mit denen der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung zusammenfallen, von der man nach der Jacobi'schen Methode nur ein vollständiges Integral zu finden braucht, um die endlichen Bewegungsgleichungen hinzuschreiben. Durch die Substitution $p_h=e^{kt}.\partial T/\partial q'_h$ erhält man aus (4):

$$(7)\qquad \frac{dp_h}{dt}=e^{kt}\frac{\partial(T-U)}{\partial q_h}\quad \text{und}\quad (8)\quad \frac{dq_h}{dt}=e^{kt}\frac{\partial(T-U)}{\partial p_h}.$$

Die Gleichungen (7) und (8) bilden ein kanonisches System. Es sei $n$ die Anzahl der Variabeln $q_h$; dann hat $n$ den Wert 3 bei der Bewegung eines freien Punktes, 2 oder 1, wenn der Punkt auf einer Oberfläche oder auf einer Curve bleiben muss. Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t}+e^{kt}(T-U)=0,$$

in welcher die $q'_h$ mittels der $p_h$ ausgedrückt sind, die $p_h$ selbst durch $\partial V/\partial q_h$ ersetzt werden, enthält die $n+1$ unabhängigen Variabeln $t,\ q_1,\ \ldots,\ q_n$, dagegen nicht die Function $V$. Hat man ein vollständiges Integral derselben:

$$V(t,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n)$$

mit $n$ willkürlichen Constanten $\varepsilon_i$ gefunden, so werden die $q_h$ durch die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_i}=\varepsilon'_i\qquad (i=1,\ \ldots,\ n)$$

mit den neuen Constanten $\varepsilon'_i$ bestimmt.

Für den Fall des freien Punktes setze man $V = e^{kt} . W$; dann folgt

$$(9) \qquad \frac{\partial W^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial W^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial W^2}{\partial x_3^2} + 2kW - 2U = 0.$$

Bei der Bewegung auf einer Oberfläche mit dem Linearelemente $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$ wird

$$(11) \qquad \frac{G\frac{\partial W^2}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} + E\frac{\partial W^2}{\partial v^2}}{EG - F^2} + 2kW - 2U = 0.$$

Auf einer Curve endlich ($ds^2 = Edu^2$) ist

$$(12) \qquad \frac{1}{E} \cdot \frac{dW^2}{du^2} + 2kW - 2U = 0.$$

Nach Erledigung dieser allgemeinen Betrachtung geht der Verfasser auf einige Fälle über, in denen man die partielle Differentialgleichung integriren kann, und zwar zunächst für die Bewegung auf einer Curve, wobei einige frühere Untersuchungen des Verfassers und des Hrn. Appell über die Integrabilität von Differentialgleichungen benutzt werden. Darauf wird die Bewegung in einer Ebene genauer erforscht. Hier, wie im vorigen Falle ergeben sich solche Kraftgesetze, bei denen die Integration der Differentialgleichung ausführbar ist. Aehnlich wie bei Jacobi wird die Verwandtschaft dieser Probleme mit dem der Aufsuchung geodätischer Linien beleuchtet. Die einzelnen Fälle sowohl centraler als nicht centraler Kräfte müssen in der Arbeit selbst nachgelesen werden.

In einem Schlussparagraphen wird noch kurz die Behandlung der Aufgabe für abwickelbare Oberflächen erläutert.

Eine Frucht der Arbeit ist demnach darin zu erblicken, dass durch die der Jacobi'schen Methode nachgebildete Betrachtungsweise des Verfassers einzelne schon bekannte Fälle der Integrabilität der Differentialgleichungen des Problems unter ein allgemeines Gesetz gestellt sind und neue Fälle sich ergeben haben.

Lp.

---

**Hj. Tallqvist.** Einige Anwendungen der Theorie der elliptischen Functionen auf Aufgaben der Mechanik. Öfv. af Finska Vetenskaps Soc. Förhandlingar XXXIV. 163-184. (1891-92.)

1) Ein Punkt ist gezwungen, sich auf einem Kreise zu bewegen. Auf denselben wirkt eine Centralkraft, deren Centrum in der Ebene des Kreises liegt, und deren Grösse constant bleibt. Wann kann die Bewegung des Punktes mittels elliptischer Functionen ausgedrückt werden? 2) Bewegung eines Punktes auf der Axe einer mit Masse gleichförmig belegten Kreisperipherie, welche den Punkt nach dem Newton'schen Gesetze anzieht. 3) Specielle Fälle der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Hyperbel mit verticaler Hauptaxe. Die Aufgaben 1) und 3) führen, allgemein gestellt, auf hyperelliptische Integrale, bei denen Quadratwurzeln aus Polynomen fünften Grades in der Veränderlichen vorkommen. Durch geeignete Wahl der Constanten für die Anfangsbedingungen werden zwei Factoren der Polynome gleich gemacht. Die weitere Behandlung aller drei Aufgaben benutzt die Weierstrass'schen $\wp$- und $\sigma$-Functionen. In einigen, den betrachteten Problemen beigefügten, numerischen Beispielen wird von den Jacobi'schen $\vartheta$-Functionen Gebrauch gemacht. Lp.

---

**G. Pennacchietti.** Sul moto brachistocrono d'un sistema qualunque di punti materiali. Palermo Rend. VI. 52-62, Atti dell'Acc. Gioenia di Scienze naturali in Catania (4) V. 12 S.

Im ersten Paragraphen werden die Differentialgleichungen der brachistochronen Bewegung eines materiellen Systems mit beliebig gegebenen Verbindungen aufgestellt; man vergleiche hierzu die Referate über die beiden Arbeiten des Verfassers „Sulle curve brachistocrone" und „Sul moto brachistocrono" in F. d. M. XXIII. 1891. 946ff. Daraus werden in § II die Formeln für die brachistochrone Bewegung eines starren Systems hergeleitet; in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen $x'$, $y'$, $z'$ gehen diese Formeln über in

$$(7) \qquad A\frac{dp}{dt}-(B-C)qr-\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}Ap=-M_{x'},$$

nebst den beiden entsprechenden, wo $M_{x'}$ das Moment der ein-

wirkenden Kräfte in Bezug auf die $x'$-Axe bedeutet, die anderen Bezeichnungen die allgemein üblichen sind. In § III wird der besondere Fall betrachtet, dass das Moment der Kräfte in Bezug auf einen gegebenen Punkt verschwindet; in § IV endlich wird angenommen, dass alle Kräfte eine durch den Schwerpunkt gehende Resultante haben. Die Ergebnisse werden in mehreren Sätzen ausgesprochen, von denen wir aus § III anführen: „Bei der brachistochronen Bewegung eines unveränderlichen Systems, in welchem das Moment der einwirkenden Kräfte bezüglich eines gegebenen Punktes Null ist, hat das geometrische Moment der Bewegungsgrössen constante Richtung und ist der Grösse nach zur kinetischen Energie proportional. Die Normalebene zu dem geometrischen Momente der Bewegungsgrössen oder die Ebene des resultirenden Paares der Bewegungsgrössen ist diejenige, für welche die Summe der Projectionen der von den Fahrstrahlen in einem gegebenen Zeitraume beschriebenen Flächen, multiplicirt mit den Massen der bezüglichen beweglichen Punkte, einen Maximalwert hat.“ „Bei der Bewegung eines materiellen Punktes unter der Einwirkung einer Kraft, deren Wirkungslinie durch einen festen Punkt geht, ist die Geschwindigkeit dem vom festen Punkte auf die Richtung der Geschwindigkeit gefällten Lote proportional“. Lp.

---

## P. Appell. Du tautochronisme dans un système matériel.

C. R. CXIV. 996-998.

Man denke sich ein System mit Verbindungen, die von der Zeit unabhängig sind, unter der Einwirkung bekannter Kräfte. Die Lage des Systems sei durch $k$ von einander unabhängige Parameter $q_1, q_2, \dots, q_k$ bestimmt. Das vom Verf. aufgestellte Problem, zu dessen Lösung der Weg angegeben wird, lautet: Welche neuen Verbindungen in der Anzahl $k-1$ muss man dem System auferlegen, damit das so erhaltene System mit vollständigen Verbindungen „tautochron“ sei, d. h. dieselbe Zeit brauche, um zu einer bestimmten Lage zu kommen, welches auch immer die Anfangslage ist, in welcher man es ohne Geschwindigkeit sich selbst überlässt? Hierzu ist notwendig und hinreichend, dass die $q_i$ die

beiden Gleichungen befriedigen:

$$\sqrt{\Sigma a_{ij} q_i q_j} = ds,$$
$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \cdots + Q_k dq_k = -\mu s ds,$$

deren zweite auf der linken Seite den Ausdruck der lebendigen Kraft enthält, während in der ersten die $a_{ij}$ die Coefficienten der lebendigen Kraft darstellen:

$$2T = \Sigma a_{ij} q_i' q_j' \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Da zur Bestimmung der $q_i$ nur zwei Gleichungen vorhanden sind, muss man $k-2$ widerspruchslose Beziehungen zwischen den $q_i$ und $s$ hinzunehmen. Lp.

---

A. Legoux. Sur les courbes synchrones. Toulouse Ann. VI B. 1-16.

In Euler's Mechanik wird die Aufgabe gestellt: Es sei eine Schar ähnlicher Curven gegeben, die von einem festen Punkte $A$ ausgehen; eine Curve $CMM$ zu finden, die auf allen diesen Curven solche Bogen $AM$ bestimmt, welche von einem von $A$ ohne Anfangsgeschwindigkeit auf ihnen hinabgleitenden schweren Punkte in gleichen Zeiten durchlaufen werden. Ist die gegebene Curvenschar ein Strahlenbüschel mit $A$ als Mittelpunkt, so ist die „synchrone Curve“, wie bekannt, ein durch $A$ gehender Kreis. Der Verf. behandelt zunächst nach einer eigenen Methode die drei bereits bei Euler stehenden Beispiele, in denen die Curvenschar aus Geraden, Kreisen und Cykloiden besteht; dann geht er zu dem Falle der Centralkräfte über und entwickelt schliesslich eine allgemeine Formel, welche alle vorangehenden Fälle umfasst. Die Gleichung der Curvenschar sei

$$(1) \qquad x = af_1(u), \quad y = af_2(u),$$

wo $a$ der Parameter der Schar ist; die Kräftefunction sei homogen in $x$, $y$:

$$(2) \qquad \varphi(x,\, y) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a^m f_1{}^m \varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right).$$

Setzt man

$$\int \frac{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{1}{2}}\, du}{f_1^{\frac{1}{2}m} [\varphi \left[\varphi\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \psi(u),$$

so ergiebt sich

(4) $$a^{1-\frac{1}{2}m}\psi'(u)du+(1-\tfrac{1}{2}m)a^{-\frac{1}{2}m}\psi(u)da=0.$$

Die Gleichungen der synchronen Curve folgen durch Elimination von $a$ aus (1) und (4). Nach einer ähnlichen Methode sind auch die synchronen Curven auf krummen Oberflächen erhältlich, wie insbesondere für die von einem Punkte ausgehenden geodätischen Curven durchgeführt und an dem Beispiele der Bour'schen „Alysseïde" erläutert wird. Lp.

---

G. Susloff. Bewegung im geodätischen Kreise. Kiew Nachr. XXXII. 1-6. (Russisch.)

Der Verf. beschäftigt sich mit der Frage, in welchem Falle eine Bewegung angezeigter Art bei einem materiellen Punkte möglich sei. Darauf drückt er die Bewegung durch die Parameter der Geschwindigkeit und der bewegenden Kraft aus, falls sie senkrecht auf dem Wege steht, und untersucht die Stabilität einer solchen Bewegung in einer Fläche, welche auf eine Rotationsfläche aufwickelbar ist. Jk.

---

O. Staude. Ueber die Bahncurven eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes, welche infinitesimale Transformationen zulassen. Leipz. Ber. XLIV. 429-446.

Die Abhandlung entwickelt in § 1 die von der Zeit freie Differentialgleichung zweiter Ordnung der Bahncurve des bewegten Punktes und untersucht in den §§ 2 und 3 die Bedingungen dafür, dass diese Differentialgleichung bei einer infinitesimalen Transformation invariant bleibt. Diese Betrachtungen sind mit geringen Abweichungen den Lie'schen Untersuchungen über die Bahncurven der Trägheitsbewegung nachgebildet. Dagegen enthalten die §§ 4 und 5 weitere Folgerungen, welche gerade für die allgemeinere Bewegung unter Einfluss einer Kräftefunction von Wichtigkeit sind. In § 6 wird endlich eine Anwendung auf die Bewegung eines Punktes in der Ebene unter Einfluss einer Kräftefunction angeschlossen. Aus § 3 führen wir den Satz an: „Ein Punkt bewegt sich unter Einfluss einer Kräftefunction, die keine Constante

ist, auf einer Oberfläche. Wir betrachten die $\infty^2$ Bahncurven der Bewegung, welche einem bestimmten Werte der Constante $h$ entsprechen. Sollen diese $\infty^2$ Curven, unabhängig von $h$, eine infinitesimale Transformation gestatten, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass auf der Fläche ein isothermes Coordinatensystem $u$, $v$ existirt, in welchem sich das Quadrat des Linienelementes in der Form $ds^2 = e^{2av + 2\varphi(u)}(du^2 + dv^2)$ darstellt, während die Kräftefunction die Form $H(u)$ hat. Diese infinitesimale Transformation selbst stellt sich in diesem System durch das Symbol $Tf = \partial f/\partial v$ dar, so dass ihre Bahncurven $u =$ const. mit den Niveaulinien $H(u) =$ const. zusammenfallen". Aus § 5: „Es können nur solche Niveaulinien Bahncurven der Bewegung des Punktes sein, längs deren die Richtung der in die Fläche fallenden Kraftcomponente mit der Richtung des Radius der geodätischen Krümmung übereinstimmt". Lp.

---

O. Staude. Ueber das Foucault'sche Pendel. Naturf. Ges. Rostock 1892. 51-58.

Unter Bezugnahme auf die üblichen Darstellungen des Gegenstandes (vergl. die Werke von Kirchhoff, Schell, Voigt, Budde) ergänzt der Verf. dieselben in mehreren Punkten. Zuerst bewerkstelligt er eine anschauliche Sonderung der verschiedenen Teile der gebräuchlichen Theorie in zwei Hauptteile. Der eine besteht in der vom Coriolis'schen Theorem ausgehenden und auf gewissen Vernachlässigungen beruhenden Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung des Pendels und der ebenfalls unter gewissen Vernachlässigungen ermöglichten Ableitung der ersten Integrale für die Projection der Bewegung auf die Horizontalebene; der andere vergleicht diese Projection mit der relativen harmonischen Centralbewegung und hat seine Basis in dem Satze: Die gewöhnlichen Vernachlässigungen, die man beim Foucault'schen Pendel einführt, haben zur Folge, dass die Projection der Bewegung des Pendels auf die Horizontalebene übereinkommt mit der an demselben Orte beobachteten relativen Centralbewegung eines an die Horizontalebene gebundenen schweren Punktes mit der Grösse $gr/l$ der anziehenden Centralkraft. In dem letzten Paragraphen endlich wird gezeigt,

dass die Mannigfaltigkeit aller relativen harmonischen Centralbewegungen sich vollständig deckt mit der Mannigfaltigkeit der Resultanten zweier gleichförmigen Kreisbewegungen. Da die letzteren als Bahnlinien Epi- und Hypotrochoiden ergeben, so gilt das Gleiche von der auf die Horizontalebene projicirten Bewegung des Foucault'schen Pendels. (Vergl. Weihrauch, Exner Rep. XXII, F. d. M. XVIII. 1886. 865.) Lp.

---

DE SPARRE. Sur le développement en série des formules du mouvement du pendule conique et sur quelques propriétés de ce mouvement. Brux. S. sc. XVI B. 181-202.

GILBERT et DE TILLY. Rapports sur ce mémoire. Ibid. A. 1-2, 77-78.

Neue Lösung mit Hülfe von Reihen, wodurch die von Puiseux ermittelte Eigenschaft bezüglich der Azimute des Pendels für ein Maximum und das folgende Minimum des Ausschlages in die Augen springt. Ausserdem wird man dadurch in den Stand gesetzt, vollständiger, als dies früher geschehen ist, die Frage nach den Wendepunkten zu behandeln, mit welchen die Horizontalprojection der durch den Endpunkt des Pendels beschriebenen Curve behaftet sein kann. Mn. (Lp.)

---

DE SPARRE. Sur le mouvement du pendule conique à tige. C. R. CXIV. 528-530.

Halphen hat die Bemerkung gemacht, dass die Horizontalprojection der vom konischen Pendel beschriebenen Curve Wendepunkte besitzen kann, und dass diese Punkte denjenigen entsprechen, für welche der Druck des Massenpunktes auf die Kugel Null ist. Der Verf. zeigt, dass diese Eigenschaft aus dem allgemeinen Satze fliesst: Ein Punkt sei genötigt, sich auf einer Oberfläche zu bewegen, und unterliege dabei der Einwirkung einer Kraft von constanter Richtung. Man betrachte die Projection der Bahnlinie auf eine zur Richtung der Kraft senkrechte Ebene. Diese Projection hat erstens Wendepunkte, die einem Nulldrucke des Massenpunktes auf die Oberfläche entsprechen. Zweitens hat sie solche, wenn bei

nicht verschwindendem Drucke die Schmiegungsebene der Bahncurve senkrecht zur Oberfläche ist und die Kraft enthält.

Lp.

---

E. Koebke. Beiträge zur Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche. Diss. Halle, Berlin. L. Simion. 46 S. 8°.

Der Verf. discutirt im ersten Paragraphen das Jacobi'sche Problem der Bewegung eines Punktes auf einer beliebigen Rotationsfläche für den Fall, dass eine Kräftefunction besteht, welche die Zeit nicht enthält und in den Parallelkreisen constant ist, wenn die Schwerkraft als einzig wirkende Kraft angenommen ist. Im wesentlichen werden hierbei die bezüglichen Betrachtungen wiederholt, welche Hr. Stäckel in seiner Dissertation (F. d. M. XVII. 1885. 881) über die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche angestellt hat; auch die Untersuchungen des Hrn. Staude (u. a. Acta Math. XI, F. d. M. XX. 1888. 937) werden dabei benutzt. Die folgenden Paragraphen wenden sich der Bearbeitung zweier speciellen Probleme zu. Für den Fall der reibungslosen Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einer Rotationsfläche mit verticaler Axe hat Hr. Kobb (Acta Math. X, F. d. M. XIX. 1887. 949) gezeigt, dass bei fünf verschiedenen Flächen die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung auf elliptische Transcendenten führt. Ist die $z$-Axe vertical, $r^2 = x^2+y^2$, so sind die Gleichungen der beiden letzten Flächen:

$$(1)\quad 3ar^2+z^2(z-a) = 0, \qquad (2)\quad 2r^4+3a^2r^2-2a^3z = 0.$$

Da für dieselben bisher die Specialuntersuchung noch nicht gemacht worden war, so behandelt der Verf. das Problem allgemein in § 3 für (1), in § 4 für (2). Die §§ 5, 6, 7 erledigen für die einzelnen bei (1) zu unterscheidenden Fälle die Zurückführung der Formeln auf die Jacobi'schen Normalformen der elliptischen Transcendenten bis zu ihren Ausdrücken durch Thetafunctionen. Ein zweiter § 7 geht kurz auf die entsprechenden Formeln für (2) ein. Der § 8 endlich stellt die für alle fünf Flächen von verschiedenen Autoren erhaltenen Resultate zusammen, in denen natürlich die allgemeinen Sätze der Herren Stäckel und Staude sich abspiegeln.

Die Meinung des Verfassers, die Behandlung dieser Probleme in gewissem Sinne abgeschlossen zu haben, ist dadurch als irrig erwiesen, dass Hr. Stäckel in Math. Ann. XLI (1893) noch eine sechste hierher gehörige Fläche entdeckt hat, die von Hrn. Kobb a. a. O. übersehen worden war. Lp.

---

A. de Saint-Germain et L. Lecornu. Sur l'impossibilité de certains mouvements. C. R. CXIV. 526-528.

Manche Probleme der analytischen Mechanik stossen auf unmögliche Anforderungen, die nicht a priori bemerkbar sind, und in diesem Falle kann man durch widerspruchsvolle Ergebnisse, zu denen sie führen, in Verlegenheit geraten. Hierfür geben die Verfasser ein Beispiel, das sie behandeln: In den Enden $A$, $B$ und in der Mitte $M$ einer starren immateriellen Geraden von der Länge $2a$ sind drei Punkte, jeder von der Masse 1, befestigt, die der Bedingung unterworfen sind, auf der vollkommen glatten Oberfläche eines geraden Kegels $S$ zu bleiben; die Gerade fällt also stets mit einer Erzeugenden des Kegels zusammen. Man erteilt ihr eine bekannte Bewegung und stellt sich die Aufgabe, die Bewegung zu ermitteln, welche sie unter dem Einflusse der einzigen Kräfte annimmt, durch welche die Reactionen des Kegels auf die Punkte $A$, $B$, $M$ dargestellt werden. Es geht aus der Behandlung dieser Aufgabe hervor, dass die Bewegung unmöglich ist, oder wenn man sich lieber anders ausdrücken will, dass sie bei ihrer Entstehung unendlich grosse Reactionen hervorruft. Lp.

---

A. de Saint-Germain. Recherche du mouvement d'un point matériel sur une surface dépolie. Darboux Bull. (2) XVI. 223-229.

Durch die in dem Berichte auf Seite 856 besprochene Note des Herrn Appell angeregt, zeigt der Verf., dass man bei Benutzung krummliniger orthogonaler Coordinaten entsprechende Formeln erhält, die unmittelbar aus den Lagrange'schen Gleichungen fliessen. Sind $q_i = F_i(x, y, z)$ $(i = 1, 2, 3)$ die Gleichungen dreier Familien

von dreifach orthogonalen Oberflächen, $ds_i = \sqrt{E_i}.dq_i$ die Kanten des rechtwinkligen Parallelepipeds zwischen drei Flächen $q_1$, $q_2$, $q_3$ und ihren unendlich nahen, hat endlich der Massenpunkt sich auf der Oberfläche $\varphi(q_1, q_2, q_3) = 0$ zu bewegen unter dem Einflusse einer Kraft $P$, deren Componenten in Richtung von $ds_1$, $ds_2$, $ds_3$ bezw. $P_1$, $P_2$, $P_3$ sind, so ergiebt sich, unabhängig von dem Normalwiderstande $N$ und der Reibung $Nf$ die Gleichung $0 =$

$$\begin{vmatrix} E_1 \frac{dq'_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_1}{\partial q_1} q'^2_1 + \cdots - \frac{1}{2}\frac{\partial E_3}{\partial q_1} q'^2_3 - P_1\sqrt{E_1}, & \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, & E_1 q'_1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ E_3 \frac{dq'_3}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial E_3}{\partial q_3} q'^2_3 + \cdots - \frac{1}{2}\frac{\partial E_2}{\partial q_3} q'^2_2 - P_3\sqrt{E_3}, & \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}, & E_3 q'_3 \end{vmatrix}.$$

Eine zweite Gleichung für die Geschwindigkeit $V$ folgt in der Form:

$$\frac{1}{V}\frac{d(\frac{1}{2}V^2)}{dt} = \frac{dV}{dt}.$$

Die Anwendung dieser Gleichungen in Verbindung mit den Lagrange'schen wird an dem Beispiele der Bewegung eines schweren Massenpunktes auf einem Kreiscylinder mit verticaler Axe erläutert.

Lp.

---

A. Cabreira. Alguns theoremas de mecanica. Teixeira J. XI. 42-54.

Der Verf. beschäftigt sich mit der Bewegung der Körper auf der schiefen Ebene bei Berücksichtigung der Reibung und des Widerstandes des Mittels, in welchem die Bewegung stattfindet.

Tx. (Lp.)

---

A. Ljapunoff. Allgemeines Problem von der Stabilität der Bewegung. Charkow. 1892. 1-245. (Russisch.)

Dieses Werk enthält einige allgemeine Untersuchungen bezüglich des analytischen Problems, auf welches die Fragen von der Stabilität des Gleichgewichts und der Bewegung sich reduciren lassen, falls die Störungen ausschliesslich von der Veränderung der anfänglichen Bewegungsbedingungen herrühren. —

Fragen dieser Art hängen von der in einem gewissen Sinne

angestellten Untersuchung der Differentialgleichungen von der Form

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \ \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

ab, wo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gewisse Functionen der Zeit $t$ und der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, die in gewisser Hinsicht von den Coordinaten und den Geschwindigkeiten des betreffenden materiellen Systems abhängen, und die für

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$$

sämtlich den Wert 0 haben.

Es handelt sich hier nur darum, zu ermitteln, ob man die Anfangswerte der Functionen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die durch die Gleichungen (1) bestimmt werden, so klein bezüglich ihrer Zahlenwerte wählen kann, ohne sie jedoch gleich Null zu setzen, dass die Zahlenwerte dieser Functionen die ganze Zeit nach dem Anfangsmoment gewisse, als Anfangsdaten vorausgesetzte, von Null verschiedene, doch beliebig kleine Grenzwerte nicht übertreffen.

Nachdem der Verfasser diese Frage im bejahenden Sinne gelöst hat, bezeichnet er die Bewegung, die frei von Störungen ist, als stabil bezüglich der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$; im entgegengesetzten Falle aber als labil.

Indem der Verfasser sich auf die Betrachtung ausschliesslich reeller Werte von $t$ beschränkt, welche grösser als ein gegebener Grenzwert sind, setzt er voraus, dass er hier mit Fällen zu thun habe, in welchen die Functionen $X_1, X_2, \ldots, X_n$, welche die zweiten Teile der Gleichungen (1) darstellen, für alle in Betracht kommenden Bedeutungen von $t$, falls der Modul von $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ hinreichend klein ist, sich in folgende Reihen

$$X_s = \sum_{i=1}^{n} p_{si} x_i + \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n; \ m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 1)$$

nach den ganzen positiven Potenzen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entwickeln lassen.

Nimmt man diese Bedingungen als erfüllt an, so besteht die gewöhnliche Lösungsmethode darin, dass man in den oben angeführten Reihen alle Glieder von höherer als erster Ordnung in Bezug auf die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ weglässt und somit

die Frage auf die Lösung linearer Differentialgleichungen folgender Form zurückführt:

$$(2) \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n$$
$$(s = 1, 2, 3, 4, \ldots, n).$$

Hier entsteht aber die Frage: Wann führt dieses Verfahren wirklich zum Ziel? Mit anderen Worten: Wann können die Glieder von höherer als erster Ordnung ohne Einfluss auf die Stabilität weggelassen werden?

Die Frage wird vom Verfasser auf Grund der folgenden ziemlich allgemeinen Voraussetzungen gelöst:

1) Wie gross auch $t$ ist, so übertrifft der Zahlenwert der Functionen $p_{si}$, $P_s^{(\cdots)}$ nicht eine bestimmte, von $t$ unabhängige Grenze; — 2) die Reihen, durch welche unter den gemachten Voraussetzungen die Functionen $X_s$ sich darstellen lassen, sind convergent, und zwar im gleichen Grade für alle in Betracht kommenden Bedeutungen von $t$, und

3) die Functionen $p_{si}$ sind so beschaffen, dass man mit Hülfe einer linearen Substitution das System (2) auf ein System mit constanten Coefficienten bringen kann. Die Bedingungen aber, denen die Substitution Genüge leisten muss, bestimmt man aus der Forderung, dass man bei der Lösung des Problems von der Stabilität für die Gleichungen, in welche die Gleichungen (1) durch die uns interessirende Substitution übergehen, eine ähnliche Frage zu lösen hätte, wie für die Gleichungen (1). (Als Beispiel wollen wir den Fall anführen, wo alle $p_{si}$ periodische Functionen von $t$ mit einer und derselben reellen Periode sind). —

Nimmt man die eben erwähnte Substitution als ausgeführt an, so dass also $p_{si}$ constante Grössen sind, und bezeichnet man die reellen Teile der Wurzeln der Gleichung:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} p_{11}-k & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-k & \ldots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-k \end{vmatrix} = 0$$

mit

$$-\lambda_1, \; -\lambda_2, \; \ldots, \; -\lambda_n,$$

so wird die Antwort auf die aufgestellte Frage lauten:

Die Stabilität hängt von den Gliedern von höherer als erster Ordnung in der Gleichung (1) nur in dem Falle nicht ab, wenn die kleinste von den Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$$

nicht gleich 0 ist. (Dass man in allen übrigen Fällen Glieder höherer Ordnung in Betracht ziehen muss, wird in einem kurzen Anhange zum vorliegenden Werke nachgewiesen. Siehe „Berichte der Charkow'schen Math. Gesellschaft, III. „Beiträge zur Frage von der Stabilität der Bewegung".) Hierbei erhält man eine bejahende oder verneinende Antwort, je nachdem die kleinste der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positiv oder negativ ist. —

Einer besonderen Betrachtung müssen also nur die Fälle unterzogen werden, in welchen die kleinste von den Zahlen $\lambda_s$ Null ist.

Die Lösung der Frage hängt wesentlich von Gliedern höherer Ordnung ab und bietet nicht geringe Schwierigkeiten dar.

Der Verfasser beschränkt sich auf den Fall, in welchem alle $P_s^{(\ldots)}$ entweder constante Grössen oder periodische Functionen von $t$ mit einer und derselben reellen Periode sind, und untersucht die Frage nur für zwei weniger complicirte Fälle:

1) wenn nur eine von den Zahlen $\lambda_s$ Null ist, alle anderen aber positiv sind;

2) wenn zwei von den Zahlen $\lambda_s$ gleich Null, alle anderen aber positiv sind (hierbei ist zu beachten, dass nur die reellen Teile der beiden Wurzeln der Gleichung (3) gleich Null gesetzt werden, durchaus aber nicht die imaginären).

Der Verfasser untersucht diese Fälle so ausführlich, dass dieses den Schwerpunkt des Werkes bildet. — Beiläufig wendet er seine Aufmerksamkeit auch anderen Fragen zu, die in gewisser Beziehung zu den hier angeführten stehen. So entwickelt er im ersten Abschnitt, wo die Gleichungen (1) auf Grund ziemlich allgemeiner Voraussetzungen behandelt werden, die allgemeine Theorie linearer Differentialgleichungen von der Form (2), in welchen die Coefficienten $p_{si}$ irgend welche continuirliche Functionen von $t$ sind, deren Zahlenwert aber eine gewisse Grenze nicht übertrifft.

Hier wird auch auf Lösungen der Gleichung (1) hingewiesen, welche die „asymptotischen Lösungen“ des Hrn. Poincaré als einen speciellen Fall in sich schliessen. Im zweiten Abschnitte, wo bei der Behandlung der Gleichungen (1) vorausgesetzt wird, dass alle Coefficienten $p_{si}$, $P_s^{(\cdots)}$ constante Grössen sind, wendet der Verfasser seine Aufmerksamkeit der Frage nach den periodischen Lösungen dieser Gleichungen zu. Im dritten Abschnitt giebt der Verfasser, nachdem er die Voraussetzung gemacht, dass die Coefficienten $p_{si}$, $P_s^{(\cdots)}$ periodische Functionen von $t$ mit einer und derselben reellen Periode sind, einige Sätze bezüglich der sogenannten charakteristischen Gleichung. Einige dieser Sätze dienen zur Ermittelung der Coefficienten dieser Gleichung (der sogenannten Invarianten), andere aber betreffen einige Eigenschaften der Wurzeln derselben. —

Von den Endergebnissen, welche eine unmittelbare Anwendung bei der Lösung einer gewissen Gruppe von Aufgaben der Mechanik finden, wollen wir den Lehrsatz von der Labilität des Gleichgewichts im Falle solcher Kräfte, die eine Kräftefunction besitzen, diese aber in der Gleichgewichtslage nicht ihr Maximum hat, hervorheben.

Die Labilität des Gleichgewichts wird vom Verfasser für zwei gewisse Kategorien von Fällen des Nichtvorhandenseins des Maximums nachgewiesen. — Jk.

---

A. Piltz. Mitteilung über das Dreikörperproblem. Deutsche Math. Ver. I. 68-70.

Nachrichten über Untersuchungen des Verfassers, die zu einer vollständigen, demnächst zu veröffentlichenden Theorie geführt haben, welche eine Uebersicht über das ganze System der möglichen Bewegungen punktförmiger Körper gewährt. Die Vorführung eines vereinfachten Falles dient zur Erläuterung der einzuführenden neuen Begriffe. Lp.

---

Th. Sloudsky. Note sur quelques cas particuliers du problème de plusieurs corps. Soc. imp. natur. Moscou 1892. 437-440.

Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. R. Hoppe: „Erweiterung der bekannten Speciallösung des Dreikörperproblems" (Hoppe Arch. LXIV, F. d. M. XI. 1879. 650). 1) Hr. Sloudsky hat 1878 dieselben Resultate gefunden. 2) Die unbestimmt gehaltenen Angaben von Hrn. Hoppe werden präcisirt. Lp.

---

C. Krediet. Vraagstuk No. 12. Nieuw Archief XIX. 66-79.

Die Aufgabe lautet: Vier oder mehrere materielle Punkte ziehen einander an mit einer Kraft, welche dem Producte der Massen und einer gegebenen positiven oder negativen Potenz der Entfernung proportional ist. Es wird gefordert, diese Punkte so zu stellen und denselben solche Geschwindigkeiten zu erteilen, dass ihre gegenseitigen Entfernungen während der Bewegung sich nicht ändern. Verbindet man mit den bewegenden Punkten ein Coordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt gewählt wird, und zerlegt man die Bewegung in eine Translation und eine Rotation, so wird aus den Bewegungsgleichungen eines festen Körpers gefolgert, dass die Componenten der Drehungsgeschwindigkeit, nach den bewegenden Coordinatenaxen genommen, constant sind, dass die Rotationsaxe jedenfalls eine Hauptträgheitsaxe sein muss, und dass sämtliche Punkte in einer Ebene enthalten sind, welche senkrecht zur Rotationsaxe ist. Aus den erhaltenen Gleichungen können jedenfalls die Massen eliminirt werden, so dass das von den Punkten gebildete Vieleck unabhängig von jenen Massen gewissen Bedingungen genügen muss. Ist die anziehende Kraft der Entfernung proportional, so ist die Lage der Punkte in einer Ebene vollkommen willkürlich. Ausführlich wird der Fall behandelt, wo nur vier Punkte gegeben sind. Mo.

---

B. Krause. Ueber die Bewegung eines veränderlichen ebenen Vierecks um einen seiner Eckpunkte. Pr. (Nr. 263) Realgymn. Magdeburg. 14 S. 4°.

Die Seiten eines ebenen Vierecks $OABC$ sind als starre, gewichtslose Geraden vorausgesetzt; in den Ecken $A$, $B$, $C$ sind die

drei Massen $m_1$, $m_2$, $m_3$ angebracht. Der vierte Eckpunkt $O$ ist in der Ebene fest und bildet den Drehpunkt des Gelenkvierecks. Die Untersuchung erstreckt sich auf den Fall, bei welchem keine äusseren Kräfte (Reibung, Schwerkraft u. s. w.) vorhanden sind, also nur Anfangsgeschwindigkeiten, die durch Stosskräfte erzeugt sind, die Bewegungen der Punkte $A$, $B$, $C$ bestimmen. Im ersten Teile der Arbeit werden die Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt und integrirt, im zweiten werden die Stosskräfte eingeführt, im dritten besondere Fälle der Bewegung genauer betrachtet. Die Behandlung hätte durch einfache kinematische Betrachtungen wohl anschaulicher gestaltet werden können. Lp.

---

M. Allé. Ueber die Ableitung der Gleichungen der drehenden Bewegung eines starren Körpers nach der Grassmann'schen Analyse. Prag. Math. Ges. 1892. 64-68.

Ist $u$ der Abstand eines Körperpunktes $m$ von einem festen Punkte $O$ und $U$ die an $m$ wirkende Kraft, so ist der Ausdruck des d'Alembert'schen Princips in der Sprache der Ausdehnungslehre

$$\Sigma\left(m\frac{d^2u}{dt^2}-U\right)\mid\delta u=0.$$

Hieraus wird die ebenso einfache Gleichung der drehenden Bewegung abgeleitet und nachher in die gewöhnliche Form dreier Gleichungen umgesetzt. Dabei treten auch verschiedene andere Begriffe der Mechanik in einfachster Formulirung auf. Schg.

---

J. P. Johnston. Initial motion. Dublin Proc. (3) III. 1-19.

Die Aufgabe, die Anfangsbewegung eines Körpers, der durch die Einwirkung eines Systems endlicher Kräfte aus der Ruhe gebracht wird, zu bestimmen und bei gezwungener Bewegung die Anfangswerte der von den Fesseln herrührenden Reactionskräfte zu finden, wird hier unabhängig von den allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung durch die Betrachtung des Momentes erledigt, welches in einem kleinen Zeitraum erzeugt wird. Die

Methode wird an Beispielen über eine Bewegung erläutert, die sowohl glatten als auch rauhen Fesseln unterworfen wird; ausserdem wird gezeigt, wie die Methode auf verallgemeinerte Coordinaten passt.

Gbs. (Lp.)

---

H. Ruoss. Die Regelflächen isochroner Pendelschwingungen für einen beliebigen Körper. Böklen Mitt. V. 53-60.

Als Ergänzung zu den Untersuchungen des Hrn. Böklen über die Aufhängepunkte und Axen isochroner Pendelschwingungen (F. d. M. XIV. 1882. 757, XV. 1883. 822) bestimmt der Verf. die Verteilung der Schwingungsaxen in der Weise, dass er von allen denkbaren Geraden des Raumes diejenige Gruppe herausgreift, deren Angehörige auf einem Schwerpunktsstrahle $s$ senkrecht stehen. Jedem Punkte $P$ von $s$ entsprechen also unendlich viele Schwingungsaxen $p$ in einer Normalebene zu $s$. Als diejenige Regelfläche, deren Erzeugende einem Schwerpunktsstrahle angehören und isochrone Körperschwingungen ergeben, wird die Fläche vierter Ordnung

$$z(z-l)(x^2+y^2)+\alpha x^2+\beta y^2=0$$

gefunden. Die weitere Discussion zeigt, dass die Schwerpunktsstrahlen ohne reelle Drehaxen für eine gegebene Pendellänge $l$ im Innern eines gewissen Kegels liegen. Die Axen der kleinsten Schwingungsdauer eines Körpers endlich sind die Mantellinien eines Kreiscylinders, der um die grösste Axe des Centralellipsoids mit ihrer reciproken Länge als Radius beschrieben wird. Die grösste Schwingungszahl des Körpers in einer Minute ist mithin $\frac{60}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2k_3}}$, wo $k_3$ der kleinste Trägheitsradius des Körpers ist.

Lp.

---

Phillips. Disposition, propre à rendre le pendule isochrone. J. de l'Éc. Pol. LXII. 1-35.

Ein Auszug aus dieser nachgelassenen Abhandlung des Verfassers ist unter dem Titel „Pendule isochrone“ in C. R. CXII. veröffentlicht und in F. d. M. XXIII. 1891. 951 besprochen wor-

den. Zu dem a. a. O. gegebenen Referate fügen wir hier einige Ergänzungen hinzu. Im ersten Teil entwickelt der Verf. die genauen Differentialgleichungen für das im früheren Referate beschriebene Pendel von allgemeiner Form und stellt aus ihnen die erste Integralgleichung her; danach wird für eine speciellere Form des Pendels unter Vernachlässigung der dritten Potenz des Ausschlagwinkels das zweite Integral gefunden, besonders die Schwingungsdauer in der Form:

$$T=\pi\left[\frac{A+\frac{p}{3g}R^2}{Pa+\frac{1}{2}pR+2R\varphi}\right]^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{p}{gB}R^2\alpha_0^2\right).$$

Hierin bedeuten $P$ das Gewicht des Pendels, $p$ das des Verbindungsarms der Pendelstange und der Stahlfeder, $a$ den Abstand der Aufhängeaxe vom Schwerpunkte des Pendels, $R$ die Länge jenes Verbindungsarms, $\varphi$ eine von der Elasticität der Feder abhängende Constante, $A$ das Trägheitsmoment des Pendels in Bezug auf die Schneide, $B=A+\frac{p}{3g}R^2$, $\alpha_0$ den anfänglichen Ausschlag. Die Schwingungsdauer ist also vom Ausschlage abhängig, wird es aber um so weniger, je kleiner der Subtrahend in der zweiten Klammer der rechten Seite der Gleichung ist. Nach Beendigung dieser Rechnung werden die geeignetsten Dimensionen der Feder und des Verbindungsarmes berechnet. Wird das Gewicht $p$ desselben ganz vernachlässigt, so ergeben sich die vereinfachten Gleichungen, die in dem früheren Referate abgedruckt sind. Endlich wird auch der Einfluss der Temperatur in Rechnung gestellt. Die Berechnung von $g$ aus dem obigen Ausdrucke für $T$ bildet den Schluss des mathematischen Teiles der Arbeit. Es folgt dann ein Bericht über die von Herrn Wolf in der Pariser Sternwarte ausgeführten Versuche und zuletzt eine Note über den Einfluss der in der Entwickelung von $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ vernachlässigten höheren Potenzen von $\alpha$, sowie über das Gesetz der Regelung des Isochronismus bei Aenderung der nutzbaren Länge und des Biegungscoefficienten der Feder. Lp.

G. Defforges. De la nature de la rotation du couteau d'un pendule sur son plan de suspension. C. R. CXV. 28-30.

Fortgesetzte Beobachtungen haben den Verfasser veranlasst, das Gleiten der Schneide eines Pendels auf dem Lager mit in Rechnung zu stellen. Dadurch nimmt die Differentialgleichung des Pendels die Form an:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\left(1 + \frac{n\varrho}{h}\right).$$

Hierin bezeichnen $\theta$ den Ausschlag, $l$ die Länge des synchronen mathematischen Pendels, $\varrho$ den mittleren Krümmungsradius der Schneide, $h$ den Abstand des Schwerpunktes von der Schneide, $n$ den Gleitungscoefficienten. Die Wirkung des Gleitens auf das Reversionspendel ist einer Vergrösserung des Abstandes der Schneiden um die Länge $n(\varrho+\varrho')$ gleich zu achten, wo $\varrho'$ den mittleren Krümmungshalbmesser der zweiten Schneide bedeutet. Die experimentelle Bestimmung der Grösse des Gleitens hat bei einem Pendel von der Länge 1 m im Gewicht von 5 kg bei einem Ausschlage von 30′ etwa 0,2$\mu$ ergeben. Lp.

G. Holzmüller. Die Schwungradtheorie. Hoffmann Z. XXIII. 481-495.

„Ein Capitel für den physikalischen Unterricht in Realgymnasien und Oberrealschulen mit besonderer Berücksichtigung der physikalischen Lehrbücher.“ Lp.

E. Padova. Dimostrazione di un teorema di Jacobi. Ven. Ist. Atti (7) III. 847-855.

Es handelt sich um den Satz von der Aequivalenz der Bewegung eines schweren und homogenen Umdrehungskörpers, der sich um einen festen Punkt seiner Symmetrieaxe dreht, mit der Relativbewegung zweier Körper, auf welche keine Kraft einwirkt. In Betreff dieses Satzes vergleiche man die Referate über Padova in F. d. M. XVI. 1884. 812, Halphen und Darboux in F. d. M. XVII.

1885. 889ff. Der jetzt vom Verf. gegebene Beweis vereinfacht den Darboux'schen derartig, dass er für Vorlesungen sich eignet.

Lp.

---

N. Delaunay. Zur Frage von der geometrischen Deutung der Integrale von S. Kowalevski bei der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Mosk. Math. Samml. XVI. 346-351. (Russisch.)

Der Verf. betrachtet den speciellen Fall, in welchem die Constante $k$ des vierten Integrals von S. Kowalevski:

$$(p^2-q^2+c_0\gamma)^2+(2pq+c_0\gamma')^2 = k^2$$

den Wert Null annimmt, infolge dessen diese Gleichung in folgende zwei zerfällt:

$$p^2-q^2+c_0\gamma = 0,$$
$$2pq+c_0\gamma' \quad = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen und drei anderen Integralen lässt sich die Curve, auf welcher im Körper selbst das Ende der momentanen Winkelgeschwindigkeit sich bewegt, bestimmen. Diese Curve ist, wie Herr Appelroth später gezeigt hat, eine Schnittlinie des Rotationsparaboloids mit einem elliptischen Cylinder. Darauf giebt der Verfassser die Gleichung der Fläche, auf welcher das Ende der momentanen Drehungsaxe im Raume liegen muss. Die Bewegung wird also darauf zurückgeführt, dass die oben erwähnte Curve, die fest mit dem Körper verbunden ist, auf der eben construirten Fläche rollt, ohne dabei zu gleiten. Die Interpretation des Hrn. Delaunay ist analog der Interpretation des Hrn. Darboux in dem von Lagrange betrachteten Falle der Bewegung eines starren Körpers.

Jk.

---

N. Delaunay. Algebraische Integrale der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. St. Petersburg. 1892. 1-78. (Russisch.)

Dieses Werk stellt die Magister-Dissertation des Verfassers dar. Der selbständige Teil enthält die weitere Untersuchung der in der vorhergehenden Abhandlung erzielten Resultate. Ausser-

dem giebt die Schrift die Beschreibung interessanter Apparate, die der Verfasser zum Zwecke experimenteller Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers in dem von S. Kowalevski betrachteten Falle construirt hat. Jk.

P. Nekrassoff. Zur Frage von der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Mosk. Math. Samml. XVI. 508-517. (Russisch.)

P. Nekrassoff. Ueber die Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt. Arbeiten d. phys. Section der Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. Moskau T. V. Heft 2. 17-37. (Russisch.)

In den oben aufgezählten Abhandlungen discutirt der Verfasser die Bewegung und die analytischen Eigenschaften der Functionen, welche das Problem von der Bewegung eines starren Körpers für den speciellen Fall lösen, der schon früher von Hrn. W. Hess in Math. Ann. XXXVII (F. d. M. XXII. 1890. 920) behandelt worden ist. Hierzu fühlt er sich dadurch veranlasst, dass in Hess's Abhandlung bei der Discussion dieses speciellen Falles 1) nicht des ersten Paragraphen der Abhandlung von S. Kowalevski „Ueber die Bewegung eines starren Körpers" (Acta Math. XII) gedacht worden ist, und

2) die Differentialgleichungen der Bewegung zum Ermitteln des letzten Integrals nicht auf lineare Gleichungen zweiter Ordnung reducirt worden sind, was die Lösung vereinfacht und solche Eigenschaften des Integrals aufdeckt, die von Hrn. Hess nicht bemerkt worden sind. —

Mit besonderer Ausführlichkeit behandelt der Verfasser die Eigenschaften der Integrale der von ihm gefundenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, betrachtet die Frage nach der Stabilität der Bewegung und weist auf die Möglichkeit periodischer Bewegungen hin. Nicht ohne Interesse ist auch seine Hindeutung auf die Vieldeutigkeit der Functionen der Zeit, welche das Problem von der Bewegung eines schweren starren Körpers für den von

Hrn. Hess betrachteten Fall lösen, wodurch wiederum die Richtigkeit des bekannten Theorems von S. Kowalevski bestätigt wird.

Jk.

---

H. Appelroth. Ueber den ersten Paragraphen der Abhandlung von S. Kowalevski: „Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe“. Mosk. Math. Samml. XVI. 483-507. (Russisch.)

H. Appelroth. Beiträge zur Abhandlung: „Ueber den ersten Paragraphen der Abhandlung von S. Kowalevski“. Mosk. Math. Samml. XVI. 592-596. (Russisch.)

In den angeführten Abhandlungen bezweckt der Verfasser die Vervollständigung der Untersuchungen von S. Kowalevski über die Eigenschaften der Functionen, welche der Frage von der Rotation eines starren Körpers genügen, da diese Untersuchungen nicht durchweg als selbständig und correct sich herausstellen. Er beweist folgende Theoreme:

1) Im Falle, dass

$$y_0 = 0, \quad x_0 \sqrt{\frac{B-C}{C}} = z_0 \sqrt{\frac{A-B}{A}}, \quad A > B > C,$$

ist, führt die Frage auf die Entwickelung der erwähnten Functionen in eine Reihe nach den Potenzen von

$$t-\tau,$$

wobei die Coefficienten von fünf willkürlichen Constanten abhängen und die Pole erster Ordnung sind.

2) Im Falle dass

$$A \neq B \neq C$$

ist, existiren weder allgemeine, noch particuläre Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung eines starren schweren Körpers, in denen die Ordnung der Pole bei der Entwickelung von $p$, $q$ und $r$ nach den Potenzen von

$$t-\tau$$

höher als 1 wäre, für $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ aber höher als 2.

3) Falls aber

$$A = B, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 = 0$$

ist, so existirt eine Reihe particulärer Integrale mit Polen von höherer als 3ter Ordnung für $p$, $q$, $r$ und mit vier willkürlichen Constanten in den Coefficienten. Alle diese Resultate, sowie auch die von Hrn. P. Nekrassoff in Bezug auf das Problem von Hess gewonnenen, bestätigen den bekannten Satz von S. Kowalevski.

Jk.

---

Fritz Kötter. Sur le cas traité par Mme Kowalevski de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Acta Math. XVII. 209-263. (1893.)

Fritz Kötter. Ueber das Kowalevski'sche Rotationsproblem. Verhandl. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Aerzte. 64. Vers. Halle. II. 13-15; Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. I. 65-68.

Der von Frau von Kowalevski behandelte neue Fall der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt ist dadurch charakterisirt, dass zwei der Hauptträgheitsmomente einander gleich und doppelt so gross wie das dritte sind, dass ferner der Schwerpunkt in der Ebene der Axen gleichen Trägheitsmomentes liegt. Vermittelst der vier algebraischen Integralgleichungen des Problems, von denen die vierte dem behandelten Falle eigentümlich angehört, hat Frau von Kowalevski die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit und die Richtungscosinus zwischen den Axen des Körpers und der Verticale durch hyperelliptische Functionen ausgedrückt, deren beide Argumente sich als lineare Functionen der Zeit ergeben. Bezüglich der sechs anderen Richtungscosinus giebt sie an, sie habe sich überzeugt, dass dieselben sich rational durch Thetafunctionen darstellen lassen; sie verzichte jedoch auf eine wirkliche Darstellung derselben in Anbetracht der zu erwartenden Schwierigkeiten der Rechnung.

Diese Schwierigkeiten hat Hr. Fr. Kötter durch Umformung der Ausdrücke seiner Vorgängerin glücklich beseitigt. Die genaue Betrachtung aller zu beachtenden Formeln brachte ihn zur Einsicht, dass es vorteilhaft ist, statt der Bewegung des mit dem Körper verbundenen Coordinatensystems diejenige eines dritten Coordinatensystems zu untersuchen, dessen eine Axe stets mit der ausgezeichne-

ten Axe des Körpers zusammenfällt. Die relative Bewegung des Körpers gegen dieses Coordinatensystem ist also eine Drehung um eine Axe; die Geschwindigkeit dieser Drehung ist halb so gross wie die Componente der Rotationsgeschwindigkeit des Körpers nach der gemeinschaftlichen Axe des Körpers und des neu eingeführten Coordinatensystems. Die Richtungscosinus dieses neuen Systems sind Brüche, deren Zähler und gemeinsamer Nenner linear und homogen aus je drei hyperelliptischen Functionen zusammengesetzt sind. Die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit des Systems nach seinen eigenen Axen erhält man aus den entsprechenden Richtungscosinus, indem man im Zähler die Coefficienten durch andere ersetzt.

Ganz wesentlich ist nun, dass die Coefficienten der in Frage stehenden Ausdrücke sich ebenfalls durch hyperelliptische Functionen darstellen lassen, deren Argumente naturgemäss constante Grössen sind. So erhält man die Richtungscosinus und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit als Functionen von vier Argumenten. Die Form dieser Ausdrücke führt auf die gerechtfertigte Vermutung, dass die drei Richtungscosinus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ als Functionen der beiden Wertepaare $v_1, v_2$ und $v'_1, v'_2$ denselben partiellen Differentialgleichungen genügen, welche auch für die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit von Wichtigkeit sind. Die Existenz dieser Differentialgleichungen ermöglicht nun eine Bestimmung der noch fehlenden Richtungscosinus in derselben Weise, wie Hr. Kötter bei der Bewegung eines gewissen festen Körpers in einer Flüssigkeit verfahren ist. Die Einzelheiten der Rechnung und die Formeln selbst sind in der ausführlichen Abhandlung nachzulesen.

Zum Schlusse wird auf den merkwürdigen Umstand hingewiesen, dass die beiden Bewegungen, in welche die Rotation des Körpers zerlegt worden ist, einem allgemeinen Typus angehören, von welchem andere specielle Fälle die Poinsot'schen Bewegungen und die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit sind, welchen letzteren Fall der Verf. in einer Abhandlung im CIX. Bande des Journals für Mathematik behandelt hat (vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 977ff.). Lp.

M. von Rohr. Die Bestimmung derjenigen Substitutionscoefficienten als Functionen der Zeit, welche bei der Rotation mit einander verbundener Körper auftreten. Diss. Halle. 40 S. 8°.

In F. d. M. XXI. 1889. 938 ist über die Abhandlung des Herrn Wangerin „Ueber die Rotation mit einander verbundener Körper" berichtet worden. Dort wurde auch schon S. 941 erwähnt, dass $dt$ durch eine Hülfsgrösse $v$ als elliptisches Differential von $v$ dargestellt wird. In der vorliegenden Dissertation sind nun diejenigen Rechnungen durchgeführt, die zur Bestimmung aller in dem Probleme vorkommenden Substitutionscoefficienten zu erledigen blieben. Für den ersten Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, werden die Euler'schen Winkel $\varphi$, $\vartheta$, $\psi$ durch $v$ ausgedrückt, nachdem zuerst $\sin v$ und $\cos v$ als doppeltperiodische Functionen von $t$ gefunden sind, und die erhaltenen Formeln werden discutirt. Danach wird die entsprechende Rechnung für den Winkel $\delta$ gemacht, durch dessen Abhängigkeit von $t$ die Bewegung des zweiten Körpers vollständig bestimmt ist. Zuletzt werden auch einige von Herrn Wangerin bereits betrachtete specielle Fälle kurz behandelt. Die Lösung des F. d. M. XXII. 1890. 965 besprochenen hydrodynamischen Problems, bei welcher Hr. Serf auf ganz dieselben Differentialgleichungen gestossen war, ist im § 2 nur in so weit zum Vergleiche herangezogen, als dadurch sich der grosse Vorzug der von Hrn. Wangerin eingeführten Hülfsgrösse $v$ herausstellt. Lp.

A. Hübner. Die Bewegungsaxen gestützter starrer Körper. Hamb. Mitt. III. 107-139.

Wird ein starrer Körper in einem seiner Punkte durch eine Fläche gestützt, so dass der betreffende Punkt in der Fläche ohne Reibung gleitet, so wirkt in jenem Punkte auf den Körper ein Widerstand, die „Auflagerkraft", deren Lage durch den Auflagerpunkt und durch die Richtung normal zur Auflagerfläche gegeben ist. Durch solche Unterstützungen werden die Bewegungen eines Körpers einem Zwange unterworfen, und jede Auflagerkraft

verringert die Bewegungsmöglichkeit, indem sie diejenigen Bewegungen hindert, bei denen sie eine negative Arbeit leisten müsste. Die Aufgabe, die Bewegungsaxen eines beliebig gestützten starren Körpers zu bestimmen, ist durch die Arbeiten Mannheim's, Somoff's und Ball's gelöst; sie besteht darin, die Hauptaxen aller linearen Strahlencomplexe aufzusuchen, welche durch die gegebenen Auflagerkraftlinien hindurchgehen, und es ist bekannt, dass bei fünf Auflagerkräften ein linearer Complex, entsprechend einer Bewegung, bestimmt ist; dagegen haben wir bei vier Auflagerkräften die Hauptaxen eines Complexbüschels, bei drei die Hauptaxen eines Complexbündels, bei zwei die eines Complexgebüsches. Der Verfasser giebt eine zusammenhängende Darstellung dieser Theorie und ergänzt das Bekannte durch manche Einzeluntersuchungen. So combinirt er mit jeder Axe einer Bewegung oder eines Kräftezustandes eine zweite unendlich ferne Axe (die Gerade im Unendlichen, welche allen zur Bewegungsaxe senkrechten Ebenen gemeinschaftlich ist) und zieht daraus liniengeometrische Folgerungen. Die Sonderformen, welche das in seiner allgemeinsten Gestalt bekannte Axensystem für dreifache Stützung oder dreifachen Bewegungszwang annehmen kann, werden einzeln aufgestellt. Das Cylindroid bei zwei- und bei vierfacher Stützung erfährt eine eingehende Untersuchung, u. dergl. m. Lp.

---

D. Bobylew. Kugel, die ein Gyroskop einschliesst und auf einer Horizontalebene rollt, ohne dabei zu gleiten. Mosk. Math. Samml. XVI. 544-591. (Russisch.)

Der Verfasser löst folgende Aufgabe: Innerhalb einer starren homogenen Hohlkugel befindet sich ein Gyroskop (Rotationskörper), dessen Symmetrieaxe fest mit einem der Durchmesser verbunden ist, während der Trägheitsmittelpunkt mit dem der Kugel zusammenfällt. Es ist zu bestimmen, was für eine Curve der Mittelpunkt einer solchen Kugel beschreibt, wenn diese auf einer rauhen Horizontalebene in Folge eines ihr versetzten Stosses rollt, ohne dabei zu gleiten, unter der Voraussetzung, dass das Gyroskop vorläufig in Rotationsbewegung um die Symmetrieaxe gebracht worden

ist. Nach vorgenommener Integration, die sich mit Hülfe der elliptischen Functionen von Weierstrass ausführen lässt, gelangt der Verfasser zu dem Schlusse, dass die Curve, die der Kugelmittelpunkt beschreibt, zwischen zwei parallelen Geraden eingeschlossen ist und einen periodischen Charakter trägt, indem sie der Reihe nach bald die eine, bald die andere der Geraden berührt, wobei die Differenz zweier auf einander folgenden Abscissen der Berührungspunkte eine constante Grösse ist. Jk.

A. Vierkandt. Ueber gleitende und rollende Bewegung.
Monatsh. f. Math. III. 31-54, 97-134.

Nur die beiden extremen Fälle bei der Bewegung eines Körpers an der Oberfläche eines zweiten werden betrachtet, das Gleiten und das Rollen; ausgeschlossen bleibt der allgemeine Fall der Vereinigung beider Bewegungsarten. Die Arbeit stützt sich auf die allgemeinen Betrachtungen über gleitende und rollende Bewegung, welche Hr. C. Neumann in seinen „Grundzügen der analytischen Mechanik“ (F. d. M. XIX. 1887. 872) veröffentlicht hat. Die Methode dieser Untersuchung besteht darin, dass man zur Discussion der Berechnung die Lagrange'schen Differentialgleichungen zweiter Form unter Benutzung von fünf Variabeln verwendet. Nachdem die bezüglichen Sätze und Formeln in § 2 zusammengestellt sind, folgen in Abschnitt I die allgemeinen Betrachtungen über gleitende und rollende Bewegung. Die lebendige Kraft wird nach den Vorschriften des Hrn. C. Neumann in geometrischer Weise abgeleitet. Die Ableitung der dynamischen Differentialgleichungen in § 4 aus den Lagrange'schen Gleichungen zweiter Form für die gleitende Bewegung bietet keine Schwierigkeiten. Mehr Arbeit verursacht der Fall der rollenden Bewegung, bei welchem Bedingungsgleichungen in Form von linearen Differentialgleichungen auftreten, und für den der Verf. die Rechnung ausführlich entwickelt, weil dieselbe in dieser Form den meisten Lehrbüchern fehlt. Im Abschnitt II werden die entwickelten Formeln auf den Fall angewandt, dass beide Körper Kugeln sind. Für den Fall der rollenden Bewegung (§ 5) wird dabei der eine Körper als ruhend gedacht. Bei der

Discussion der gleitenden Bewegung (§ 5) wird ein anderes System von Variabeln eingeführt als das sonst benutzte, weil sich dann das Problem fast ohne Rechnung lösen lässt. In beiden Fällen wird das Problem zunächst unter der Voraussetzung behandelt, dass zwischen den Teilchen der Kugeln gewisse anziehende Kräfte, die dem Newton'schen Gesetze gehorchen, thätig sind. Sodann wird an zweiter Stelle die Bewegung einer Kugel, die sich unter dem Einflusse der Schwerkraft auf der inneren Oberfläche einer ruhenden Hohlkugel bewegt, näher untersucht. Hierbei ergiebt sich, dass die Bewegung der rollenden Kugel zu der eines gewissen Kreisels von kugelförmiger Gestalt, die Bewegung der gleitenden Kugel zu der eines gewissen Pendels in enge Beziehungen tritt. Im III. Abschnitte wird ein anderer Specialfall behandelt, die Bewegung einer Kreisscheibe auf einer Horizontalebene unter Einwirkung der Schwerkraft. Die erforderlichen Formeln werden direct von neuem abgeleitet. Zunächst wird wieder auf geometrischem Wege die lebendige Kraft festgestellt, und hieran reiht sich die Aufstellung der Differentialgleichungen (§ 8). In § 9 wird die rollende, in § 10 die gleitende Bewegung der Kreisscheibe näher untersucht. In beiden Fällen ergiebt sich die Bewegung als periodisch; im letzteren reducirt sich das Problem auf Quadraturen. Von der einschlägigen Litteratur führt die Einleitung, der wir in der Darstellung gefolgt sind, ausser der schon citirten Schrift von C. Neumann an: Funcke, Zur Theorie des Rollens, Diss. Göttingen (1869); Amthor, Ueber die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Fläche, Diss. Leipzig (1868); Piper, Ueber die Bewegung eines Körpers, dessen Oberfläche eine im Raum feste Curve berührt, Jena Diss. (Dessau, 1879); Routh, Elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 4th ed. (1883); Richter, Ueber die Bewegung eines Körpers auf einer Horizontalebene, Diss. Leipzig (1887). Hierzu treten vereinzelte Citate im Texte.

Lp.

---

G. Floquet. Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. C. R. CXV. 499-502.

Man betrachte die von dem Faden zur Zeit $t$ gebildete Curve.

Ein Punkt $M$ derselben, die positive Tangente $Mx$, die nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtete Hauptnormale $My$ und die so gerechnete Binormale $Mz$, dass das Dreibein $Mxyz$ gleichstimmig mit dem festen Coordinaten-Dreibein $OXYZ$ ist, bestimmen ein mit der Curve verbundenes Coordinatensystem. Man projicire auf $Mx$, $My$, $Mz$ die augenblickliche Rotation des Dreibeins sowie die Geschwindigkeit des Punktes $M$ zur Zeit $t$ und bezeichne die erhaltenen Projectionen bezw. mit $p$, $q$, $r$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$; sind ferner $p_1$, $q_1$, $r_1$, $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ die analogen Projectionen, wenn die Bogenlänge $s$ als einzige Variable für die Zeit gesetzt wird, so ergiebt die Kinematik die sechs Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial s}-\dfrac{\partial p_1}{\partial t}=qr_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial s}=\eta r_1, \\[2mm] \dfrac{\partial q}{\partial s}=rp_1-pr_1, & \dfrac{\partial \eta}{\partial s}=r-\xi r_1+\zeta p_1, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial s}-\dfrac{\partial r_1}{\partial t}=-qp_1, & \dfrac{\partial \zeta}{\partial s}=-\eta p_1-q. \end{cases}$$

Die Dynamik liefert für die Spannung $T$ und die Componenten $\Phi$, $\Psi$, $X$ der im Punkte $M$ die Masse $mds$ angreifenden Kraft die weiteren drei Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} m\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t}+q\zeta-r\eta\right)=\dfrac{\partial T}{\partial s}+m\Phi, \\[2mm] m\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t}+r\xi-p\zeta\right)=Tr_1+m\Psi, \\[2mm] \qquad \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}+p\eta-q\xi\ \ =X. \end{cases}$$

Der Verfasser macht einige Bemerkungen über die Anwendungen dieser Gleichungen, führt sie unter anderem für den Fall einer ebenen Bewegung in die von Hrn. Resal gegebenen über (Mécanique générale I. 322ff.) und zeigt, wie der von den Herren Léauté und Appell behandelte Fall des Gleitens auf einer festen Curve sich mit Hülfe von (1) und (2) erledigen lässt. Weitere Probleme werden in Aussicht gestellt. Lp.

F. Siacci. Balistique extérieure. Traduction annotée par P. Laurent. Suivie d'une note sur les projectiles discoïdes par F. Chapel. Paris et Nancy. Berger-Levrault et Cie. XVI + 474 S. 8°.

---

F. Siacci. Ueber das Luftwiderstandsgesetz und die Probleme des Bogenschusses. Arch. für Art. XCIX. 172-187.

Der Aufsatz ist aus dem Februarheft der Rivista d'artiglieria e genio von 1891 übersetzt und bekämpft die von Hrn. Sabudski (vergl. F. d. M. XX. 1888. 955) vertretene Ansicht, dass der Luftwiderstand am geeignetsten der vierten Potenz der Geschwindigkeit proportional zu setzen sei. Durch Prüfung und Sichtung der von Hrn. Sabudski angestellten Rechnungen kommt der Verfasser zu dem Schlusse, dass bei dem grösseren Teile der Flugbahnen die dritte Potenz geeigneter ist als die vierte, wenn man überhaupt den wirklichen Luftwiderstand durch einen angenommenen ersetzen will, der einer Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Lp.

---

A. Uchard. Remarques sur les lois de la résistance de l'air. Influence de la vitesse initiale d'un corps sur sa chute dans l'air. Revue d'Art. XL. 309-331, 405-419.

In dem Traité de balistique expérimentale von Hélie ist unter Berücksichtigung der Schiessversuche eine empirische Formel für das Luftwiderstandsgesetz aufgestellt:

$$R=\frac{\Delta}{g}a^2f(v)v^2,$$

wo $f(v)$ die Form hat:

$$f(v)=A-\frac{A-\lambda}{e^{sv^2}},$$

so dass $f(v)$ also zwischen den Grenzen $\lambda$ und $A$ für kleine und grosse Geschwindigkeiten liegt. Der Verfasser findet, dass diese Formel für praktische Zwecke ausreicht, und benutzt sie zur Berechnung des Fallraums. Sein Ergebnis ist in dem Satze enthalten: Ein mit Anfangsgeschwindigkeit versehener Körper fällt in

der Luft stets um eine geringere Höhe als beim freien Falle, welches auch immer die Grösse und Richtung seiner anfänglichen Geschwindigkeit ist, falls diese Richtung nicht aufsteigend ist. In diesem letzteren Falle ist es unbewiesen, dass in dem absteigenden Zweige Verlust an Geschwindigkeit und Fallhöhe stattfindet. Im übrigen genügt es, die Ueberschriften der Capitel herzusetzen: I. Bemerkungen über die Gesetze des Luftwiderstandes. II. Vergleichung des Einflusses des Luftwiderstandes auf den Fall eines Körpers, je nachdem er senkrecht in freiem Falle sinkt, oder mit einer Anfangsgeschwindigkeit behaftet ist. III. Notiz betreffs des Vogelfluges und der dabei zu leistenden Arbeit. Lp.

F. Bashforth. Calculation of trajectories of elongated projectiles. Nature XLV. 473-476, XLVI. 366-367.

Der Verf. verteidigt diejenigen Methoden, welche er für die Berechnung seiner Experimente in den Veröffentlichungen von 1868 angewandt hat, und erklärt die von anderen Seiten an ihnen vorgenommenen Aenderungen für Verschlechterungen. „Ich wünsche, so kurz wie möglich zu zeigen: 1) dass meine an englischen Geschützen erhaltenen Ergebnisse ganz correct sind, 2) dass die Widerstandscoefficienten für jede Entladung durch eine so kurze Zeiteinheit ausgedrückt sind, dass sie dadurch unregelmässiger erscheinen, als sie in der That sind, während die Schwankung in ihrem Werte genau das ist, was der Versuch erwarten lässt, 3) dass, wenn meine mittleren Coefficienten gehörig zur Berechnung guter Versuche benutzt werden, die mit neuen englischen Geschützen bei ruhigem Wetter angestellt sind, die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch vollkommen befriedigend ist.“ Lp.

E. Vallier. Méthodes et formules de balistique expérimentale. Revue d'Art. XLI. 230-250, 401-430, 512-532.

Der Verf. hat in dieser Abhandlung die Methoden, Formeln und numerischen Tabellen zusammengestellt, die sich nach seiner Ansicht am besten für die Lösung der verschiedenen artilleristi-

schen Aufgaben eignen. Die meisten dieser Regeln und Formeln sind wegen ihrer offenkundigen Verbreitung ohne Beweis gegeben, oder werden in angehängten Noten besprochen. Der erste, veröffentlichte Teil ist der äusseren Ballistik und den Wirkungen der Geschosse gewidmet. Ein zweiter Teil soll die innere Ballistik und die neue Organisation der Geschütze und Geschosse behandeln.

Cap. I. Annahme eines Gesetzes für den Luftwiderstand. Cap. II. 1. Geradlinige Bewegung. 2. Schuss unter Winkeln unterhalb 5°. Cap. III. Lösungen der Schiessaufgaben (im ganzen neun Aufgaben, dazu als zehnte eine Correctionsformel, als elfte die Ablenkung). Note A. Ueber die Lösung des ballistischen Problems. Cap. IV. Praktische Lösung der Schiessaufgaben mit Hülfe der secundären Functionen (11 Aufgaben, wie in Cap. III). Note B. Gebrauch der Sabudski'schen Tafeln. Lp.

---

E. Vallier. Sur la solution du problème balistique. C. R. CXV. 648-651.

Die Lösung des Verfassers beruht auf einer Umänderung des Gesetzes des Luftwiderstandes, welche zufolge der Einführung eines Hülfsparameters die Integration der Bewegungsgleichungen gestattet. Ist $f(v)$ die von der Einwirkung der Luft herrührende, tangential vorausgesetzte Beschleunigung, $\theta$ die Neigung der Tangente gegen die Horizontale $Ox$; bedeuten ferner $X$, $Y$ die Coordinaten des Endpunktes des Bogens der Bahnlinie, so ist:

$$Y = X \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{gX^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0} - g\int_0^X (X-x)^2 \frac{f(v)}{v^4\cos^2\theta}\,dx.$$

Ersetzt man nun $f(v)$ durch den anderen Ausdruck $F(x, m)$, wo $m$ ein Hülfsparameter ist, so kommt es darauf an, die Grösse

$$E = g\int_0^X (X-x)^2 \frac{f(v)-F(x, m)}{v^4\cos^2\theta}\,dx$$

zu einem Minimum zu machen. Durch Anwendung von Sätzen aus der Theorie der Kettenbrüche und eines Markoff'schen Theorems gelangt der Verfasser zu einer Lösung dieser Aufgabe und wendet sein Resultat auf die gewöhnlich gemachte Annahme an,

wobei

$$F(x, m) = m \frac{\cos^2\theta_0}{\cos\theta} f(u) \qquad (u = v\cos\theta\sec\theta_0)$$

gesetzt wird. Lp.

---

E. Vallier. Sur les conditions de stabilité des projectiles oblongs. Revue d'Art. XL. 5-28, 101-111.

Die Untersuchung schliesst sich an die Abhandlung des Hrn. de Sparre an: „Sur le mouvement des projectiles dans l'air" (vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 958). Der Verf. entnimmt die Componenten des Luftwiderstandes und die Differentialgleichungen der Bewegung jener Arbeit. Während dort aber alle Glieder unberücksichtigt geblieben sind, welche das zweite Trägheitsmoment des Geschosses enthalten, wird hier die Erreichung einer grösseren Annäherung angestrebt. Dabei ist nicht die Berechnung der Ablenkung das Ziel der Rechnung, sondern nur die Erforschung der Oscillationen des Geschosses während des Durchlaufens eines bestimmten Bogens der Bahn; die nach einander durchgeführte Prüfung einer Reihe von Bogen gestattet die Auswertung des Endresultates. Auf Grund verschiedener Zahlenbeispiele wird gegen das Ende der Arbeit folgendes Bild von der Bewegung eines Langgeschosses entworfen:

1. Das Geschoss bewegt sich in der Schussebene, indem sein Schwerpunkt eine parabolische Curve beschreibt; diese kann man sich als eine Parabel zweiten Grades vorstellen, welche am Abgangs- und am Aufschlagspunkte Winkel $\varphi$ und $\omega$ ($\omega > \varphi$) mit der Horizontale bildet. Statt auf der Bahnlinie gelagert zu bleiben, neigt sich die Axe des Geschosses: die Spitze bleibt unterhalb der Curve bis zu einem gewissen Minimum, erhebt sich dann und geht sogar oberhalb derselben. Die Bewegungen befolgen nicht immer genau dieses Gesetz. Der „kritische Punkt" des Minimums braucht nicht in dem wirklichen Teile der Bahn erreicht zu werden. Ferner erhebt sich in dem Falle grosser Anfangsgeschwindigkeiten zwar die Spitze, strebt aber einer Grenzlage unterhalb der Curve zu. Der Winkel $\Delta_2$ hat zur Grenze $K^2\text{cotg}^2\eta\lambda_0(\pi w^2/\lambda_0 r_2^2 - 1)$,

wo $w$ die Endgeschwindigkeit des Geschosses nach unendlichem Fluge bezeichnet, und diese Grenze kann negativ sein. Die Bewegung der Spitze des Geschosses zieht eine analoge, aber sehr geringe Bewegung des Schwerpunktes nach sich.

2) Statt in der Schussebene muss man sich diese Bewegungen auf einer Cylinderfläche vorstellen, die als Horizontalspur die Ablenkungscurve hat, mit anderen Worten jene Ebene gemäss der fraglichen Curve umbiegen. Ausserdem dreht sich die Geschossspitze ein wenig nach der hohlen Seite des Cylinders. Endlich lagern sich über diese Bewegungen gewisse elliptische Oscillationen, die aber ohne praktische Bedeutung sind. Der Sinn dieser Verrückungen entspricht dem gewöhnlichen Falle, bei dem der Angriffspunkt des Widerstandes vor dem Schwerpunkte liegt. Befände sich derselbe dahinter, so würde sich die Richtung umkehren. Die Spitze erhöbe sich zuerst, senkte sich darauf und drehte sich dann um den Schwerpunkt in der Richtung der Uhrzeiger. In der ganzen Theorie sind alle Winkelschwankungen unter 7° angenommen.

Lp.

---

DE SPARRE. Équation approchée de la trajectoire d'un projectile dans l'air lorsqu'on suppose la résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. C. R. CXIV. 1172-1174.

DE SPARRE. Sur le calcul du coefficient de résistance de l'air lorsqu'on suppose la résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse. C. R. CXIV. 1259-1261.

Für den Luftwiderstand $J$ setzt der Verf.

$$J = \frac{i\varDelta d^2}{p} A(1-ay)\,v^4.$$

Hierin bezeichnen $J$ die Verzögerung des Widerstandes in Metern, $p$ das Gewicht des Geschosses in Kilogrammen, $d$ das Kaliber in Decimetern, $i$ einen von der Gestalt des Geschosses abhängenden Coefficienten, $\varDelta$ die Luftdichte im Abgangspunkte, $A$ einen constanten Coefficienten, $v$ die Geschwindigkeit, $y$ die verticale Höhe des Geschosses über dem Abgangspunkte, $a$ eine auf 0,00008 ge-

schätzte Constante. In der ersten Note erreicht der Verf. durch verschiedene Annäherungen mit Hülfe elementarer Transcendenten fast dieselben Ergebnisse, zu denen Hr. Sabudski mit Hülfe der elliptischen Functionen vermöge der Einteilung der Bahnlinien in drei Bogenabschnitte gelangt war. In der zweiten Note bestimmt der Verf. die Constante $A$ in solcher Weise als eine von der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ und der Minimalgeschwindigkeit $v_m$ (durch ein zwischen diesen Grenzen genommenes, bestimmtes Integral) abhängige Grösse, dass man in ihm an Stelle von $F(v) = Nv^n$ eine empirisch gefundene, continuirliche, für jeden Wert von $v$ anwendbare Function setzt, während man sonst in der École d'application d'Artillerie für $v$ zwischen 0 und 240 m, 240 und 282 m, 282 bis 343 m, 343 und 420 m, endlich oberhalb 420 m bezw. 0, 1, 4, 1, 0 für $n$ setzt. Lp.

---

R. Soreau. Note sur la détermination en grandeur et en position de la flèche des trajectoires. Revue d'Art. XLI. 469-473.

Ist $w$ die Wurfweite, $p$ der Pfeil, $d$ die Distanz des Pfeils vom Abgangspunkte bei der Elevation $\varphi$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v$, so ist für den Wurf im luftleeren Raume $d = \frac{1}{2}w$, $p = \frac{1}{4}w\operatorname{tg}\varphi$. Legt man die Gleichung der Bahnlinie: $y = x\operatorname{tg}\varphi - Ax^2(1+Kx)$ zu Grunde, so gelten, wie der Verf. zeigt, die analogen Beziehungen $d = \lambda w$, $p = \mu w \operatorname{tg}\varphi$, wo $\lambda$ zwischen 0,5 und $1/\sqrt{3} = 0,577$, $\mu$ zwischen 0,25 und $2/3\sqrt{3} = 0,385$ schwankt. Für gegebene Geschütze und gleiche Ladungen und Geschosse sind $\lambda$ und $\mu$ constant. Zwei kleine Tabellen für diese Constanten sind beigegeben. Lp.

---

F. Mola. Die Verlängerung der ballistischen Tabelle. Arch. für Art. XCIX. 188-195.

Die Siacci'schen Tabellen für die Functionen $D(u)$, $J(u)$, $A(u)$, $T(u)$ von $u$ (Siacci, „Balistica“; vergl. auch F. d. M. XXII. 1890. 930) werden für das Argument $D(u)$, von $-1000$ bis 0 um je 10 Einheiten fortschreitend, berechnet und dadurch über die frühere Grenze von $u = 700$ bis $u = 983$ hin ausgedehnt. Lp.

---

F. Mola. Ueber die genaue Lösung des ballistischen Problems für quadratischen Luftwiderstand. Arch. für Art. XCIX. 388-398.

In F. d. M. XXII. 1890. 932 ist über den Aufsatz „Sur la solution exacte du problème balistique" des Hrn. Siacci berichtet, der damals das Luftwiderstandsgesetz in der Form $cv^3$ zu Grunde legte. Hr. Mola führt in seiner zuerst in der Rivista d'artiglieria e di genio 1892 erschienenen Arbeit, von der die Redaction des Archivs für die Artillerie- und Ingenieur-Offiziere eine deutsche Uebersetzung liefert, dieselbe Untersuchungsmethode bei der Annahme $cv^2$ für den Luftwiderstand durch. Lp.

---

von Scheve. Drallgesetze nebst Beispiel zur Ermittelung der Art sowie Erörterung über die Anwendung des veränderlichen Dralls. Arch. für Art. XCIX. 401-432.

Untersuchung der Frage, welchem Gesetze der veränderliche Drall folgen muss, damit die Rotationsbewegung des Geschosses eine gleichförmig beschleunigte werde, bezw. damit der die zunehmende Rotationsgeschwindigkeit bewirkende Druck der Führungsflächen der Felder auf die Führungseinschnitte des Geschosses an jeder einzelnen Stelle der durchlaufenen Rohrlänge eine gleiche Grösse hat. Folgerungen aus den aufgestellten Drallgesetzen und ein Beispiel für die Art der Anwendung der aufgestellten Drallgesetze. Lp.

---

Klussmann. Ueber die Rotationsgeschwindigkeit von Langgeschossen und die Bestimmung der günstigsten Dralllänge. Arch. für Art. XCIX. 433-445.

Bearbeitung einer Abhandlung des Hrn. Sabudski: „Ueber die Winkelgeschwindigkeit rotirender Langgeschosse, St. Petersburg, 1892". Dieselbe leitet in wissenschaftlicher Weise Beziehungen zwischen Geschosslänge und Dralllänge her, die entweder zur Bestimmung des Dralls dienen können, wenn eine bestimmte Geschoss-

länge gegeben ist, oder zur Bestimmung der äussersten zulässigen Geschosslänge, wenn die Dralllänge gegeben ist. Lp.

---

F. Neesen. Photographische Aufzeichnung und Theorie der Geschosspendelung. Arch. für Art. XCIX. 476-500.

---

F. Siacci. Ueber den Abgangsfehlerwinkel und die Methode, denselben zu bestimmen. Arch. für Art. XCIX. 509-515.

Auszugsweise aus der Rivista d'artiglieria e genio, Novemberheft 1891, übersetzt. Ein Verfahren, um den Abgangsfehlerwinkel von dem Fehler frei zu machen, der durch die Verschiebung der Mündung beim Schuss entsteht; mittels desselben kann man auch die Grösse der Erhebung oder Senkung der Mündung im Augenblick des Schusses messen. Lp.

---

E. Strnad. Zur Theorie des Schiessens aus Geschützen. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXIII. 879-886.

Der Verf. legt den Zusammenhang der Grösse der ersten notwendigen Correctur beim Schiessen nach dem sogenannten „Gabelverfahren“ mit den diese Correctur bedingenden Factoren gemäss den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung analytisch dar. Es handelt sich bei dem Gabelverfahren darum, nach der Abgabe des ersten Schusses mit Schiesselementen, die der abgeschätzten Distanz entsprechen, für den folgenden Schuss solche Schiesselemente zu wählen, dass mit grosser Wahrscheinlichkeit in Bezug auf die Einschiesslinie eine Abweichung im entgegengesetzten Sinne als beim ersten Schuss erwartet werden kann. Lp.

N. R. von Wuich. Zur Frage der Bestimmung der Procentzahl zu erwartender Treffer. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXIII. 235-244.

Für militärische Leser wird die Frage des Einflusses des Ein-

schiessens nach den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung in möglichst fasslicher Gestalt behandelt und durch Beispiele erläutert. Wegen der strengen analytischen Lösung verweist der Verf. auf eine demnächstige Veröffentlichung. Lp.

---

R. S. Ball. The theory of permanent screws. (IX[th] memoir on the theory of screws.) Dublin Trans. 40 S.

S. F. d. M. XXII. 1890. 918.

---

F. Chamousset. Nouvelle théorie élémentaire de la rotation des corps. Gyroscope, toupie etc. Paris. 22 S. 8°.

---

A. Hippel. Beitrag zur Bewegung eines Punktes auf einer Kugel. Diss. Marburg. 8°.

---

## B. Hydrodynamik.

Cornelia Fabri. Sulla teorica dei moti vorticosi nei fluidi incompressibili. Tesi di laurea pubblicata negli Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Sunto fatto dall'autrice. Nuovo Cimento (3) XXXI. 135-145, 221-227.

Die Verfasserin nimmt sich vor, die Deformationen einer incompressibeln Flüssigkeit mit Beachtung einer beliebigen Anzahl von Gliedern der Entwickelungen von Verschiebungen nach aufsteigenden Potenzen der Coordinaten zu untersuchen. Es ergiebt sich, dass die Glieder $m^{ter}$ Ordnung eine dreifache Bewegung darstellen, nämlich (vgl. für $m=1$ die bekannten Helmholtz'schen Untersuchungen; für $m=2$ Boggio-Lera, Sulla cinematica dei mezzi continui, Pisa Ann. IV. 53-99, F. d. M. XIX. 1887. 889-891):

a) eine Bewegung, welcher ein Potential zukommt;

b) eine Bewegung, welche durch Vectoren nicht darstellbar ist;

c) eine „Wirbelbewegung $m^{ter}$ Ordnung", welche eine „Drehung" oder „Biegung" genannt werden mag, je nachdem $m$ ungerade oder gerade ist. Ist $O$ der Nullpunkt, $OA$ eine feste Gerade, $P$ ein beliebiger Punkt, und zieht man $PQ$ normal zu $OA$, so bezeichnet man als „Drehung $m^{ter}$ Ordnung" eine Drehung von $P$ um $OA$, welche von einer zur Ebene $AOP$ normalen Verschiebung begleitet wird, deren Grösse dem Producte $PQ \,.\, OP^{m-1}$ proportional ist; als „Biegung $m^{ter}$ Ordnung" eine zu $OA$ parallele Verschiebung, deren Grösse dem Producte $PQ^2 \,.\, OP^{m-2}$ proportional ist. Sowohl die Drehung als die Biegung $m^{ter}$ Ordnung können durch Vectoren dargestellt werden.

Es folgt hieraus, dass die gesamte Bewegung in $3m$ Teilbewegungen zerfällt, d. i. in eine Translation, in $m$ Bewegungen, die je ein Potential zulassen; in $m-1$ nicht durch Vectoren darstellbare Bewegungen; endlich in $m$ Wirbelbewegungen.

Es werden dann die Ausdrücke der Wirbelbewegungen durch diejenigen niederer oder höherer Ordnung aufgestellt und verschiedene Folgerungen aus diesen Formeln entwickelt. Vi.

---

R. Reiff. Ueber Wirbelbewegung reibender Flüssigkeiten. Böklen Mitt. V. 33-51.

Bekanntlich ist ein Wirbel in einer reibungslosen Flüssigkeit unzerstörbar, sobald die wirkenden Kräfte ein Potential haben. Demnach kann von einer Induction der Wirbel auf einander in dem Sinne wie bei elektrischen Strömen keine Rede sein. Anders verhalten sich die reibenden Flüssigkeiten. Bei diesen ist der Ausdruck $qd\omega$ nicht mehr unabhängig von der Zeit. Hier ist es also möglich, dass eine Induction von Wirbeln auf einander oder eines Wirbels auf sich selbst stattfindet.

Im Abschnitt I seiner Arbeit bestimmt der Verfasser, von den Differentialgleichungen der Bewegung ausgehend, einen Ausdruck für die Mächtigkeit eines Wirbels.

Im zweiten Abschnitt werden die Integralgleichungen aufgestellt.

Nachdem dann im Abschnitt III ein Ausdruck für die Energie

abgeleitet ist, ergiebt sich für die Wärmeentwickelung ein analoger Ausdruck wie bei elektrischen Strömen; auch zu der Poynting'schen Formel für die Wanderung der Energie im magnetelektrischen Felde ergiebt sich ein Analogon.

Zum Schluss wird die Induction der Wirbel untersucht und ihre Analogie zu den entsprechenden elektrischen Erscheinungen hervorgehoben. F. K.

---

M. J. M. Hill. Note on the motion of a fluid ellipsoid under its own attraction. Lond. M. S. Proc. XXIII. 88-95.

Der Verfasser verfolgt in erster Linie das Ziel, die Componenten $u$, $v$, $w$ der Geschwindigkeit in der von Clebsch entwickelten Form darzustellen:

$$u=\frac{\partial\chi}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\chi}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial\chi}{\partial z}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Er giebt zunächst ohne Angabe der Mittel, welche ihn zu der Formel geführt haben, die Ausdrücke für $\chi$, $\lambda$, $\psi$, beweist dann, dass diese Ausdrücke die beiden Gleichungen

$$\frac{d\psi}{dt}=0 \quad\text{und}\quad \frac{d\lambda}{dt}=0$$

erfüllen, und zeigt ferner, dass wirklich

$$u=\frac{\partial\chi}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ist.

Mit den dabei verwendeten Hülfsmitteln werden dann noch folgende Sätze bewiesen, deren Kenntnis der Verfasser nach seiner eigenen Mitteilung Herrn A. E. H. Love verdankt:

1) Alle Flüssigkeitsteilchen, welche sich zu irgend einer Zeit auf einer Tangentialebene eines mit der Begrenzung concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoids befinden, behalten diese Eigenschaft während des ganzen Verlaufs der Bewegung, und zwar bleibt dasselbe Flüssigkeitsteilchen im Berührungspunkt.

2) Diejenigen Cylinder, welche ein Ellipsoid von der eben erwähnten Art einschliessen, und deren Axen parallel den Wirbellinien sind, enthalten in jedem Augenblick dieselben Flüssigkeitsteilchen. F. K.

---

D. Edwardes. Steady motion of a viscous liquid in which an ellipsoid is constrained to rotate about a principal axis. Quart. J. XXVI. 70-78.

D. Edwardes. Motion set up in viscous liquid by a rotating cylinder. Quart. J. XXVI. 157-168.

Die erste Abhandlung behandelt die stationäre Bewegung, welche in einer reibenden Flüssigkeit bei der Rotation eines Ellipsoids um eine seiner Hauptaxen stattfindet.

Bezieht man die Lage und die Geschwindigkeitscomponenten eines Flüssigkeitsteilchens auf die Axen des Ellipsoids, bedeutet ferner $\lambda$ die grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0,$$

ist

$$\frac{1}{p^2}=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2},$$

$$P_\lambda=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

$$A_\lambda=\int_\lambda^\infty\frac{d\psi}{(a^2+\psi)\,P},\quad B_\lambda=\int_\lambda^\infty\frac{d\psi}{(b^2+\psi)\,P},\quad C_\lambda=\int_\lambda^\infty\frac{d\psi}{(c^2+\psi)\,P},$$

$$B=B_{\lambda=0},\quad C=C_{\lambda=0},$$

$$\sigma=\frac{\omega}{b^2B+c^2C},$$

so werden die Componenten der Geschwindigkeit

$$u=2\sigma\frac{p^2yz}{P_\lambda}\left\{\frac{b^2}{b^2+\lambda}-\frac{c^2}{c^2+\lambda}\right\}\frac{x}{a^2+\lambda},$$

$$v=2\sigma\frac{p^2yz}{P_\lambda}\left\{\frac{b^2}{b^2+\lambda}-\frac{c^2}{c^2+\lambda}\right\}\frac{y}{b^2+\lambda}-\sigma(b^2B_\lambda+c^2C_\lambda)z,$$

$$w=2\sigma\frac{p^2yz}{P_\lambda}\left\{\frac{b^2}{b^2+\lambda}-\frac{c^2}{c^2+\lambda}\right\}\frac{z}{c^2+\lambda}+\sigma(b^2B_\lambda+c^2C_\lambda)y.$$

Für den Druck ergiebt sich, wenn $\Pi_0$ seinen Wert im Unendlichen bezeichnet, der Ausdruck

$$\frac{\Pi-\Pi_0}{\varrho}=4\nu\sigma(b^2-c^2)\frac{p^2yz}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)P_\lambda}.$$

Das Kräftepaar, welches erforderlich ist, um das Ellipsoid in gleich-

mässiger Bewegung zu erhalten, ist

$$K = \frac{32}{5} \mu\pi\sigma(b^2+c^2).$$

Im Anschluss an den allgemeinen Fall wird dann noch der besondere der Kugel und derjenige des elliptischen Cylinders einzeln behandelt.

In der zweiten Abhandlung kommt der Verfasser auf den letzteren Fall noch einmal zurück und behandelt dann auch den Fall, dass ein Cylinder in der Flüssigkeit rotirt, dessen Querschnitt durch Inversion aus der Ellipse entsteht. F. K.

---

F. Kötter. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. (Fortsetzung.) J. für Math. CIX. 89-111.

Ueber diese Fortsetzung der Arbeit des Herrn F. Kötter ist bereits im vorigen Jahrgang der Fortschritte (XXIII. 1891. 977 ff.) gleichzeitig mit dem ersten Teile der Arbeit berichtet. Wn.

---

G. Schebujeff. Zur Frage nach der Verteilung der Temperatur in einer incompressiblen strömenden Flüssigkeit und den von ihr umspülten Körpern. Kasan Ber. (2) (2) II. No. 2. 64-93 und No. 4. 173-206. (Russisch.)

Nachdem der Verfasser in seiner Abhandlung die Differentialgleichungen gefunden hat, der die Function genügen muss, welche die Verteilung der Temperatur in einer strömenden Flüssigkeit und den von ihr umspülten Körpern ausdrückt, macht er den Versuch, die Differentialgleichungen für einige specielle Fälle der stationären Bewegung zu integriren. Jk.

---

W. Voigt. Bewegung eines Flüssigkeitsstromes über einem gewellten Grunde. Gött. Nachr. 1892. 490-493.

Der Verfasser giebt eine neue Anwendung der Helmholtz-Kirchhoff'schen Methode. Die Abhängigkeit der Grösse

$$\zeta = \frac{u+iv}{u^2+v^2}$$

von

$$\omega = \varphi + i\psi$$

wird bei diesem Beispiel durch die Gleichung

$$\zeta = \wp(\omega) - e_2$$

dargestellt, mit

$$e_1 = -\tfrac{1}{3}a + ib,\ e_2 = \tfrac{2}{3}a,\ e_3 = -\tfrac{1}{3}a - ib.$$

Als Grenzen des Gebietes $\omega$ werden genommen

$$\psi = \frac{\omega'_2}{2} = \omega_3 - \omega_1$$

und $\psi = \psi_1$, wo $0 < \psi_1 < \frac{\omega'_2}{2}$ ist. Ersterer entspricht in dem von Flüssigkeit erfüllten Gebiet die freie, letzterer die feste Grenze. Es wird

$$x = -\frac{\sigma'}{\sigma}(\varphi) - \tfrac{1}{2}\frac{\wp'(\varphi)}{\wp(\varphi) - \wp(i\psi)} - \frac{2a}{3}\varphi,$$

$$iy = -\frac{\sigma'}{\sigma}(i\psi) + \tfrac{1}{2}\frac{\wp'(i\psi)}{\wp(\varphi) - \wp(i\psi)} - \tfrac{2}{3}ai\psi.$$

Die Geschwindigkeit erhält man aus

$$\xi = \tfrac{1}{4}\frac{\wp'(\varphi)^2 + (\wp'(i\psi))^2}{\wp(\varphi) - \wp(i\psi)} - (\wp(\varphi) + \wp(i\psi)) - \tfrac{2}{3}a,$$

$$\eta = \frac{i}{2}\frac{\wp'(\varphi)\wp'(i\psi)}{\wp(\varphi) - \wp(i\psi)},$$

$$u = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2},\quad v = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

F. K.

---

Lord RAYLEIGH. On the question of the stability of the flow of fluids. Phil. Mag. (5) XXXIV. 59-70.

Während die Stokes'sche Theorie des zähen Fliessens eine ganz zufriedenstellende Rechenschaft von den Beobachtungthatsachen in Capillarröhren giebt, existirt gegenwärtig keine Theorie zur Erklärung des vollständigen Wechsels in den Gesetzen des Durchflusses bei Röhren von grösserem Durchmesser und bei nicht ganz geringen Geschwindigkeiten. Der Zusammenhang zwischen der Aenderung in dem Gesetze des Widerstandes und dem Uebergange

aus der regelmässig geschichteten zur wirbelnden Bewegung ist von Hrn. Osborne Reynolds erfolgreich nachgewiesen worden. Sein Werk giebt zu der Vermutung Anlass, dass bei der Abwesenheit der Zähigkeit die geschichtete Bewegung instabil sein dürfte, und dass sie in kleinen Röhren und bei geringen Geschwindigkeiten nur in Folge der stetigen Einwirkung der Zähigkeit, die dann vorteilhaft sich geltend macht, stabil wird. In einer früheren Abhandlung (Lond. M. S. Proc. X, F. d. M. XII. 1880. 711) hat der Verf. jedoch gefunden, dass beim Fehlen der Zähigkeit das geschichtete Fliessen zwischen zwei parallelen Wänden (zweidimensionale Bewegung) nicht instabil ist, falls das Gesetz des Flusses so beschaffen ist, dass die die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Schichten darstellende Curve vollständig von einer einzigen Krümmung ist; oder genauer: wenn die Abweichung von der regelmässig geschichteten Bewegung als Function der Zeit zu $e^{int}$ proportional wäre, so könnte $n$ keinen imaginären Bestandteil haben. Andererseits, wenn die Bedingung betreffs der Krümmung verletzt wird, so kann $n$ einen imaginären Bestandteil haben, und die resultirende Bewegung ist exponentiell instabil. Die Schwierigkeit entsteht also darüber, wie man, wenn die fragliche Untersuchung auf eine Flüssigkeit von unendlich kleiner Zähigkeit angewandt werden kann, die beobachtete Instabilität bei mässigen Geschwindigkeiten erklären kann. Von den möglichen Erklärungen, auf die der Verf. verfiel, mögen besonders die folgenden erwähnt werden: 1) Es ist möglich, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen der Bewegung in zwei Dimensionen und derjenigen in einer Röhre von kreisförmigem Querschnitte besteht, an der die Beobachtungen gemacht sind. 2) Es ist möglich, dass die Untersuchung, bei der die Zähigkeit vernachlässigt wird, auf den Grenzfall einer zähen Flüssigkeit, wenn die Zähigkeit unendlich klein wird, unanwendbar ist. Der Hauptgegenstand des gegenwärtigen Artikels besteht in der Prüfung der ersten dieser beiden Annahmen, und das Resultat ist der Nachweis, dass für den Fall der Röhre mit kreisförmigem Querschnitt, wie auch für den zweidimensionalen, keine Störung der stetigen Bewegung exponentiell instabil ist, falls die Zähigkeit gänzlich vernachlässigt wird. Diese Erklärung ist also ausgeschlossen,

und die Abhandlung geht zur Betrachtung der anderen Alternative über; hierbei wird besonders die Ansicht von Lord Kelvin besprochen, mit welcher der Verfasser nicht übereinstimmt.

Gbs. (Lp.)

J. McCowan. On the theory of long waves and its application to the tidal phenomena of rivers and estuaries. Phil. Mag. (5) XXXIII. 250-265.

Die Bewegung langer Wellen in einem Kanale von beliebigem gleichförmigem Querschnitte wird hier sehr gründlich behandelt. Für den Fall von Wellen, die nur nach einer einzigen Richtung fortgepflanzt werden, wird die vollständige Lösung gegeben, und die allgemeine Fortpflanzung in beiden Richtungen wird in endlichen Gliedern für ein System verschiedener Formen des Kanals erhalten. Man nehme an, ein horizontaler Kanal von irgend welchem gleichförmigen Querschnitte sei zu Beginn bis zu einer gewissen Tiefe mit Flüssigkeit gefüllt, und diese Flüssigkeit werde in einer solchen Weise gestört, dass alle Teilchen, welche am Anfange in einer beliebigen horizontalen oder verticalen Linie sich befinden, die zur Längsrichtung des Kanals senkrecht ist, eine gemeinsame horizontale Verrückung erleiden und dann freigelassen werden mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit parallel der Länge des Kanals; die Verrückung und die Geschwindigkeit seien dabei aber derartig, dass die Neigung der Bahn jedes Teilchens gegen die Längsrichtung des Kanals überall sehr klein und die Bewegung stetig ist. Solche Störung wird im allgemeinen eine Wellenbewegung veranlassen, bei welcher „lange Wellen" mit parallelen Kämmen nach beiden Seiten längs des Kanals fortgepflanzt werden. Die $x$-Axe werde parallel der Längsrichtung des Kanals an seinem Boden angenommen; $\xi$ sei zur Zeit $t$ die Abscisse einer Ebene senkrecht zu dieser Axe, so dass alle Teilchen dieser Ebene vor der Störung dieselbe Abscisse $x$ hatten; $z$ und $h$ mögen die Höhe der freien Oberfläche bezw. nach und vor der Störung bedeuten. Da nun die Gestalt des Querschnittes nach Annahme gegeben ist, so ist der Flächeninhalt des Schnittes durch die Ebene $\xi$ als bekannte

Function $\varphi(z)$ von $z$ anzusehen. Die Continuitätsbedingung ist

$$(1) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\varphi(h)}{\varphi(z)},$$

die $x$-Componente der Geschwindigkeit:

$$(2) \qquad u = \frac{d\xi}{dt};$$

nimmt man dann noch $\varrho$ als die Dichte und $p$ als den Druck in einem Punkte auf der Ebene $\xi$ an, so ist die dynamische Gleichung:

$$(3) \qquad \varrho \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\varphi(z)}{\varphi(h)} \frac{dp}{dx}.$$

Da die verticale Componente der Beschleunigung zu vernachlässigen ist, so hat man $dp = g\varrho dz$ für Punkte auf derselben horizontalen Ebene; somit wird (3) zu

$$(4) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -g \frac{\varphi(z)}{\varphi(h)} \frac{dz}{dx}.$$

Durch Differentiation nach $x$ geht die Gleichung (4) mit Benutzung von (1) über in

$$(5) \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi(h)}{\varphi(z)}\right)^2 \varphi'(z) \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dx} g\varphi(z) \frac{dz}{dx}.$$

Die besonderen Formen, welche diese Gleichungen annehmen, wenn der Querschnitt rechteckig ist, wo dann $\varphi(z)$ zu $z$ proportional wird, werden zunächst niedergeschrieben und die beim Gebrauche der Gleichungen anzuwendenden Vorsichtsmassregeln dabei angemerkt. Der wesentliche Zug der Theorie ist die Bewegung in parallelen Schnitten. Die allgemeine Lösung für die Fortpflanzung von Wellen in einer Richtung wird darauf erhalten. Setzt man $z = F_0(x - \alpha t)$, $dz/dt = -\alpha dz/dx$, so wird die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \beta \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dx} \alpha^2 \beta \frac{dz}{dx}$$

identisch mit (5), falls

$$\beta = \left(\frac{\varphi(h)}{\varphi(z)}\right)^2 \varphi'(z) \text{ und } \alpha^2\beta = g\varphi(z)$$

ist, so dass $\alpha = +\{\varphi(z)/\varphi(h)\} / \{g\varphi(z)/\varphi'(z)\}^{\frac{1}{2}}$, wo man nur den

einen Wert von $\alpha$ nimmt. Dieser Wert, in $F_0(x-\alpha t)$ eingesetzt, giebt die vollständige Lösung für eine vorrückende Wellenreihe. Das Resultat kann so umgewandelt werden, dass es von $\xi$ abhängt statt von $x$; dann ist der neue Wert:

$$(8) \qquad z = F\{\xi-(\sqrt{g}\,\psi(z)-k)t\},$$

wo

$$\psi(z) = \int\left[\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}}-\tfrac{1}{2}\frac{\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\sqrt{\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}}\right]dz,$$

der Buchstabe $F$ eine besondere Form von $F_0$ bedeutet und $kt$ anstatt einer willkürlichen Function von $t$ ohne Verzicht auf Allgemeinheit geschrieben ist. Einige wichtige Anwendungen der Gleichung werden dann gegeben. Ein besonderer Fall von grossem Interesse wird erhalten, indem man $\varphi(z)$ so annimmt, dass

$$\left(\frac{\varphi(h)}{\varphi(z)}\right)^2\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{c}$$

ist. Dies giebt, wenn man $A$ für $\varphi(h)$ setzt und $b$ für die Breite in dem mittleren Spiegel $h$:

$$\xi = f_1(x-Vt)+f_2(x+Vt),$$

wo $V^2 = gc = gA/b$. In diesem Falle geht die Fortpflanzung natürlich nach beiden Seiten. Andere Lösungen in endlichen Gliedern werden auch erörtert. Die Abhandlung schliesst mit Anwendungen auf die Fluterscheinungen in Flüssen und Buchten, wobei besonders die Aufmerksamkeit auf die von Airy gegebenen Lösungen gelenkt wird (Tides and waves, Encyclopaedia Metropolitana, 1845). Seine Folgerungen werden bestätigt, mit Ausnahme derer in Bezug auf die Subdivision der Flutwelle in dem Masse, wie sie in einem Flusse hinaufläuft. Die Erklärung dieser Eigentümlichkeit muss anderswo gesucht werden, als in den Gleichungen. Gbs. (Lp.)

J. Boussinesq. Calcul de la diminution qu'éprouve la pression moyenne sur un plan horizontal fixe, à l'intérieur du liquide pesant remplissant un bassin et que viennent agiter des mouvements quelconques de houle ou de clapotis. C. R. CXIV. 937-940, Almeida J. (3) I. 285-288.

Die Druckbestimmung für eine horizontale Ebene beruht auf folgender Ueberlegung. Die Grösse der verticalen Bewegung in einem über der Ebene als Basis errichteten Cylinder wird in dem Zeitelement $dt$ vermehrt um die Grösse, welche dem Ueberschuss des Drucks $p$ über den hydrostatischen Druck $p_0$ an der Basis entspricht, und um die Bewegungsgrösse der in den Cylinder eintretenden Flüssigkeit. Herr Boussinesq glaubt, von den an der Seitenwand des Cylinders eintretenden Flüssigkeitsteilchen absehen zu können, und gelangt deshalb zu der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho g \sigma}\frac{dQ}{dt} - \frac{1}{g}\int_\sigma w^2 \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_\sigma \frac{p-p_0}{\varrho g}\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Integrirt man nun zwischen zwei Zeiten, in welchen $Q$ denselben Wert hat, so erkennt man, dass der Mittelwert von $\frac{p_0-p}{\varrho g}$ gleich dem Mittelwert von $\frac{w^2}{g}$ ist.

F. K.

---

J. Boussinesq. Sur une légère correction additive qu'il peut y avoir lieu de faire subir aux hauteurs d'eau indiquées par les marégraphes, quand l'agitation houleuse ou clapoteuse de la mer atteint une grande intensité: Cas d'une mer houleuse. C. R. CXV. 77-82. Cas d'une mer clapoteuse. C. R. CXV. 149-152.

Man nimmt allgemein an, dass das beste Mittel, die thatsächliche Höhe des Meeresspiegels zu bestimmen, wie er ohne das Vorhandensein von Wellen erscheinen würde, darin besteht, dass man das Niveau in einem seitlichen Bassin beobachtet, welches mit dem Meer communicirt, und zwar in hinreichend einfacher Weise, dass sich die Gezeiten in ihrer vollständigen Höhe zeigen können, und doch hinreichend schwierig, dass man kaum die von den Wogen herrührenden Schwankungen des Niveaus bemerkt.

Der Verfasser leitet zunächst ab, dass die mittlere Höhe des Niveaus im Bassin gemessen wird durch die Grösse des mittleren Druckes in der Communicationsöffnung. Für den Fall fortschrei-

tender Wellen (houle) verwendet der Verfasser zur Bestimmung des mittleren Druckes die in der eben besprochenen Abhandlung (C. R. CXIV. 937) gegebene Formel und gelangt dadurch zu folgender Correction:

$$\Delta = \frac{\pi \eta^2}{2L}$$

($\eta$ Höhe, $L$ Länge der Woge).

Auf ähnliche Weise ergiebt sich für stehende Wellen

$$\Delta = \frac{\pi \eta^2}{4L} e^{-\frac{2\pi z}{L}}$$

($z$ Tiefe der Oeffnung unter dem Spiegel). F. K.

J. Boussinesq. Sur le calcul théorique approché du débit d'un orifice en mince paroi. C. R. CXIV. 704-710.

J. Boussinesq. Débit des orifices circulaires et sa répartition entre leurs divers éléments superficiels. C. R. CXIV. 807-812.

J. Boussinesq. Écoulement par les orifices rectangulaires, sans contraction latérale: calcul théorique de leur débit et de sa répartition. C. R. CXIV. 868-873.

Die exacten Grundlagen der Untersuchungen über den Ausfluss durch kreisförmige Oeffnungen sind folgende:

1) Fliesst durch ein Element der Oeffnung in der Zeiteinheit die Quantität $dq$, so ist für das Innere des Gefässes das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dq}{r}.$$

2) Am Rande ist die Normalcomponente gleich 0, und die Tangentialcomponente hat einen constanten Wert $V_0$.

3) Ist für irgend ein Element $d\sigma'$ der durchbohrten Wand die Geschwindigkeit $V$, so besteht für den Ausflusscoefficienten $m$ die Gleichung

$$(1) \qquad m = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \int \frac{V^2}{V_0^2} \frac{d\sigma'}{\sigma},$$

wo $\sigma$ die Grösse der Oeffnung bezeichnet und das Integral über die ganze feste Wand ausgedehnt ist, von welcher der Verfasser annimmt, dass sie sich ins Unendliche erstreckt.

Für die kreisförmige Oeffnung mit dem Radius $R$ setzt nun der Verfasser die Normalcomponente in der Entfernung $r$ vom Mittelpunkte gleich $V_0 f\left(\frac{r^2}{R^2}\right)$. Für die Function $f(s)$ glaubt der Verfasser, weil sie für $s = 1$ gleich Null sein muss, einen Ausdruck von der Form

$$f(s) = \{c_0 + sc_1 + s^2 c_2 \ldots\}(1-s) = \sum_{n=0} c_n s^n (1-s)$$

setzen zu dürfen. Den Coefficienten $c_0$ bestimmt er aus der Erfahrung für den Wert der Geschwindigkeiten im Mittelpunkt auf 0,632. Der Coefficient $m$ ist dann offenbar

$$(3) \qquad m = \int_0^1 f(s)ds = \Sigma \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}.$$

Für einen Punkt der Wand, welcher sich in der Entfernung $R' = \frac{1}{\sqrt{\beta}} R$ vom Mittelpunkt der Oeffnung befindet, ist ferner:

$$(8) \qquad \frac{V}{V_0} = \frac{\beta}{2}\left\{\int_0^1 f(s)ds + 3(\tfrac{1}{2})^2\beta\int_0^1 sf(s)ds + 5\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\beta^2\int_0^1 s^2 f(s)ds + \cdots\right\}.$$

Für den Rand der Oeffnung ergiebt sich:

$$(15) \quad 1 = \frac{V}{V_0} = \frac{4}{3\pi}\left\{c_0 + \frac{7}{15}c_1 + \frac{157}{15.35}c_2 + \frac{803}{15.35.7}c_3 + \cdots\right\}.$$

Indem man die Gleichung (15) etwas anders schreibt und den Wert $\frac{V}{V_0}$ aus Formel (8) in Formel (1) einsetzt, erhält man die beiden Gleichungen:

$$(16) \qquad \frac{7}{15}c_1 + \frac{157}{15.35}c_2 + \frac{803}{15.35.7}c_3 + \frac{62417}{15.35.63.11}c_4 + \frac{293327}{27.49.11^2.13}c_5 + \frac{1077385}{9.49.11^2.13^2}c_6 + \cdots = \frac{3\pi}{4} - c_0,$$

$$(17) \qquad m = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} \int_0^1 \Big\{ m + 3(\tfrac{1}{2})^2 \beta \, \Sigma \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} + 5(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4})^2 \beta^2 \, \Sigma \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \cdots \Big\}^2 d\beta.$$

Zwischen $m$ und den Coefficienten $c$ erhält man noch eine Gleichung, wenn man in (8) $\beta = 1$ und $V = V_0$ setzt:

$$(18) \qquad m + 3(\tfrac{1}{2})^2 \Sigma \frac{c_n}{(n+2)(n+3)} + 5(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4})^2 \Sigma \frac{c_n}{(n+3)(n+4)} + \cdots = 2,$$

welche natürlich als Folge von (3) und (16) anzusehen ist.

Die bisher gemachte Annahme über die Function $f(s)$ war nach Meinung des Referenten mehr als bedenklich, weil man gar nicht wissen kann, ob $f(s)$ für $s = 1$ mit $(1-s)$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Sie wird an Willkür noch bei weitem übertroffen durch die Annahme, dass ausser $c_0$ nur ein einziger der Coefficienten $c$ einen von Null verschiedenen Wert haben soll. Welcher dieser Coefficienten das ist, berechnet der Verfasser durch Probiren, indem er der Reihe nach annimmt, dass $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_6$ von Null verschieden sind. Aus Formel (3) berechnet er die zugehörigen Werte $m$ und setzt diese Werte in Formel (17) ein. In den Fällen 1, 2, 3, 4 wird die eine Seite zu gross, im sechsten und in den folgenden dagegen zu klein; angenähert stimmen beide Seiten überein, wenn $c_5$ als von Null verschieden angenommen wird. Die Grösse $c_5$ wird dann 12,2329,

$$f(s) = (0{,}632 + 12{,}2329 \,.\, s^5)(1-s),$$
$$m = 0{,}6073.$$

Referent hat aus den Betrachtungen des Verfassers nicht die Ueberzeugung gewinnen können, dass durch die Function $f(s)$ auch nur angenähert der Durchfluss des Wassers durch die Oeffnung dargestellt werde.

Das einzige Resultat der beiden Abhandlungen, welches dem Referenten einwandfrei erscheint, ist die Beziehung

$$m > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} m^2,$$

aus welcher folgt $m > 0{,}536$; aber diese ist nicht neu. Referent

hat sie schon vor Jahren ohne die bedenklichen Annahmen des Verfassers abgeleitet (Hoppe Arch. (2) V. 392-417, F. d. M. XIX. 1887. 1004). Dass sich auch eine obere Grenze für $m$, nämlich 0,71, ohne Zuhülfenahme besonderer Voraussetzungen über $f(s)$ bestimmen lässt, hat der Verfasser übersehen.

In der dritten Abhandlung wendet der Verfasser seine Methode mit den erforderlichen Abänderungen auf den schmalen Spalt an. Wenn es erlaubt sein mag, bei einem auf strengem Wege unlösbaren Probleme, wie es der Ausfluss durch kreisförmige Oeffnungen ist, durch Annahmen, die nicht ganz streng gerechtfertigt sind, eine angenäherte Lösung zu versuchen, so ist ein derartiges Verfahren doch zu verwerfen, sobald es eine strenge Lösung giebt. Für den Fall des Spaltes hat aber Lord Rayleigh auf Grund von Kirchhoff's Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen eine strenge Lösung gegeben (Phil. Mag. (5) II. 1876. 441-447). Dieselbe lässt erkennen, dass die Annahme, nach der die Normalcomponente der Geschwindigkeit mit der Entfernung vom Rande unendlich klein von der ersten Ordnung wird, unrichtig ist. F. K.

---

J. Boussinesq. Sur la théorie de l'écoulement des liquides par les orifices en mince paroi circulaires ou rectangulaires allongés; calcul approché du débit et de sa répartition entre les divers éléments superficiels de l'orifice. Almeida J. (3) I. 265-285.

Diese Abhandlung umfasst den Inhalt der drei Aufsätze, über welche vorstehend berichtet ist. Lp.

---

H. Parenty. Sur le calcul pratique de la dimension des orifices d'écoulement de la vapeur d'eau saturée dans l'atmosphère, en régime constant et en régime varié, application aux soupapes de sûreté. C. R. CXV. 109-111.

Eine Formel für den Ausfluss von Gasen, welche der Verfasser früher angegeben hatte (C. R. CXIII. 184), wird auch als

gültig für gesättigte Dämpfe angesehen und zur Bestimmung der Dimensionen von Oeffnungen zunächst für den stationären Zustand angewandt.

Ist der Zustand nicht stationär, so ist der Druck nicht constant, sondern es gilt eine gewisse Differentialgleichung für den Druck als Function der Zeit, die sich übrigens nicht integriren lässt. Der Verfasser schlägt deshalb vor, sich einer graphischen Darstellung der Bewegung zu bedienen. F. K

M. Margules. Luftbewegung in einer rotirenden Sphäroidschale bei zonaler Druckverteilung. Wien. Ber. CI. 597-626.

In der vorliegenden Abhandlung handelt es sich um die Aufgabe, in einer rotirenden sphäroidalen Luftschale von constanter Temperatur den Druck und die Geschwindigkeit für jede Zeit zu bestimmen, wenn sie zu irgend einer Zeit als zonale Functionen gegeben sind.

Nachdem zunächst die entsprechende Aufgabe in Anschluss an Lord Rayleigh für eine ruhende Kugel gelöst ist, wendet sich der Verfasser seiner eigentlichen Aufgabe zu. Es werden zuerst die Gleichungen angegeben, welche gelten, wenn man von der Reibung absehen darf. Dann werden particuläre Lösungen angegeben, welche Schwingungen darstellen, für deren Dauer sich eine Gleichung in Form eines gleich Null gesetzten Kettenbruches ergiebt.

Weiter werden die entsprechenden Untersuchungen mit Berücksichtigung der Reibung angestellt. Es wird die ausfallende Bewegung bestimmt, und dann werden die erlöschenden Schwingungen berechnet. F. K.

A. Caprilli. La trasformazione della energia nel movimento di un globo aerostatico e in generale di un corpo qualunque immerso in un fluido. Ven. Ist. Atti. (7) III. 857-880.

Der Verfasser nennt Zustandsarbeit einer Gasmasse (Lavoro

di stato) das über die Masse ausgedehnte Integral

$$\iiint p\, dx\, dy\, dz.$$

Es wird der Ausdruck berechnet für den Fall, dass die Masse an der Grenze dem Druck der Atmosphäre ausgesetzt ist, welcher nach dem barometrischen Gesetz veränderlich ist. Dann wird die Zunahme der Grösse berechnet für den Fall, dass der Ballon mit Gas steigt. Auch der Variation der Erdschwere mit der Entfernung von der Oberfläche sucht der Verfasser Rechnung zu tragen. Namentlich wird die Beziehung der in Frage stehenden Arbeit zu der Arbeit einer Kraft untersucht, welche der Verfasser totale Steigekraft (forza ascensionale totale) nennt, welche nach oben gerichtet und gleich dem Gewicht der im Ballon befindlichen Gasmasse ist.

„Die Arbeit der Steigekraft des Körpers ist bei einer Bewegung gleich der Variation der Zustandsarbeit.“ F. K.

---

R. Klimpert. Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). I. Band: Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhren und Röhrenleitungen bei constanter sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. VIII + 364 S. 8°.

---

J. Pollard et A. Dudebout. Architecture navale. Théorie du navire. Tome III: Dynamique du navire: mouvement de roulis sur houle, mouvement rectiligne horizontal direct. (Résistance des carènes.) Paris. Gauthier-Villars et Fils.

---

S. Tessitore. Trattato teorico-pratico d'idraulica applicata. 2 parti. Napoli.

---

R. A. Sampson. On Stokes's current-function. London Phil. Trans. CLXXXVII. 449-518.

Referat in F. d. M. XXIII. 1891. 982.

---

# Capitel 5.

## Potentialtheorie.

P. Paci. Sopra le derivate terze della funzione potenziale di una superficie. Quarto centenario Colombiano. Atti della R. Università di Genova. Tip. del R. Istituto Sordo-Muti. 593-597.

Bestimmung der Ausdrücke der nach der Normale und nach den Hauptschnitttangenten einer Niveaufläche genommenen Ableitungen der Potentialfunction. Vi.

---

O. Biermann. Bemerkung zur Bestimmung des Potentials endlicher Massen. Prag. Math. Ges. 1892. 19-21.

Die Methode, mittelst deren Dirichlet das Potential eines homogenen Ellipsoids ableitet, lässt sich auf beliebige Körper anwenden. Dass man trotzdem das Potential endlicher Massen nur in sehr wenigen Fällen berechnen kann, hat in Folgendem seinen Grund. In dem Dirichlet'schen discontinuirlichen Factor

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi\cos(\sigma\varphi)}{\varphi}\,d\varphi$$

ist der Parameter $\sigma$ so zu bestimmen, dass innerhalb des Körpers, dessen Potential gesucht wird, sein absoluter Wert kleiner als 1 ist. Diese Bestimmung gestaltet sich einfach, wenn die Begrenzung der anziehenden Masse, wie beim Ellipsoid, durch eine einzige Gleichung gegeben ist. Wenn aber die Masse durch zwei nicht zusammenhängende Flächen begrenzt wird, liegt die Hauptschwierigkeit der Arbeit in der Ermittelung von $\sigma$. Dies wird des näheren erläutert. Wn.

---

M. Gebbia. Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito. Palermo Rend. VI. 196-207.

Ein Nachtrag zu der gleich betitelten Abhandlung in Palermo Rend. IV (F. d. M. XXII. 1890. 982). Zunächst vereinfacht der Verf. ein Beweisverfahren der früheren Arbeit und berichtigt zwei

Zeichenfehler. Sodann ergänzt er seine früheren Betrachtungen durch die Untersuchung der Potentialfunctionen von Massen, deren Dichtigkeit in dem ganzen Raume eine Potentialfunction der Linie oder eine erste oder zweite Ableitung solcher Function ist. Zuletzt zeigt er, dass unter den von ihm in diesen Arbeiten untersuchten Functionen diejenigen mit zwei Indices, d. h. für welche die Dichtigkeit eine zweite Ableitung einer Potentialfunction ist, zum Unterschied von den übrigen (mit Ausnahme einer einzigen) die Eigenschaft besitzen, sich im Unendlichen wie die gewöhnlichen Potentialfunctionen zu verhalten. Daraus ergiebt sich, dass die charakteristischen Eigenschaften diese letzteren Functionen eindeutig bestimmen, wie bei den gewöhnlichen Potentialfunctionen.

Lp.

A. Wernicke. Beiträge zur Theorie der centro-dynamischen Körper. Pr. (No. 687) Neues Gymn. Braunschweig. 36 S. 4°.

Wenn zwei Massenpunkte eine Kraft auf einander ausüben, die in der Verbindungslinie beider wirkt, ferner den Massen und irgend einer Function $\varphi(\varrho)$ der Entfernung proportional ist, so fragt es sich: welche Form muss $\varphi$ haben, damit es möglich ist, die Anziehung eines Körpers auf einen beliebigen Punkt zu ersetzen durch die Anziehung eines festen Punktes, in dem die Masse des Körpers vereinigt ist? Derartige Körper nennt der Verfasser mit Thomson und Tait centrobarische Körper; ihrer Untersuchung ist der vorliegende Aufsatz gewidmet. Zunächst wird gezeigt, dass, wenn bei dem elementaren Beschleunigungsgesetz $\varphi(\varrho)$ irgend ein centro-dynamischer Körper $K$ vorhanden ist, es stets auch concentrisch geschichtete Kugeln giebt, die bei demselben Gesetze in Bezug auf ihren Mittelpunkt centro-dynamisch sind. Soll diese Eigenschaft concentrisch geschichteter Kugeln bei beliebiger Lage des angezogenen Punktes ausserhalb der äusseren Grenzkugel bestehen, so muss $\varphi(\varrho)$ die Form haben;

$$(1) \qquad \varphi(\varrho) = A\varrho + \frac{B}{\varrho^2}.$$

Sollen concentrisch geschichtete Kugelschalen dieselbe Eigenschaft für Punkte des inneren hohlen Raumes besitzen, so muss

$\varphi(\varrho) = A\varrho$ sein. Der Verfasser beweist diese schon bekannten Sätze und dehnt dieselben dann auf einen Raum von $n$ Dimensionen aus. Für einen solchen muss $\varphi(\varrho)$ die Form haben:

$$(2) \qquad \varphi(\varrho) = A\varrho + \frac{B}{\varrho^{n-1}}.$$

(1) resp. (2) stellt nicht nur die notwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für die Existenz centrobarischer Körper dar. Man kann auf Grund dessen schliessen, dass, da für unsern Raum das Newton'sche Gesetz gilt, derselbe dreidimensional sein muss.

Soll nicht nur die Anziehung einer Kugel gleich der der Anziehung ihrer im Mittelpunkte vereinigten Masse sein, sondern sollen auch die Potentiale beider Anziehungen für Punkte des Aussenraumes gleich sein, so muss $A = 0$ sein, was für $n = 3$ ebenfalls schon bekannt war. Uebrigens gilt das Analogon des Satzes, dass eine concentrisch geschichtete Hohlkugel bei $\varphi(\varrho) = \frac{B}{\varrho^2}$ auf einen Punkt des hohlen Raumes keine Anziehung ausübt, auch für den $n$-dimensionalen Raum, falls hier $\varphi(\varrho) = \frac{B}{\varrho^{n-1}}$ ist.

Bei dem Gesetze $\varphi(\varrho) = A\varrho$ ist (auch im Raume von $n$ Dimensionen) jedes Gebilde centro-dynamisch, und zwar nur bei diesem. Das wird bewiesen. Für das Gesetz $\varphi(\varrho) = \frac{B}{\varrho^{n-1}}$ bilden concentrisch geschichtete Kugeln nur Beispiele. Die allgemeinen Eigenschaften centrobarischer Körper für dieses Gesetz werden, unter Beschränkung auf den Fall $n = 3$, nach Thomson und Tait ohne Beweis mitgeteilt.

Die Einleitung der Arbeit enthält historische Notizen betreffs der Principien der Mechanik. Wn.

---

F. Dyson. The potential of an anchor ring. Lond. R. S. Proc. LI. 448-452.

Auszug aus einer Abhandlung, die in den Phil. Trans. erscheinen wird. Cly. (Lp.)

A. Sella. Sull' attrazione del corpo di massima attrazione al secondo polo. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 350-356.

Der homogene Körper grösster Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze ist ein Rotationskörper, dessen Meridiancurve die Polargleichung $r^2 = a^2 \cos\theta$ hat. Der Verf. berechnet die Anziehung dieses Körpers auf den Punkt mit den Polarcoordinaten $r = a$, $\theta = 0$ und findet dafür ein elliptisches Integral, dessen Zahlwert ermittelt wird. Hierdurch ergiebt sich das Verhältnis dieser Anziehung zu derjenigen auf den Pol ($r = 0$, $\theta = 0$, wo das Maximum stattfindet) gleich 0,9872, also nur wenig kleiner als im Pol.

Lp.

---

P. Appell. Leçons sur l'attraction de la fonction potentielle, professées à la Sorbonne, en 1891. Paris. 64 S.

---

M. Bôcher. On some applications of Bessel's functions with pure imaginary index. Annals of Math. VI. 137-160.

Siehe Abschnitt VII, Capitel 2D, S. 479.

---

E. W. Hobson. The harmonic functions for the elliptic cone. London M. S. Proc. XXIII. 231-240.

Siehe Abschnitt VII, Capitel 2D, S. 472.

---

# Elfter Abschnitt.
## Mathematische Physik.

### Capitel 1.
### Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

#### A. Molecularphysik.

L. Boltzmann. Ueber die Methoden der theoretischen Physik. Katal. d. math. Ausst. München. 89-98.

Der Verf. giebt in geistvoller Weise einen Ueberblick über den Wechsel der Anschauungen in Betreff der philosophischen Grundlagen der Forschung in der theoretischen Physik und verweilt zuletzt etwas länger bei der neuesten Phase, in welcher durch mechanische Modelle Analogien für Naturerscheinungen geschaffen werden. „Endlich generalisirte die Philosophie Maxwell's Ideen bis zur Lehre, dass die Erkenntnis überhaupt nichts anderes sei als die Auffindung von Analogien. Damit war die alte Wissenschaft wieder hinwegdefinirt, und die Wissenschaft sprach nur mehr in Gleichnissen“. Von diesen Gesichtspunkten aus sind die in dem Katalog aufgeführten Modelle des Verfassers zu betrachten: No. 235. Apparat zur Demonstration der Gesetze der gleichförmig beschleunigten Rotationsbewegung. No. 265. Wellenmaschine zur Demonstration der Superposition der Wellen. No. 266. Zwei Apparate, um die Obertöne der gezupften Saiten zu zeigen. No. 405.

Apparat zur mechanischen Versinnlichung des Verhaltens zweier elektrischen Ströme (Bicycle). Lp.

A. Schuster. Opening address. Nature XLVI. 323-327.

Die Eröffnungsrede für die Section A der British Association zu Edinburgh verbreitet sich über die Methoden der physikalischen Forschungen in England, über die Bedeutung der Theorien und verweilt zuletzt bei einigen Fragen der modernen Physik.

Lp.

C. E. Guillaume. Report on constants and units. Brit. Ass. Rep. 1892. 165-169.

Dieser Bericht zerfällt in drei Teile. Der erste Teil giebt die Werte gewisser Constanten. Die französische Toise ist 1,949090m, und die Bessel'sche 1,949061 m; das englische Yard 0,914404 m, 1 m = 1,093608 Yards. Der zweite Teil trägt den Titel „Sätze", und es werden Beispiele gegeben, um die Wahrheit der drei Principien zu zeigen: 1) Vom Gesichtspunkte der Präcision aus würde in der Unterdrückung von Zwischeneinheiten, die theoretisch nicht zu rechtfertigen, allein praktisch durch präcise Muster darstellbar sind, eine Gefahr liegen. 2) In gewissen Fällen würde die Zurückführung der Constanten auf das $CGS$-System in weiterem Umfange als bisher vorteilhaft sein. 3) Für die gewöhnliche Physik und industrielle Anwendungen sind gewisse angenäherte Definitionen zweifelsohne ausreichend, während bei Feinmessungen zu diesem Behufe die nötigen Correctionen an den Ergebnissen vorgenommen werden können.

Die Sätze beziehen sich auf die Einheit des Druckes und auf die Temperaturscala. Als Einheit des Druckes wird die Annahme des Druckes einer Quecksilbersäule von 75 cm bei 0° unter den normalen Bedingungen der Schwere empfohlen; diese Einheit soll „Barie" heissen. Bezüglich der Temperatur wird gewünscht, dass alle genauen Messungen auf das hundertteilige Wasserstoffthermometer reducirt werden; diese Scala soll den Namen „normale Thermometerscala" erhalten.

Der dritte Teil beschäftigt sich mit manchen Vorschlägen, die noch ihrer endgültigen Form harren. Es wird vorgeschlagen, dass das Watt als Einheit für die Intensität der Strahlung gebraucht werden soll, oder aber dass das Spectrum eines glühenden Körpers in Banden von 0,1 $\mu$ ($\mu$ = Mikron) Breite geteilt werden soll; die Einheit würde dann das Watt in jeder dieser Banden sein.

Gbs. (Lp.)

H. ABRAHAM. Sur la théorie des dimensions. Almeida J. (3) I. 516-523.

Der Satz wird durchgeführt, dass man bei der Bestimmung der Dimensionen nie die specifischen Eigenschaften der Körper mitwirken lassen dürfe, wie z. B. bei der Masse die specifischen Eigenschaften des Wassers. Als fundamentale Grössen sind solche zu bezeichnen, die nicht auf andere zurückführbar sind; dann kann es nur ein einziges System von Dimensionen geben.

Lp.

A. VASCHY. Sur les considérations d'homogénéité en physique. C. R. CXIV. 1416-1419.

Gemeint ist die Dimensionshomogeneität physikalischer Gleichungen. Der Verfasser giebt einige physikalische Anwendungen des folgenden Satzes, für dessen Beweis er auf die Annales télégraphiques, janvier-février 1892 p. 25 verweist: „Wenn zwischen $n$ Parametern $a_1, a_2, \ldots, a_n$, von denen die $p$ ersten auf einzelne fundamentale Einheiten (Länge, Masse, Zeit u. s. w.), die $n-p$ übrigen auf abgeleitete Einheiten (Kraft, Geschwindigkeit u. s. w.) bezogen sind, eine von der Grösse der fundamentalen Einheiten unabhängige Beziehung $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ besteht, so existirt zu gleicher Zeit eine Beziehung $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}) = 0$, in der die $n-p$ verschiedenen $x$ Producte von Potenzen der $a$ sind".

Br.

HANS J. KIAER. Om den almindelige gravitation og forsög til en mekanisk theori for samme. Christiania Vid.-Selsk. Forh. 1892, 30 S.

Ref. ist mit der norwegischen Sprache nicht genügend bekannt, um einen sachgemässen Bericht über diese Arbeit zu schreiben. Soviel er die Sache übersehen kann, handelt es sich um eine Modification der Aetherstoss-Theorien. Wunderbar erscheint es daher, dass der Verfasser weder die umfassenden Arbeiten von Isenkrahe auf diesem Gebiete erwähnt, noch auch die Untersuchungen von Paul du Bois-Reymond, Tolver Preston, Jarolimek u. a. m.

Lp.

---

A. Korn. Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. I. Teil. Gravitation und Elektrostatik. Berlin. F. Dümmler. VIII + 58 S. 8°.

Bei der Erklärung der Gravitation stellt sich der Verfasser ganz auf den Standpunkt von Bjerknes (cf. F. d. M. VII. 1875. 587), nur leitet er dessen Resultate auf etwas anderem Wege ab. Er sucht zuerst das Geschwindigkeitspotential einer incompressiblen, wirbellosen, unbegrenzten Flüssigkeit, in der sich eine pulsirende, d. h. periodisch sich contrahirende und dilatirende, Kugel mit festem Centrum befindet. Er dehnt dann die Aufgabe auf den Fall des Vorhandenseins zweier pulsirender Kugeln mit festen Centren aus: das gesuchte Potential ergiebt sich hier mit Hülfe einer combinatorischen Methode als Summe zweier unendlichen Reihen, von denen aber nur die ersten Glieder wirklich berechnet werden. Alle übrigen Glieder fallen fort, wenn man voraussetzt, dass schon Grössen dritter Ordnung in Bezug auf $\frac{R}{\varrho}$ und $\frac{R'}{\varrho}$ ($R$ und $R'$ die Radien, $\varrho$ die Centraldistanz) vernachlässigt werden dürfen. Aus dem Geschwindigkeitspotential lassen sich nach bekannten Formeln der Hydrodynamik die auf die Oberflächenelemente beider Kugeln wirkenden Druckkräfte und deren Resultante berechnen, sowie der mittlere Wert dieser Resultante für die Dauer $T$ einer Pulsation; $T$ wird dabei als für beide Kugeln gleich angenommen. Die so gefundenen Ausdrücke werden, nach Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung $T$ gegen solche der Ordnung $\frac{1}{T^2}$, auf die drei Fälle

angewandt, dass die Phasen der Pulsationen beider Kugeln sich um $\frac{1}{2}\pi$ unterscheiden, gleich oder entgegengesetzt sind. Im ersten Fall ist der mittlere Wert der Resultante der Druckkräfte gleich Null, in den beiden anderen Fällen ist derselbe absolut gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen; der Druck wirkt im zweiten Falle wie eine Anziehung, im dritten wie eine Abstossung. Mit dem Verfasser heben wir das Resultat des zweiten Falls besonders hervor: „Zwei mit gleicher Phase und Schwingungsdauer pulsirende Kugeln, die sich gleichzeitig in einer unbegrenzten, incompressiblen, reibungs- und wirbellosen Flüssigkeit befinden, ziehen sich mit Kräften an, die den Pulsationsgeschwindigkeiten, sowie den Oberflächen der pulsirenden Kugeln direct, dem Quadrat ihrer Centraldistanz umgekehrt proportional sind. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Centraldistanz der beiden Kugeln sehr gross ist im Verhältnis zu ihren Radien, und dass die Schwingungsdauer der Pulsationen ausserordentlich klein ist“.

Nachdem noch gezeigt ist, dass dies Resultat unverändert bleibt, wenn die beiden pulsirenden Kugeln in der Flüssigkeit frei beweglich sind und nur den Drucken folgen, welche die letztere auf sie ausübt (auch bei beliebiger Bewegung der Centren sollen die Resultate bestehen bleiben, wie ohne Beweis angegeben wird), wendet sich der Verfasser den elektrostatischen Erscheinungen zu, die er durch Bewegungen derselben incompressiblen Flüssigkeit wie bei der Gravitation zu erklären sucht.

Die vorher betrachteten Pulsationen reichen hier zur Erklärung nicht aus, da gleich pulsirende Kugeln sich anziehen, ungleich pulsirende einander abstossen. Es bedarf daher einer anderen Hypothese. Diese besteht in Folgendem: Man denke sich in einer unbegrenzten, reibungs- und wirbellosen Flüssigkeit eine Kugelfläche, in welche die Flüssigkeit periodisch ein- und ausströmt mit der normalen, nach dem Innern der Flüssigkeit gerichteten Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = k\cos\left(\frac{t}{T}+\beta\right)2\pi.$$

Man nehme an, dass $k$ eine solche Function der Oberflächencoordinaten ist, dass an der Kugelfläche überall das Geschwindigkeitspotential $\varphi$ der Flüssigkeit gleich einer nur von $t$, nicht von der Stelle abhängigen Grösse ist. Eine solche Kugel wird als Typus eines elektrischen Teilchens betrachtet, welches sich in einem vollkommenen Nichtleiter befindet. Als elektrische Ladung des Teilchens wird der Ausdruck

$$e = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int k dO$$

bezeichnet, wobei das Integral über alle Elemente der Kugelfläche auszudehnen ist. Für die mathematische Analyse werden die elektrischen Teilchen trotz des Einsaugens und Ausstossens der umgebenden Flüssigkeit als starre Körper betrachtet. Ferner wird angenommen, dass für die elektrischen Pulsationen $T$ und $\beta$ dieselben Werte haben wie für die Gravitationspulsationen. $k$ kann positives oder negatives Vorzeichen haben, entsprechend einer positiven oder negativen Ladung. Welches Zeichen einer positiven, welches einer negativen Ladung entspricht, bestimmt sich durch Vergleichung mit einem bestimmten elektrisch pulsirenden Teilchen.

Es wird nun zunächst gezeigt, dass ein einzelnes elektrisch pulsirendes Teilchen in der Flüssigkeit eine Bewegung hervorbringt, deren Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e}{r} \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi\right)$$

ist. Darauf wird die Untersuchung in derselben Weise wie oben auf zwei elektrisch pulsirende Teilchen ausgedehnt und unter ähnlichen Vernachlässigungen, wie sie oben angegeben sind, gezeigt, dass die auf beide wirkende scheinbare Kraft genau das Coulomb'sche Gesetz befolgt. Ferner wird der Satz abgeleitet, dass die Wechselwirkung zweier starren Aggregate elektrisch pulsirender Teilchen sich aus den Einzelwirkungen der Teilchen summirt, falls die Radien der Teilchen klein sind gegen jede noch messbare Strecke, und falls alle Teilchen des einen Aggregats von allen Teilchen des anderen durch irgend welche messbaren Entfernungen getrennt sind.

Für eine elektrische Fläche, d. h. eine solche, in der elektrische Teilchen in sehr geringer normaler Ausdehnung ausgebreitet sind, gilt, wenn $\eta$ die Flächendichtigkeit ist, die Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_a} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} = 2\sqrt{2\pi}\,\eta \cos\left(\frac{t}{T}\,2\pi\right).$$

Auch für elektrische Räume wird eine analoge Beziehung abgeleitet. Wn.

---

Charles V. Burton. A theory of the constitution of matter. Phil. Mag. (5) XXXIII. 191-204.

Der grundlegende Satz dieser Abhandlung ist von dem Verfasser im folgenden Wortlaut ausgesprochen: „Ein gegebenes Quantum Materie besteht nicht aus irgend einem Quantum Aethersubstanz oder anderer Substanz, sondern aus Abwandelungen in dem Bau oder der Energie oder anderen Eigenschaften des Aethers, und wenn die Materie sich bewegt, so sind es nur diese Abwandelungen des Baus oder der Energie oder anderer Eigenschaften, die von einem Teile des Aethers nach einem anderen übertragen werden". Die „Deformationsfigur" (strain-figure), um deren Eigenschaften die Untersuchung sich dreht, wird so eingeführt: „Man betrachte ein entweder unendliches oder ein von sehr entfernten Schranken begrenztes Gebiet, das von einem homogenen, isotropen, elastischen Medium angefüllt ist, dessen Zustand für kleine Deformationen von beliebigem Schlage durchweg der des stabilen Gleichgewichtes ist. Möge das Medium nun deformirt und in seinem deformirten Zustande durch irgend eine Nötigung erhalten bleiben. Dann giebt es eine entsprechende Verteilung der elastischen Rückwirkung (stress) in dem Medium, und falls die Deformation an keinem Punkte einen zu grossen Wert hat, wird der Anfangszustand vollständig wieder gewonnen, nachdem die Nötigung beseitigt worden ist. Setzt man aber voraus, dass statt dessen das Medium von seinem Anfangszustande aus immer weiter deformirt wird, und dass die rückbildenden elastischen Wirkungen nicht stetig mit der Deformation wachsen, sondern dass sie jenseit eines gewissen Punk-

tes in dem Processe im Werte abzufallen beginnen, bis zuletzt ein Punkt erreicht wird, bei welchem das allgemeine Streben der elastischen Wirkung auf eine weitere Zunahme der Deformation hinarbeitet, dann wird nach Beseitigung der bisherigen Nötigung das Medium in einen neuen Zustand stabilen Gleichgewichts versetzt sein, der in jedem Punkte elastische Rückwirkung und Deformation in sich schliesst. Der so dem Medium auferlegte Stand der Dinge ist nach meiner Ansicht ein Atom oder ein Bestandteil eines Atoms; er wird später als Deformationsfigur angeführt werden". Die dynamischen Eigenschaften der Deformationsfigur werden in einiger Breite erforscht, und daraus wird hergeleitet: 1) Falls die Bewegung im Vergleich zu einer gewissen Geschwindigkeit langsam ist, wird eine Deformationsfigur bei der Wanderung durch den Aether keinem Widerstande begegnen und Bewegungsgesetzen gehorchen, welche die Newton'schen als einen besonderen Fall einschliessen. 2) Gravitationskräfte und atomistische Zwischenkräfte können nach einer möglichen Annahme aus den elastischen Rückwirkungen entstehen, welche die Verteilung der Deformation begleiten. 3) Eine Collision zwischen zwei einfachen Deformationsfiguren würde sie nicht in Schwingungen versetzen, so dass ein aus Deformationsfiguren bestehendes Atom eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden haben würde, wie dies durch die dynamische Wärmetheorie gefordert wird. 4) Die Grösse und die Natur der möglichen Deformationsfiguren, also auch der möglichen Atome, würde durch die Gleichgewichtsbedingungen begrenzt sein, daher vielleicht zu einer discreten Reihe Anlass geben. Es wird hervorgehoben, eine eigenartige Schwierigkeit der Theorie bestehe darin, dass irgend eine Annahme bezüglich der Ueberlagerung von Deformationsfiguren benötigt wird, um der Thatsache Rechnung zu tragen, dass die Masse eines materiellen Körpers gleich der Summe der Massen seiner Bestandteile ist. Gbs. (Lp.)

---

W. Voigt. Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle. Wiedemann Ann. XLVII. 671-693. Auszug aus Gött. Abh. XXXVI u. XXXVIII. (1890 u. 1892.)

Ueber den allgemein theoretischen Teil dieser Arbeit (Gött. Abh. XXXVI) ist schon früher (F. d. M. XXII. 1890. 990) berichtet worden. Der Hauptteil, der sich mit der experimentellen Prüfung der Theorie durch Beobachtungen von Dämpfungen elastischer Schwingungen beschäftigt, kommt hier nicht in Frage. Br.

---

F. Auerbach. Plasticität und Sprödigkeit. Wiedemann Ann. XLV. 277-291.

Der Verfasser geht von der Ansicht aus, dass die im Titel angegebenen Begriffe keine Gegensätze, sondern nur quantitative Unterschiede darstellen, und sucht zu präcisen Grössen zu gelangen, die diesen gemeinsamen Begriff quantitativ zu fixiren gestatten. Er gelangt zu der Definition: „Die Plasticität ist der Ueberschuss der Festigkeit über die elastische Vollkommenheit". Die Plasticität ist also als Differenz zweier Begriffe aufgefasst, durch deren Aenderung man alle Erscheinungen von Plasticität und Sprödigkeit deuten kann. Da die zur Definition verwandten Begriffe sich auf verschiedene Arten der Beanspruchung wie Druck, Zug, Scheerung u. s. w. beziehen, giebt es natürlich ebenso viele Arten von Plasticität. Da die definirenden Begriffe aber auch durch quantitativ bestimmbare Grössen gemessen werden können, gilt dies auch von der Plasticität. Der Verfasser stellt drei solcher Grössen auf: 1) den Plasticitätsmodul, d. h. die Grösse, die man erhält, wenn man den Modul für elastische Vollkommenheit von dem für Festigkeit abzieht (Dimension die des Druckes); 2) die Plasticitätszahl, d. h. die Zahl, die man erhält, wenn man den Plasticitätsmodul durch den Festigkeitsmodul dividirt; 3) die praktische Plasticität, d. h. die Grösse der Veränderung, welche ein Körper von der Elasticitätsgrenze bis zur Festigkeitsgrenze erfährt. Zum Schluss werden Beobachtungen über Eindringungsplasticität mitgeteilt, wonach Steinsalz und Flussspat zu hervorragend plastischen, Glas und Quarz zu hervorragend spröden Körpern gehören.

Br.

---

G. de Metz. Ueber die absolute Compressibilität des Quecksilbers. Wiedemann Ann. XLVII. 706-742.

Die Arbeit stellt im wesentlichen eine experimentelle Untersuchung der verschiedenen Methoden zur Bestimmung des Compressibilitätscoefficienten an dem Beispiel des Quecksilbers dar. Theoretisch Neues enthält sie nicht. Br.

---

G. Jäger. Ueber die Grösse der Molekeln. Monatsh. f. Math. III. 235-264.

Die Arbeit ist im wesentlichen eine Zusammenstellung verschiedener, zur Berechnung von Moleculardurchmessern angewandter Methoden und enthält wenig direct Neues. Auch lässt sie die Methoden der kinetischen Gastheorie beiseite und beschäftigt sich nur mit der Ermittelung des Durchmessers von Flüssigkeitsmolekeln, die von denen der entsprechenden Gasmolekeln verschieden gedacht werden. Die zur numerischen Berechnung dienenden Formeln werden auf die Begriffe: Dampfspannung, Verdampfungswärme, Capillaritätsconstante, osmotischer Druck, Compressibilitätscoefficient u. s. w., kurz auf fast sämtliche Molecularbegriffe gestützt. Der Verfasser entwickelt so der Reihe nach sechs verschiedene Methoden zur Berechnung des Moleculardurchmessers, die ihm zum Teil selbst angehören. Alle geben Resultate von überraschend gleicher Grössenordnung. Auf das Einzelne soll, da es meist schon veröffentlicht und in diesen Berichten, zum Teil in diesem Bande, besprochen ist, hier nicht näher eingegangen werden. Br.

W. Völler. Ueber den Zusammenhang der physikalischen Eigenschaften der Krystalle mit ihrer Krystallform. Pr. (No. 401) Realgymn. Cassel. 23 S. 4°.

„Jede geometrische Symmetrie-Ebene ist zugleich Symmetrie-Ebene in physikalischer Beziehung“. Der Verfasser verfolgt diesen Satz durch die verschiedenen Systeme. An physikalischen Eigenschaften werden Elasticität, Cohäsion, optische, thermische, magnetische und elektrische Verhältnisse in den Kreis der Betrachtung gezogen. Br.

---

L. NATANSON. On the probabilities of molecular configurations. Phil. Mag. (5) XXXIV. 51-54.

Einige Bemerkungen über Wahrscheinlichkeiten molecularer Configurationen, veranlasst durch die kinetische Erklärung der Zerstreuung der Energie des Lord Kelvin. Man stelle sich ein Volumen $V$ in $n$ gleiche Teile oder „Elemente" geteilt vor und nehme an, dass in jenem Volumen $N$ Punkte enthalten seien; die Wahrscheinlichkeit der folgenden Anordnung von $N$ Molekeln (Punkten) in $n$ Volumenelementen zu finden: das erste Element soll $N_1$ Molekeln, das zweite $N_2$, ..., das $n^{te}$ $N_n$ enthalten. Die erhaltene Wahrscheinlichkeit ist:

$$Q = \frac{N!}{n^N\, N_1!\, N_2! \dots N_n!}.$$

Bedeuten $Q'$, $Q''$ bezw. den kleinsten und den grössten Wert von $Q$, so wird

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{1}{n^{N+\frac{1}{2}n}} \{2\pi N\}^{\frac{1}{2}(n-1)} = \text{einem kleinen Bruche}$$

(angenähert), wenn $N$ und $N/n$ gross sind. Dass also alle Molekeln in einem einzigen Elemente angehäuft sich vorfinden, ist das unwahrscheinlichste Ereignis, und dass sie gleichmässig auf alle Elemente verteilt sind, das wahrscheinlichste. So kommt diejenige Anordnung einer gegebenen Anzahl von Molekeln in einem gegebenen Volumen, deren Wahrscheinlichkeit am grössten ist, thatsächlich bei einer homogenen, von keinen äusseren Kräften angegriffenen Flüssigkeit vor. Der so erreichte Schluss beruht auf der Annahme, dass die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer Molekel in einem bestimmten Elemente nicht durch die Thatsache des gleichzeitigen Vorhandenseins anderer Molekeln berührt wird, und dies leitet auf ein allgemeines Princip, „dass Atome und Molekeln, sofern sie nicht gegenseitigen oder äusseren Kräften unterliegen, dahin streben, jene Art endgültiger Anordnung anzunehmen, deren (reine) Wahrscheinlichkeit am grössten ist." Dieses Princip steht ganz in Uebereinstimmung mit dem ersten Newton'schen Bewegungsgesetze. Gbs. (Lp.)

G. Jaumann. Versuch einer chemischen Theorie auf vergleichend-physikalischer Grundlage. Wien. Ber. CI. 487-530.

Der Verfasser stellt der Atomtheorie eine neue chemische Theorie gegenüber, die auf die Annahme von Elementen, Molecülen und Atomen ganz verzichtet. Statt dessen wird der chemische Zustand irgend eines Körpers als charakterisirt durch eine eine einzige Grösse: das Chemial, angenommen, durch dessen continuirliche Aenderung man alle verschiedenen Stoffe erhält. Chemische Veränderungen sind nichts anderes als Ausgleichungsvorgänge verschiedener Chemiale. Denn die Chemialdifferenzen haben wie Temperatur- und Potentialdifferenzen das Bestreben, sich auszugleichen. In dem Begriff des Chemials tritt als zweiter Grundbegriff der der Capacität auf, d. h. eines festen Verhältnisses, nach dem die Aenderung des Chemials vor sich geht. Diese Ueberlegungen sind keineswegs, wie es nach dem Bisherigen vielleicht den Anschein haben könnte, leere Speculationen. Sie sind allerdings aus noch allgemeineren Vorstellungen gewonnen, bilden aber schon eine ziemlich abgerundete Theorie und werden auch im einzelnen auf die Erklärung stöchiometrischer Erscheinungen angewandt, wo sie nach des Verfassers Ansicht der Atomtheorie sich sogar überlegen erweisen. Es ist indessen ganz unmöglich, diesen Anwendungen, die den Hauptteil der Arbeit ausmachen, in einem kurzen Bericht gerecht zu werden. Br.

---

G. Hinrichs. Sechs Beiträge zur Dynamik des chemischen Molecüls. Leipzig. G. Fock. VII + 24 S. 8°.

Die Beiträge stammen schon aus den Jahren 1872 und 1873 und behandeln eine vom Verfasser neu aufgestellte Moleculartheorie, wonach die Flüssigkeiten durch Rotation der Molecüle um die Axen kleinsten, die Gase durch Rotation um die Axen grössten Trägheitsmomentes charakterisirt seien. Ebenso wird über die geometrische Anordnung der Atome eine neue Theorie und eine neue Schreibweise aufgestellt. Der Verfasser kleidet seine Anschauungen auch in Formeln, um sie dem Bereich der „Speculationen" zu entziehen. In allen Beiträgen sind aber Hypothese und Deduction

so mit einander vermischt, dass es unmöglich ist, befriedigend darüber zu referiren. Br.

G. Hinrichs. Établissement des formules fondamentales pour le calcul des moments d'inertie maximum. C. R. CXIV. 1064-1066.

G. Hinrichs. Détermination mécanique des points d'ébullition des composés à substitution terminale simple. C. R. CXIV. 1113-1115.

G. Hinrichs. Détermination mécanique des points d'ébullition des composés à substitution terminale complexe. C. R. CXIV. 1272-1274.

G. Hinrichs. La chaleur spécifique des atomes et leur constitution mécanique. C. R. CXV. 239-242.

Gegenstand und Methode der Behandlung sind die gleichen wie in den sechs Beiträgen. Br.

E. Riecke. Moleculartheorie der piëzoelektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen. Gött. Abh. XXXVIII. 52 S.

Der Verfasser geht von folgenden Annahmen aus: „Die Mittelpunkte der Krystallmolekeln bilden Raumgitter, welche den Symmetriecharakter der verschiedenen Krystallsysteme besitzen.“ — „Jede Molekel ist umgeben von einem System elektrischer Pole; seine Anordnung besitzt die Symmetrieverhältnisse der speciellen Gruppe, welcher der betreffende Krystall angehört. Das System ist mit der Molekel so verbunden, dass seine Symmetrieebenen und Axen mit den entsprechenden Symmetrieelementen der Raumgitter zusammenfallen.“ Auf Grund dieser Annahme werden nun die Werte der durch Translation und Rotation der Molekeln erzeugten elektromotorischen Kräfte allgemein aufgestellt. Für einzelne Polsysteme werden dann Potential und Kräfte mit Hülfe von Kugelfunctionen näher entwickelt. Die Momente ergeben sich überall als lineare Functionen der Deformationsgrössen, was bekanntlich die vorhandenen Beobachtungen befriedigend erklärt. Den Schluss bildet eine Zusammenstellung der Ausdrücke für die

piëzoelektrischen Momente in allen einzelnen Systemen unter Berücksichtigung sämtlicher Symmetrieverhältnisse. Der Text ist durch mehrere Tafeln anschaulich erläutert. Br.

---

P. Duhem. Sur la déformation électrique des cristaux. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 167-176.

Der Verfasser leitet folgenden Satz ab: „Eine krystalline piëzoelektrische Platte wird unter dem Einfluss äusserer Kräfte einen gewissen elektrischen Zustand annehmen. Ruft man andererseits diesen Zustand direct hervor, indem man zwei den Krystalloberflächen unendlich nahe metallische Platten entsprechend ladet, so wird der Krystall bestimmte Deformationen erleiden. Aeussere Kräfte und Deformationen verhalten sich dabei so, dass die ersten die letzten hervorzurufen trachten.“ Dies widerspricht einem Satze von Lippmann, wonach die Kräfte das Bestreben hätten, entgegengesetzte Deformationen hervorzurufen. Der Verfasser erklärt den Lippmann'schen Satz für falsch. Br.

---

## Weitere Litteratur.

G. A. Hagemann. Ueber die Energie und ihre Umwandlungen. Einleitungsvortrag. Berlin. Friedländer u. Sohn. 16 S. 8°.

H. Hovestadt. Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Bearbeitet nach System Kleyer. Stuttgart. Jul. Maier. VIII + 231 S. 8°.

Ch. Lagrange. Étude sur le système des forces du monde physique. Paris. Gauthier Villars et Fils. 4°.

W. Müller-Erzbach. Physikalische Aufgaben für den mathematischen Unterricht in den oberen Klassen höherer Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Berlin. Springer. VIII u. 147 S. 8°.

W. Peddie. A manual of physics. London. Baillière, Tindall, and Cox. [Nature XLVI. 52-54.]

C. A. Porges. Ueber die wichtigsten internationalen Masseinheiten. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXIII. 91-112.

A. v. Waltenhofen. Die internationalen absoluten Masse, insbesondere die elektrischen Masse, für Studirende der Elektrotechnik in Theorie und Anwendung dargestellt und durch Beispiele erläutert. 2. Aufl. Braunschweig. Vieweg und Sohn. X + 166 S. mit 15 Figuren. 8⁰.

J. Weisbach. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. 3. Teil. Die Mechanik der Zwischen- und Arbeitsmaschinen. 2. Aufl. bearbeitet von G. Herrmann. 3. Abteilung: Die Maschinen zur Formveränderung. 7. u. 8. Lfg. S. 577-768 mit Holzst. Braunschweig. Vieweg u. Sohn. 8⁰.

## B. Elasticitätstheorie.

A. E. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Vol. I. Cambridge. University Press. XV + 354 S. 8⁰.

In der Vorrede sagt der Verfasser: Das Ziel dieses Buches ist, einen zusammenhängenden Bericht über den jetzigen Stand der Theorie und über den Weg, auf welchem derselbe erreicht ist, zu geben, indem einerseits blosse analytische Entwickelungen und andererseits rein technische Details vermieden werden. Referent muss nach sorgfältiger Prüfung des vorliegenden Werkes anerkennen, dass dieses Ziel völlig erreicht ist. Die Auseinandersetzungen sind klar, scharf und leicht verständlich, so dass das Buch sehr geeignet erscheint, in die Elasticitätstheorie einzuführen.

Eine historische Einleitung und passend angebrachte zahlreiche Citate werden denen erwünscht sein, welche auf die Quellen zurückzugehen wünschen.

Der vorliegende erste Band enthält ausser den allgemeinen Grundlagen der Theorie einen Teil der Anwendungen. Der Verfasser teilt nämlich die Gesamtheit der Aufgaben entsprechend dem

jetzigen Stande der Wissenschaft in zwei Klassen. Bei den einen werden die Differentialgleichungen der Elasticität in aller Strenge erfüllt, während das bei den andern, welche sich auf Körper beziehen, in denen eine oder zwei Dimensionen unendlich klein sind, nicht der Fall ist. Die letzteren hat der Verfasser in dem zweiten Bande, welcher im folgenden Bande des Jahrbuchs zu besprechen ist, behandelt. Dass die anderen mit grosser Vollständigkeit im ersten Bande behandelt werden, wird eine Inhaltsangabe zeigen.

Nach der oben erwähnten historischen Einleitung wird zunächst die Deformation des Körpers analysirt (Analysis of strain); dann werden im zweiten Capitel die allgemeinen Beziehungen zwischen den äusseren und inneren Kräften aufgestellt, welche von der Beschaffenheit des Körpers unabhängig sind. Im folgenden Abschnitt werden hierauf nach dem verallgemeinerten Hook'schen Gesetz die Druckkräfte gleich linearen Functionen der sechs Deformationscomponenten gesetzt. Bei isotropen Substanzen werden die Differentialgleichungen für die Componenten der Verrückung wirklich aufgeschrieben. Die Zahl der Constanten — ursprünglich gleich 36 — wird zunächst durch die Voraussetzung eines elastischen Potentials auf 21 herabgedrückt und dann für die einzelnen Krystallsysteme noch weiter reducirt.

Im vierten Capitel, welches die Ueberschrift „Festigkeit (strength) der Materialien" trägt, bespricht der Verfasser verschiedene Eigenschaften, welche einer mathematischen Behandlung bisher nicht zugänglich sind, wie Elasticitätsgrenze, Plasticität, elastische Nachwirkung u. a.

Danach werden zunächst allgemeine Theoreme besprochen. Die Druckcomponenten werden nach der Molecularhypothese im Anschluss an Cauchy durch die Componenten der Deformation ausgedrückt. Ferner wird der Beweis von Sir William Thomson für die Existenz einer Energiefunction mitgeteilt. Nachdem dann noch Betti's Theorem über den Zusammenhang zweier Zustände desselben Körpers unter Einfluss zweier verschiedenen Systeme von Kräften und mehrere Anwendungen dieses Satzes besprochen sind, behandelt der Verfasser die Fortpflanzung der Wellenbewegung.

Das Capitel VI giebt die erste Anwendung der Theorie auf ein besonderes Problem. Es handelt von dem Gleichgewicht der Balken. Vorausgesetzt wird, dass nur auf die Enden äussere Kräfte wirken, und dass in den Flächenelementen, welche der Axe parallel sind, auch die Spannung der Axe parallel ist, so dass also $X_x$, $X_y$, $Y_y$ — in Kirchhoff's Bezeichnung — gleich Null sind. Nachdem alsdann die Berechnung der Verrückungscomponenten auf die Bestimmung einer Potentialfunction zurückgeführt ist, behandelt der Verfasser die einzelnen Arten der Deformation. Den Schluss dieses Capitels bildet die Besprechung besonders wichtiger Specialfälle.

Die Einführung der krummlinigen Coordinaten füllt das siebente Capitel. Für einige besondere Fälle werden die Formeln ohne Beweis, welcher dem Leser zu seiner Uebung überlassen bleibt, mitgeteilt.

Im achten Capitel beschäftigt sich der Autor mit der allgemeinen Lösung der Elasticitätsgleichungen.

Die folgenden Capitel beschäftigen sich wieder mit besonderen Problemen. Zunächst wird die Aufgabe gelöst, die Deformationen eines von einer Ebene begrenzten, sonst aber unendlich ausgedehnten Körpers zu finden. Dann wird das Gleichgewicht einer elastischen Kugel behandelt. Ferner werden die Schwingungen kugelförmiger und hohlkugelförmiger Körper erledigt. Zum Schluss behandelt der Verfasser das Problem des elastischen Gleichgewichts in dem von Herrn Wangerin entdeckten Fall eines elastischen Körpers, für welchen sich die Laplace'sche Gleichung lösen lässt.

F. K.

---

G. Morera. Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 137-141.

E. Beltrami. Osservazioni sulla Nota precedente. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 141-142.

G. Morera. Appendice alla Nota „Sulla soluzione più generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio d'un corpo continuo". Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 233-234.

Herr Morera zeigt, dass die allgemeine Lösung der Gleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0,$$

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z$$

auf die Form gebracht werden kann

$$X_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad Y_y = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad Z_z = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$$Y_z = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right\},$$

$$Z_x = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} \right\},$$

$$X_y = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right\}.$$

Herr Beltrami weist nach, dass scheinbar allgemeinere Ausdrücke, nämlich

$$X_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \left( \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right),$$

$$Y_z = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right\} + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}$$

und ähnliche Ausdrücke für $Y_y$, $Z_z$, $Z_x$, $X_y$ denselben Gleichungen genügen. Herr Morera beweist dann in der Zusatznote, dass die Ausdrücke

$$-\left( \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}$$

auf die Form

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y \partial z}, \quad \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial W_1}{\partial z} \right\}$$

und umgekehrt die Werte

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial z} \right\}$$

auf die Form

$$-\left( \frac{\partial^2 M_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_1}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial^2 L_1}{\partial y \partial z}$$

gebracht werden können, so dass die zuerst angegebenen Formeln ebenso allgemein sind wie die von Beltrami entwickelten.

F. K.

---

E. Fontaneau. Sur la déformation des corps isotropes en équilibre d'élasticité. Assoc. Franç. Pau XXI. 190-207.

In den Protokollen der Sitzungen S. 159 befindet sich über den Vortrag das folgende Referat:

Der Zweck dieser Arbeit ist die Angabe eines Integrationsverfahrens für die Gleichungen des Gleichgewichts der Elasticität bei den isotropen Körpern:

$$\mu\Delta^2 u+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,\quad \mu\Delta^2 v+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,$$

$$\mu\Delta^2 w+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}=0,$$

wenn man als Daten des Problems die Werte der Componenten der Deformation oder der Verrückungen $u$, $v$, $w$ an der Oberfläche des elastischen Körpers hat. Die Methode ist allein auf den Fall anwendbar, bei welchem die Gesamtoberfläche des Körpers nur solche Teilflächen umfasst, die einzeln Bestandteile einer Gruppe von orthogonalen Flächen bilden können. Sie besteht wesentlich in der Zerlegung der Deformation des Körpers in zwei partielle Deformationen, von denen die eine, die sich durch keinen besonderen Charakter auszeichnet, aus den Daten der Aufgabe fliesst, während die andere durch die Thatsache gekennzeichnet ist, dass die Verrückungen bei ihr an der Oberfläche normal zu derselben geschehen. Diese Aufgabe ist für den Fall der Kugel von den Herren Thomson und Tait in ihrer „Theoretischen Physik" behandelt, von Herrn Cerruti in dem Bull. de l'Assoc. Franç. vermittelst einer Methode, deren Princip auf Betti zurückkommt. Wenn man zur Integration der fraglichen Gleichungen als Daten nicht mehr die Deformationscomponenten $u$, $v$, $w$ hat, sondern die Componenten derjenigen äusseren Kraft nach den rechtwinkligen Coordinaten, welche in jedem Punkte der Oberfläche des elastischen Körpers zur Aufrechterhaltung seines Gleichgewichtes angebracht ist, so ist

das Problem viel schwieriger. Der Verfasser hat die Lösung mit Benutzung eines Satzes versucht, den er in den Nouv. Ann. bewiesen und in der Versammlung zu Limoges wieder vorgetragen hat (F. d. M. XXII. 1890. 1003). Da jedoch das System der als bekannt angenommenen Kräfte von demjenigen verschieden ist, das man gewöhnlich betrachtet, und weniger leicht aus den wirklichen Daten der Aufgabe sich herleiten zu lassen scheint, so hat er sich auf die Andeutung der Integrationsmethode beschränkt, welche sich aus dem für denjenigen Fall ausgesprochenen Satze ergiebt, bei welchem der elastische Körper eine Kugelschicht ist, weil dann die beiden Systeme äusserer Kräfte zu einem einzigen verschmelzen. Lp.

---

H. Poincaré. Sur la théorie de l'élasticité. C. R. CXIV. 385-388.

Auf zwei gegenüberliegende Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipedons wirken beliebig gegebene Kräfte; es handelt sich darum, das Verhältnis der Hauptkrümmungsradien der freien Seitenflächen zu untersuchen. Das Hauptresultat ist das folgende: In den Ecken des in der Mitte zwischen den beiden belasteten Seiten liegenden Schnittes ist das Verhältnis der beiden Hauptkrümmungsradien unveränderlich und unabhängig von der Belastung. F. K.

---

A. Sayno. Sull'equilibro di elasticità dei solidi cilindrici e prismatici che resistono alla flessione Nota II. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 147-162.

Im Anschluss an seine frühere Untersuchung (Lomb. Ist. Rend. (2) XXIV. 1132, F. d. M. XXIII. 1891. 1027) untersucht der Verfasser jetzt folgende Querschnittsformen im einzelnen:

1) Kreisring, 2) elliptischer Ring, 3) Quadrat, 4) Doppel T, 5) T.

Der Aufwand mathematischer Hülfsmittel besteht in der Ausführung einfacher Quadraturen und bedarf hier also keiner weiteren Besprechung. F. K.

---

M. F. Fitzgerald. Flexure of long pillars under their own weight. Phil. Mag. (5) XXXIII. 428-431.

Diese Abhandlung wurde verfasst und gedruckt, bevor der Verfasser die Greenhill'sche Arbeit kennen lernte: „Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical post or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of given proportion can grow" (Cambr. Proc. IV. 65, F. d. M. XIII. 1881. 741). Der Pfeiler wird am Grunde fest, an der Spitze frei angenommen, die Biegung klein und in einer verticalen Ebene liegend. Die von Hrn. Greenhill mit Hülfe der Bessel'schen Functionen integrirte Differentialgleichung wird hier durch eine Reihe gegeben. Auch der Fall wird angemerkt, bei welchem die Säule an der Spitze und am Grunde durch äussere Biegungsmomente gehalten wird, so dass die neutrale Axe an beiden Enden vertical, sonst aber frei ist. Gbs. (Lp.)

R. Marcolongo. Risoluzione di due problemi relativi alla deformazione di una sfera omogenea isotropa. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 335-343.

Es handelt sich um das Gleichgewicht einer homogenen isotropen, elastischen Kugel, auf deren Inneres keine äusseren Kräfte wirken, wenn an der Oberfläche entweder die Normalcomponente des Drucks und die Tangentialcomponenten der Verrückung oder umgekehrt die Normalcomponente der Verrückung und die Tangentialcomponenten des Drucks vorgeschriebene Werte haben.

Der Verfasser drückt zunächst die Verrückungen und die Druckcomponenten durch die Ableitungen dreier Functionen aus, welche im Innern der Kugel der Gleichung $\Delta^2 = 0$ genügen. Vermöge der Oberflächenbedingungen kann man dann gewisse aus diesen Functionen gebildete Ausdrücke durch Oberflächenintegrale ausdrücken, und aus diesen erhält man dann die gesuchten Grössen selbst durch Integration gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. F. K.

V. Cerruti. Sulla deformazione di una sfera omogenea isotropa (per dati spostamenti de'punti della superficie). Nuovo Cimento. (3) XXXII. 121-133.

Bestimmung der Verschiebungen der Punkte einer homogenen isotropen Kugel, wenn die Verschiebungen der Punkte der Oberfläche willkürlich gegeben sind. Uebersetzt aus dem Compte-Rendu de la quatorzième Session de l'Association Française pour l'avancement des sciences, Grenoble 1885, II. p. 68-79. Vi.

---

C. Chree. On changes in the dimensions of elastic solids due to given systems of forces. Cambr. Trans. XV. 313-337, Cambr. Proc. VII. 319-322. (Abstract.)

Die Abhandlung lehnt sich an einen allgemeinen Satz des Herrn Betti und leitet daraus Ausdrücke für die mittleren Werte der Deformation und des Zwanges in irgend einem homogenen elastischen festen Körper her, auf welchen irgend ein gegebenes System von Kräften im Innern oder an der Oberfläche einwirkt. Die gefundenen Formeln werden auf mannigfaltige specielle Fälle angewandt. Unter diesen möge der folgende als Beispiel hervorgehoben werden: Es wird gezeigt, dass die durch gegenseitige Gravitation der Teilchen hervorgerufene Volumenänderung eines isotropen, sehr nahe sphärischen Körpers dieselbe ist wie in einer Kugel von gleichem Material und Volumen; daraus wird geschlossen, dass in der Kugelform die durch Gravitation entstehende Volumenreduction im allgemeinen entweder ein Maximum oder ein Minimum ist. Aus der Berechnung der Volumenreduction für ein gravitirendes Ellipsoid schliesst dann der Verfasser, dass die Kugel diejenige Form ist, in welcher bei gegebenem Volumen die Reduction ein Maximum ist. Gz.

---

C. Chree. On long rotating cylinders. Cambr. Proc. VII. 283-305.

Der Verfasser überträgt die Methode, welche er in der Abhandlung „On thin rotating isotropic disks" (Cambr. Proc. VII. 201-215. 1891) benutzt hatte, auf den Fall eines langen geraden

Kreiscylinders aus isotropem Material, der um seine Axe rotirt. Und zwar werden die Fälle beide in Betracht gezogen, dass der Cylinder ein voller oder ein hohler ist; in letzterem Falle wird angenommen, dass die innere Fläche ein concentrischer Kreiscylinder ist. Die Lösung zieht nur die Wirkung der Centrifugalkraft in Rechnung und lässt die Schwere oder die Wirkung anderer Kräfte ausser Betracht; sie befriedigt die inneren Gleichungen durchweg und die Grenzbedingungen an der gekrümmten Fläche, aber nicht an den flachen Enden. Die Lösung ist demnach nur genügend zufriedenstellend, wenn der Durchmesser des Cylinders gegen seine Länge klein ist. Gz.

---

C. Chree. Rotating elastic solid cylinders of elliptic section. Phil. Mag. (5) XXXIV. 70-100, 154-173.

In einem im Quarterly Journal XXIII (F. d. M. XXI. 1889. 1060) veröffentlichten Artikel hatte der Verf. verschiedene Fälle isotroper elastischer Körper betrachtet, die mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine Schwerpunktsaxe rotiren, und unter denselben denjenigen einer dünnen elliptischen Scheibe. Der erste Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung ist der Nachweis, wie gewisse von Hrn. Pearson erhobene Zweifel an der Zulässigkeit jener Lösung (Nature XLIII. 488) beseitigt werden können; der Hauptgrund jedoch für das Zurückgreifen auf den Gegenstand ist der, dass in dem früheren Artikel kein Versuch gemacht war, die physikalischen, in den mathematischen Formeln versteckten Folgerungen herauszuschälen. In dem vorliegenden Aufsatze wird die Beseitigung dieses Mangels besonders durch Tabellen mit numerischen Resultaten angestrebt. Die Lösung des Quart. J. enthielt eine Anzahl willkürlicher Constanten, die durch Oberflächenbedingungen bestimmt sind. Da die Anzahl der Constanten zur Befriedigung aller Oberflächenbedingungen der genauen mathematischen Theorie nicht ausreicht, so waren die Bedingungen, deren Ausfall als von geringster Bedeutung ausgewählt wurde, diejenigen, welche das Verschwinden der Zwangscomponenten parallel zu den Flächen in jedem Punkte des Randes bedeuteten, und diese Zwangscomponenten am Rande

wurden als verschwindend nur in der Centralebene $z=0$ angenommen, während sie anderswo von der Ordnung $z^2$ kleiner Grössen wären. Der Einwand, dass diese Zwänge unausgeglichen blieben, wird in der vorliegenden Lösung beseitigt. Ueber der Länge $2l$ einer Erzeugenden verblieb eine Resultirende mit Componenten parallel zur $x$- und $y$-Axe von der Grösse bezw.

$$\int_{-l}^{l} F dz = \tfrac{2}{3} C l^3 \quad \text{und} \quad \int_{-l}^{l} G dz = \tfrac{2}{3} C' l^3.$$

Die zu treffenden Aenderungen, damit diese Integrale verschwinden, werden ohne Mühe aufgefunden. In den Formeln (125), (126), (128) der früheren Abhandlung für $\alpha$, $\beta$, $\Delta$ muss $z^2$ durch $z^2 - \frac{1}{3} l^2$ ersetzt werden, und in der Formel (127) für $\gamma$ müssen wir $z(z^2 - l^2)$ für $z^3$ setzen. Diese Aenderung bringt zu den früheren Werten von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\Delta$ die Glieder $l^2\alpha' x$, $l^2\beta' y$, $l^2\gamma' z$, $l^2\Delta'$ hinzu, wo $\alpha' + \beta' + \gamma' = \Delta'$. Die Lösung wird durch Tabellen von Zahlergebnissen erläutert.

Der zweite Teil der Arbeit behandelt den langen elliptischen Cylinder, wobei unter einem „langen" Cylinder einer gemeint ist, dessen Länge $2l$ zu seinem grössten Durchmesser $2a$ ein solches Verhältnis hat, wie für die gesetzmässige Anwendung der de Saint-Venant'schen Lösung für Balken erforderlich ist, d. h. etwa $l/a$ nicht kleiner als 10. Das hier behandelte Problem unterscheidet sich von dem des rotirenden Cylinders in dem Artikel des Quart. J. darin, dass der Cylinder jetzt frei von allen Oberflächenkräften und änderungsfähig sowohl nach Länge wie Durchmesser vorausgesetzt ist, so dass die Lösung neu ist, mit Ausnahme des Falles für einen kreisförmigen Querschnitt (Cambr. Proc. VII, F. d. M. XXIII. 1891, 1031) und für den Grenzwert 0 von $\eta$. Die algebraische Arbeit der Constantenbestimmung ist nicht wiedergegeben, weil die Genauigkeit der erhaltenen Lösung leicht geprüft werden kann. Einige Tafeln erläutern die Lösung, und gewisse Gesichtspunkte, die Hr. Greenhill in einer Abhandlung der Proc. Inst. of Mech. Eng. (1883) hervorgehoben hat, erfahren eine Besprechung.

Gbs. (Lp.)

G. Kobb. Om de inre spänningarne i en elastisk roterande skifva. Stockh. Öfv. 571-574.

Behandlung folgender Frage: eine kreisförmige elastische Scheibe rotirt mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine zur Scheibe senkrechte und durch ihren Mittelpunkt gehende Axe; es sind die Grösse und die Verteilung der inneren Spannungen zu bestimmen.

Bdn.

---

P. Jaerisch. Zur Theorie der Schwingungen einer elastischen Hohlkugel. Hamb. Mitt. III. 51-73.

Nach einem Hinweis auf die Bedeutung des Problems für die Molecularphysik wendet sich der Verfasser der Aufgabe zu, die Schwingungen einer elastischen Hohlkugel zu untersuchen. Die Untersuchung, welche namentlich an frühere Forschungen des Verfs. anknüpft, geht aus von der Betrachtung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 R^n}{dr^2} + \left(m^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R^n = 0$$

mit der Nebenbedingung $\frac{dr^{-1} R}{dr} = 0$ für die Oberfläche der Kugelschale.

Nachdem der Verfasser eine von ihm früher gegebene Darstellung der Lösungen der obigen Differentialgleichung mit den durch Bessel'sche Functionen vermittelten Lösungen verglichen hat, führt er den Beweis, dass die Gleichung für die Schwingungszahlen, welche sich aus der Grenzbedingung ergiebt, nur reelle Wurzeln besitzt.

Die Resultate der Untersuchung lassen sich direct auf reine Longitudinal- und reine Transversalschwingungen anwenden. Bei den coexistirenden longitudinalen und transversalen Schwingungen kommen ebenfalls Lösungen der obigen Differentialgleichung in Betracht, aber die Grenzbedingungen sind complicirtere. Die Ableitung und Vereinfachung einer Gleichung für die Schwingungszahlen dieses Falles bildet den Schluss der Arbeit. F. K.

---

Éd. Collignon. Remarques sur le choc direct de deux corps élastiques. Assoc. Franç. Pau XXI. 1-7.

Der Verf. schlägt eine Variante für den Beweis der Formel vor, welche die Geschwindigkeiten zweier vollkommen elastischen Körper nach dem Zusammenstoss giebt, und macht von jener Formel Anwendung auf einige besondere Aufgaben, unter anderem auf die Schwingungen zweier vollständig elastischen Körper, die ohne Reibung auf einer Cykloide mit verticaler Axe gleiten (Huygens'sches Pendel). Lp.

---

A. Sella und W. Voigt. Beobachtungen über die Zerreissungsfestigkeit des Steinsalzes. Gött. Nachr. 1892. 494-513.

Nach einer Erörterung der älteren Versuche von Sohncke wird der Einfluss einer etwaigen Excentricität der Belastung besprochen; dann werden die Versuche beschrieben. Als merkwürdigstes Resultat derselben ist hier hervorzuheben, dass die Tragfähigkeit eines rechteckigen Prismas von krystallinischer Substanz nicht allein von der Orientirung der Prismenaxe abhängt, in deren Richtung der Zug wirkt, sondern in sehr starkem Masse auch von der Orientirung der das Prisma begrenzenden Seitenflächen.

F. K.

---

Ludwig Freytag. Vereinfachung in der statischen Bestimmung elastischer Balkenträger. Leipzig. B. G. Teubner. VIII + 123 S. 8° nebst 1 Taf.

Nach dem Vorworte des Verfassers wurde derselbe durch einen praktisch sehr wichtigen Fall genötigt, Specialstudien über die Wirkung von übertragenden Querverspannungen anzustellen. Hierbei zeigte sich eine ganz bestimmte Regelmässigkeit in dem Aufbau der statischen Gleichungen, eine Gesetzmässigkeit, die sich in den obersten Gliedern der Familie der Balkenträger als arithmetische Reihe herausstellte. Bei näherer Nachforschung ergaben sich auch bei den unteren, einfacher gestalteten Gliedern in gleicher Weise sehr einfache Gesetze.

Der Verfasser will mit seinen Vorschlägen nicht etwa die

bisherigen Methoden verdrängen, meint jedoch, dass ein neuer Weg zur systematisch einheitlichen Behandlung der statischen Ermittlung deshalb freundliche Aufnahme finden könnte, weil damit für bestimmte Fälle die Möglichkeit einer schnellen Kontrolle zeitraubender und mühevoller Berechnungen gegeben ist.

Die Bildungsgesetze der statischen Gleichungen bewegen sich im Rahmen der ebenen Geometrie und finden sich im I. Abschnitte der Schrift entwickelt. Hiermit dürfte zugleich die vollständige und einheitliche Lösung von Aufgaben über statisch bestimmte und statisch unbestimmte Balkenträger mit festen Endstützen gegeben sein, was durch eine Reihe von einfachen Beispielen erläutert wird.

Der II. Abschnitt behandelt die freischwebenden Träger („Uebertragende Querverspannungen"), welche zur Vervollständigung des Ganzen nicht entbehrt werden konnten. Aus ihrer Theorie ergaben sich manche interessante Rückschlüsse auf die Theorie der Balkenträger mit festen Endpunkten.

Als Errungenschaft der Arbeit betrachtet es der Verf., dass die zur Trägerbestimmung dienenden Differentialgleichungen dadurch von der Bildfläche verschwinden und in ihrer geometrischen Form als Curven entsprechender Ordnung erscheinen. Lp.

---

J. Larmor. The influence of flaws and air-cavities on the strength of materials. Phil. Mag. (5) XXXIII. 70-78.

Bei der Behandlung des Einflusses von Hohlräumen auf die Stärke der Materialien wird zunächst gezeigt: Wenn die Höhlung oder der Riss sich in grossem Abstande von der Oberfläche befindet im Vergleich mit den linearen Dimensionen, so sind die in der Intensität der elastischen Rückwirkung dadurch erzeugten Aenderungen an correspondirenden Punkten die nämlichen, welches auch die Dimensionen der Höhlung sein mögen. Der Betrag dieses Zuwachses an innerem Zwange bestimmt den theoretischen Sicherheitsfactor, den die Möglichkeit des Risses vom fraglichen Typus notwendig macht, da ja der Zuwachs am Zwange somit von der Gestalt und nicht von den Dimensionen der Höhlung abhängt.

Eine Schätzung kann erreicht werden für den Fall einer sphärischen oder cylindrischen Höhlung, und diese Schätzung kann für andere Fälle als Wegweiserin dienen. Eine kleine sphärische Höhlung oder auch eine Höhlung von irgend einer regelmässigen Gestalt in einer Masse unter Zug oder Druck kann die Stärke nicht ernstlich beeinflussen; der Fall liegt jedoch anders, wenn die Höhlung sich in einem Schaft befindet, der ein Kräftepaar überträgt. Wenn die Höhlung aus einem engen Loche besteht, das der Länge nach in den Schaft gebohrt ist, so kann die Verteilung der Schwerkraft an dem Querschnitte des Schaftes nach hydrodynamischer Analogie ausgedrückt werden, und für diesen Fall wird ein Uebergang der Aufgaben zu dem de Saint-Venant'schen Torsionsproblem ersonnen. Der so für einen solchen Fall ermittelte Sicherheitsfactor ist 2. Bei einer sphärischen Höhlung, für welche die Berechnung von Hrn. A. E. H. Love geleistet wurde, ist der Factor ebenfalls nicht weit von dem Werte 2 entfernt. Gbs. (Lp.)

---

H. Müller-Breslau. Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Centralbl. der Bauverw. XII. 201-207, 225-227.

In der ersten Notiz giebt der Verfasser die Bestimmung der Spannkräfte in den Stäben einer statisch bestimmten Schwedler'schen Kuppel, und zwar sowohl für den Fall, dass dieselbe oben offen ist, als auch für den Fall, dass sie eine aus $r$ Stäben gebildete Spitze besitzt. Dann werden die elastischen Verschiebungen der Knotenpunkte berechnet. Im Anschluss hieran giebt der Verfasser eine kinematische Ermittelung der Stabkräfte und eine Bestimmung der Einflusszahlen und Einflusslinien. Im letzten Abschnitt wendet sich der Verfasser zu dem statisch unbestimmten Fachwerk. Die in den überzähligen Stäben herrschenden Spannungen werden mit Hülfe des Satzes vom Minimum der Deformationsarbeit bestimmt. Die Anwendung der allgemeinen Entwickelungen wird an bestimmten Beispielen gezeigt. F. K.

---

A. Klingatsch. Die graphische Behandlung continuirlicher Fachwerkbalken. Zeitschr. östr. Ing. XLIV. 433-436, 445-451.

A. Klingatsch. Die graphische Bestimmung der absoluten Maximalmomente continuirlicher, durch bewegliche Einzellasten beanspruchter Träger. Zeitschr. östr. Ing. XLIV. 97-104.

M. R. v. Thullie. Weiterer Beitrag zur Berechnung der Stäbe auf Knickfestigkeit. Zeitschr. östr. Ing. XLIV. 655-658, 669-671.

Da nach den Versuchen von Tetmajer der Knickcoefficient in der Schwarz-Rankine'schen Formel nicht constant ist, sondern von dem Verhältnis der Länge zum Trägheitsradius abhängt, so wird die Berechnung der Dimensionen nach dieser Formel sehr umständlich. Der Verfasser schlägt folgendes Verfahren vor: als erste Näherung für die Dimensionen wird diejenige genommen, welche sich auf einfache Druckfestigkeit bezieht. Diese wird dann in die rechte Seite der Formel

$$F = \frac{P}{\tau}\left(1+\alpha\,\frac{l^2}{a^2}\right)$$

eingesetzt, so erhält man eine zweite Näherung für den Querschnitt. Nötigenfalls wird das Verfahren mit dem neuen Werte von $F$ wiederholt.

Den Hauptteil der Arbeit bildet die für viele Querschnitte berechnete Bestimmung der Abhängigkeit des Trägheitsradius von $F$.

F. K.

Froelich. Berechnung eiserner Träger im Hochbau. Centralbl. der Bauverw. XII. 119.

P. Bastine, Karl Boeklen. Berechnung eiserner Träger im Hochbau. Ibid. 248.

Es handelt sich um rein äusserliche Umformungen des Ausdrucks für das Maximalmoment in einem horizontalen, zum Teil gleichmässig belasteten Balken zum Zwecke einer besseren numerischen Berechnung in concreten Fällen. F. K.

Fromm. Diagramm für Träger und Stützen. Centralbl. der Bauverw. XII. 62.

Es handelt sich häufig darum, Werte $u$, $v$ so zu bestimmen, dass $u^2v$ einen vorgeschriebenen Wert $c$ hat. Die graphische Methode der Ermittelung beruht darauf, dass $2\log u$ und $\log v$ die Coordinaten von Punkten der Geraden $x+y=\log c$ sein müssen.

F. K.

---

R. C. Nichols. On the resistance to transverse strain in beams. Phil. Mag. (5) XXXIII. 397-427.

Diese Abhandlung behandelt die von W. H. Barlow in einer Mitteilung an die Royal Society von 1855 zu dem Zwecke aufgestellte Theorie, die Tragfähigkeit von Barren oder Balken aus Gusseisen, die einer transversalen Beanspruchung unterworfen werden, einer Berechnung zu unterziehen. Barlow's Theorie war die, dass ausser den Widerständen gegen Beugung oder Bruch, welche durch die Compression der Fasern auf der einen Seite und ihre Ausdehnung auf der anderen Seite der Barre hervorgerufen werden, ein weiterer Beitrag zum Widerstande durch die seitliche, von der Krümmung der Barre herrührende Einwirkung der Fasern entspringt, den er „Widerstand gegen Biegung" (flexure) nannte. Barlow's Theorie ist seitdem von den praktischen Gewährsmännern allgemein angenommen worden, obgleich ein Zweifel ausgedrückt worden ist, ob die seitliche Einwirkung allein genügend wäre, um der gesamten Extrakraft Rechnung zu tragen, welche bei Versuchen beobachtet worden war, und Barlow hat keine Erläuterung der Weise gegeben, in der nach seiner Annahme der Widerstand gegen Biegung wirken sollte. In dem Verlaufe des Artikels unterwirft der Verf. die Versuche Barlow's einer sorgfältigen Prüfung und behauptet, dieselben seien ohne Hinzunahme des sogenannten Widerstandes gegen Biegung erklärbar. Er schlägt eine Theorie der „Ueberbeanspruchung" (overstrain) vor, deren leitende Züge die folgenden sind: In jedem Balken mit rechteckigem Querschnitte, der einer Querbeanspruchung unterworfen wird, setzen die Gestalt der Flächen gleichen Widerstandes und das Zusammenfallen

der neutralen Axe mit dem Schwerpunkte zunächst einen Zustand völliger Elasticität voraus, d. h. so, dass der Widerstand der Fasern gegen Zug oder Druck sich proportional zu dem Betrage des Zuges oder Druckes ändert. Wenn dieser Zustand nicht bis zum Eintreten des Bruches anhält, sondern, wie in dem Falle des Gusseisens, die Elasticitätsgrenze für Zug-, aber nicht für Druck-Beanspruchung überschritten wird, bevor der Bruch eintritt, so ist der grösste Dehnungszwang derjenige, welcher bei directer Zugbeanspruchung den Bruch erzeugt. Aber dieses Maximum des Zwanges wird nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze nicht nur an dem unteren Rande vorhanden sein, sondern auch für einen gewissen Abstand innerhalb der Substanz des Balkens, und die Lage der neutralen Axe wird oberhalb des Schwerpunktes des Schnittes gehoben werden. Wenn die Elasticitätsgrenze überschritten wird vor dem Bruche für Druck-, aber nicht für Zug-Beanspruchung, so wird die Lage der neutralen Axe gesenkt sein. Dieselben Principien passen auf Balken mit irgend einem anderen Querschnitte, und in allen Fällen wird die Wirkung dieselbe sein, wie wenn die Dimensionen des Querschnittes für einige Entfernung zu beiden Seiten des Schwerpunktes des Balkens verringert würden und die elastische Rückwirkung proportional der Deformation unbegrenzt bis zum Eintritte des Bruches zu wachsen fortführe.

Gbs. (Lp.)

Flamant. Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. C. R. CXIV. 1465-1468.

Ein Körper wird begrenzt von zwei parallelen Ebenen in einem endlichen Abstande und einer zu beiden senkrechten Ebene. Längs einer in der letzteren liegenden Linie, welche auf den beiden anderen Ebenen senkrecht steht, wird der Körper durch eine gleichmässig verteilte, zu der Ebene senkrechte Kraft beansprucht, während die beiden Seitenebenen ohne Reibung auf zwei starren Ebenen gleiten können.

Die Verschiebungen und Druckcomponenten werden berechnet. Es ergiebt sich, dass jedes der belasteten Linie parallele Flächen-

element einen Druck erleidet, welcher den parallelen Seitenflächen parallel ist und durch die belastete Linie hindurchgeht.

Auf die Senkrechte zu dieser Wirkungslinie projicirt, möge das Flächenelement die Grösse $ds$ ergeben, $r$ sei die Entfernung von der belasteten Linie und $z$ die Tiefe unter der Oberfläche, in welcher die Linie liegt; dann ist der Druck gleich

$$\frac{2Pzds}{\pi r^2},$$

wo $P$ die gegebene Belastung pro Längeneinheit ist. F. K.

---

E. Ovazza. Sul calcolo delle travi reticolari elastiche ad aste sovrabbondanti. Torino Atti XXVII. 394-412.

Der Verfasser betrachtet Fachwerke, welche aus an einander stossenden Vierecken gebildet sind, deren gegenüberliegende Knotenpunkte durch Diagonalen verbunden sind.

Man betrachte nur ein Viereck, welches durch zwei Gurtstäbe, zwei Querstäbe und zwei Diagonalen gebildet wird. Dann kann man vermöge der statischen Bedingungen die Spannungen in den Gurtstäben und in den Diagonalen durch die Spannung in dem einen Querstab und die in den Endpunkten desselben angreifenden äusseren Kräfte bestimmen. Zwischen den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks besteht die bekannte Euler'sche Relation; indem man dieselbe variirt und die Dilatation der sechs Seiten durch die Spannung ausdrückt, erhält man dann eine Gleichung zur Bestimmung der Spannung in dem gegenüberliegenden Querstabe.

Wenn man nun in dem freien Querstabe des ersten Feldes die Spannung nach Willkür annimmt, und nach Berechnung dieses Feldes zum zweiten übergeht, indem man die Spannungen in den Gurtstäben und Diagonalen des ersten Feldes als äussere Kräfte für das zweite einführt, so kann man auch dieses berechnen, u. s. f.

Die einzige Gleichung erhält man daraus, dass diese Kräfte am letzten freien Knotenpunkt im Gleichgewicht sein müssen.

Die Einzelheiten der Durchführung können hier nicht mitgeteilt werden. F. K.

---

B. DE FONTVIOLANT. Calcul des poutres continues: méthode satisfaisant aux nouveaux prescriptions du règlement ministériel du 29 Août 1891. C. R. CXV. 996-999.

Der Verf. sagt, dass er in dem Mém., von welchem eine summarische Uebersicht vorliegt, eine wenig umständliche (expéditif) graphische Methode der Construction der Einflusslinie für die einzelnen technisch wichtigen Grössen giebt: Biegungsmoment, Transversalkraft, Stützenreaction und elastische Durchbiegung. Dieselbe beruht auf früheren Sätzen des Verfassers (C. R. CVII, F. d. M. XXI. 1889. 1030). Als Beispiele werden einige Sätze mitgeteilt.

F. K.

---

F. RANIERI. La trave continua di uniforme resistenza soggetta a carichi fissi. Politecnico. XL. 389-400.

Analytische Bestimmung der Biegungsmomente für den im Titel bezeichneten Fall. Vi.

R. F. MAYER. Zur Berechnung der Durchbiegung frei aufliegender Brückenträger. Zeitschr. östr. Ing. XLIV. 566-567.

Der Verfasser berechnet den Coefficienten $C$ in der Formel

$$\delta = C\frac{pl^4}{EJ}$$

für den Fall constanten Querschnitts und den Querschnitt constanten Widerstandsmoments. Zu einem Referat über die Rechnung ist keine Veranlassung, da sie nichts Neues bietet.

F. K.

---

FR. JEBENS. Die seitliche Standsicherheit von eisernen Brücken ohne oberen Querverband. Centralbl. der Bauverw. XII. 148.

FR. ENGESSER. Die seitliche Standfestigkeit offener Brücken. Centralbl. der Bauverw. XII. 349-351.

In einer wenig überzeugenden Weise bestimmt Herr Jebens einen Wert für den grössten Druck, welcher in der oberen Gurtung stattfinden darf, ohne dass die Stützen der Gefahr des

Knickens ausgesetzt sind. Strenger ist der Ansatz des Herrn Engesser; es werden jedoch auch hier im Verlaufe der weiteren Rechnung Annahmen benutzt, welche nicht bewiesen sind.

F. K.

---

P. Kresnik. Zur Berechnung von Eisenbahnbrücken in Bögen. Zeitschr. östr. Ing. XLIV. 81-84, 199-200.

Joh. E. Brik. Zur Berechnung von Eisenbahnbrücken in Bögen. Ibid. 180-182, 233.

Es ist zuweilen erforderlich, eine Krümmung des Geleises gerade auf eine Brücke zu legen, so dass die Geleisaxe nicht mehr mit der Brückenaxe zusammenfällt. Herr Kresnik berechnet nach den Regeln der Statik die Querkraft und das Moment für die beiden Träger der Brücke.

Herr Brik ergänzt diese Berechnung, indem er auf die im „Handbuch der Ingenieurwissenschaften“ Bd. II von ihm gegebene Lösung verweist, durch Berücksichtigung des Höhenunterschiedes der Geleisaxe über dem Niveau der Stützpunkte der Querschwelle.

F. K.

---

F. Steiner. Ueber Metallconstructionen der Zukunft. Zeitschr. östr. Ing. XLIV. 113-117, 149-153.

Fr. Engesser. Ueber die Schwingungsdauer eiserner Brücken. Ibid. 386-388.

F. Steiner. Bemerkungen zu vorstehendem Aufsatze. Ibid. 388.

Fr. Engesser. Ueber die Schwingungsdauer eiserner Brücken. Ibid. 671.

F. Steiner. Ueber die Schwingungsdauer eiserner Brücken. Ibid. 672-674.

Eine Untersuchung über die Schwingungen eiserner Brücken, welche in dem ersten Aufsatz enthalten ist, hat zu einer Discussion zwischen den Herren Steiner und Engesser Anlass gegeben. Beide Herren behandeln die Schwingungen nach Meinung des Referenten in sehr summarischer Weise. Deshalb scheint die Notwendigkeit

eines Referates nicht vorzuliegen, während die Wichtigkeit, welche die Betrachtung der Schwingungen für die Technik von Tag zu Tag gewinnt, wenigstens die Anführung der Titel wünschenswert machte. F. K.

---

J. Boussinesq. Des perturbations locales que produit au-dessous d'elle une forte charge, répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords, à la surface supérieure d'une poutre rectangulaire et de longueur indéfinie posée de champ soit sur un sol horizontal, soit sur deux appuis transversaux équidistants de la charge. C. R. CXIV. 1510-1516.

J. Boussinesq. Des perturbations locales que produit au-dessous d'elle une forte charge répartie uniformément le long d'une droite normale aux deux bords à la surface supérieure d'une poutre rectangulaire: vérifications expérimentales. C. R. CXV. 5-11.

Angeregt durch eine optische Experimentaluntersuchung von Carus Wilson (Phil. Mag. Dec. 1891), untersucht der Verfasser das im Titel bezeichnete Problem, welches, wie man sieht, im nahen Zusammenhang zu der oben S. 955 besprochenen Arbeit von Flamant steht. Lässt man die Höhe des Trägers unendlich gross werden, so erhält man direct die von Flamant gelöste Aufgabe. Boussinesq giebt zunächst eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe, indem er ausser der zur Oberfläche senkrechten Kraft noch eine in derselben Linie angreifende Kraft voraussetzt, welche in der Oberfläche liegt und nur zur Angriffslinie senkrecht steht.

Denkt man sich nun durch eine der Oberfläche parallele Ebene ein Prisma von diesem Block getrennt, so muss man, damit das fragliche Prisma in demselben Zustande des Gleichgewichts verbleibe, an der neu gebildeten Grenze ein System von Kräften anbringen. Ruht das Prisma auf einer hinreichend rauhen Unterfläche, so kann man annehmen, dass von dieser Unterlage die fraglichen Kräfte ausgeübt werden.

Wenn aber das Prisma auf zwei reibungslosen Stützen ruht, was übrigens nur möglich ist, wenn die von Boussinesq herangezogene tangentiale Componente der angreifenden Kraft gleich Null ist, dann wirkt ein anderes als das erforderliche Kraftsystem. Will man also das Gleichgewicht aufrecht erhalten, so müssen den vorher berechneten Verschiebungen und elastischen Kräften andere hinzugefügt werden, welche von der Differenz der an der Unterseite wirklich angreifenden und der vorher erforderlichen Kräfte herrühren. Es wird wieder zunächst eine Lösung gesucht, welche dem unendlich hohen Körper entspricht, die dann wieder zu corrigiren wäre, u. s. f.

Weil aber die so entstehende Reihe zu langsam convergirt, zieht der Verfasser eine Hypothese heran, welche Stokes in einem Anhang zu Wilson's Arbeit giebt. Dieser setzt voraus, dass die Correctionsglieder für die Verticale unter der Last lineare Functionen der Tiefe sind. Nachdem Boussinesq diese Correctionsglieder berechnet hat, kann er leicht einen Ausdruck für die grösste Tangentialcomponente für einen in den fraglichen Variabeln liegenden Punkt berechnen. Für zwei Punkte ist diese gleich Null. Das sind bei der durch die Belastung hervorgerufenen temporären Doppelbrechung neutrale Punkte. Der Verfasser giebt an, dass die Versuche von Wilson die so gewonnenen Resultate vollauf bestätigen.

F. K.

---

A. B. Basset. On the theory of elastic wires. Lond. M. S. Proc. XXIII. 105-127.

Der Verfasser betrachtet Drähte, deren Querschnitt ein Kreis mit unveränderlichem kleinen Radius ist, deren Mittellinie eine beliebige Curve bildet. Die Druckkräfte, welche auf die Elemente eines Querschnitts wirken, lassen sich zu drei Componenten und drei Momenten vereinigen. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern dann sechs Differentialgleichungen.

Die Veränderungen werden nun als Functionen der Polarcoordinaten des betreffenden Punktes im Querschnitt ausgedrückt, und zwar werden sie zufolge gewisser Folgerungen als lineare Functionen des Cosinus und Sinus des die Lage bestimmenden Winkels

und als quadratische Functionen des Fahrstrahls angesehen. Eine genauere Bestimmung derselben erhält der Verfasser aus der Annahme, dass drei von den sechs Druckcomponenten so klein sind, dass man sie als verschwindend betrachten kann. So gelangt er schliesslich zu den Bewegungsgleichungen des Gebildes. Diese werden zunächst zur Bestimmung der Schwingungen eines kreisförmigen Drahtes angewandt. Dann werden die unendlich kleinen Deformationen bestimmt, welche eine schraubenförmige Feder unter Einfluss eines angehängten Gewichtes erfährt. Eine kritische Besprechung der Torsionstheorie von de Saint-Venant füllt einen Anhang zu der vorliegenden Abhandlung. F. K.

---

B. de Fontviolant. Sur les déformations élastiques maximums des arcs métalliques. C. R. CXIV. 410.

Es wird folgender Satz mitgeteilt:

„In irgend einem Bogen von constantem oder veränderlichem Querschnitte, welcher von beliebigen Kräften, gleichviel ob vertical oder nicht, beansprucht wird, gehören diejenigen Punkte der mittleren Faser, welche ein Maximum oder Minimum der Verrückung erleiden, solchen Querschnitten an, deren Verdrehungen gleich Null sind“.

Wenn die Verschiebung des betrachteten Punktes oberhalb der Tangente der mittleren Faser in diesem Punkte liegt, so ist sie ein Maximum, falls das Biegungsmoment in diesem Punkte negativ ist; ein Minimum im entgegengesetzten Falle. Wenn die Verschiebung aber unterhalb der Tangente liegt, so ist das Umgekehrte der Fall. F. K.

H. Resal. Sur la résistance et les faibles déformations des ressorts en hélice. C. R. CXIV. 37-41.

H. Resal. Nouvelle note sur la résistance et les faibles déformations des ressorts en hélice. C. R. CXIV. 99-102.

Von allgemeinen Formeln für die Deformation der Curven ausgehend, bestimmt der Verfasser die Variationen der in Betracht

kommenden Grössen zunächst für eine Schraubenlinie. Dann werden die Gleichungen angegeben, welche zwischen den Momenten einerseits und den Trägheitsmomenten des Querschnitts und den Variationen andererseits bestehen. Im besonderen werden die beiden Fälle betrachtet, dass der Querschnitt der Feder ein Kreis oder ein Rechteck ist.

Eine auszugsweise Wiedergabe gestattet die formelreiche Rechnung nicht. F. K.

---

A. B. Basset. On the difficulties of constructing a theory of the collapse of boiler-flues. Phil. Mag. (5) XXXIV. 221-233.

Die Theorie dünner Platten und Schalen, welche sich auf solche Voraussetzungen wie die von Clebsch stützt, ist, wie Lord Rayleigh und später Herr Basset gezeigt hat, unanwendbar, wenn die Oberflächen der Schalen einem äusseren Drucke unterliegen, und eignet sich daher nicht zur Aufstellung einer Theorie für den Zusammenbruch von Dampfröhren. Die Aufgabe kann in ihrer einfachsten Gestalt so formulirt werden: Die Röhre möge als unendlich lang und cylindrisch betrachtet werden; es seien $a+h$ und $a-h$ der Radius ihrer äusseren und ihrer inneren Oberfläche, $\Pi_1$ und $\Pi_2$ der Druck auf dieselben. Dann erfordert die Stabilitätsbedingung, dass eine gewisse Beziehung zwischen diesen vier Grössen vorhanden ist, die so geschrieben werden mag: $F(a, h, \Pi_1, \Pi_2) > 0$. Wenn diese Bedingung nicht befriedigt ist, wird das Gleichgewicht instabil sein, und eine Störung wird den Zusammenbruch der Röhre verursachen. Ist die Röhre von endlicher Länge $l$, so ist eine Correction erforderlich, deren Bedeutung von der Grösse des Verhältnisses von $a$ zu $l$ abhängt. Nimmt man den einfachsten Fall, so kann man sich der Aufgabe der Bestimmung von $F$ nähern: entweder 1), indem man unter der Annahme, dass die Röhre ein wenig deformirt wird, die Periode der kleinen Schwingungen findet, welche nach der Forderung der Stabilitätsbedingung reell sein muss, oder 2), indem man die potentielle Energie in dem deformirten Zustande findet; die Stabilitätsbedingung verlangt, dass die potentielle Energie der Röhre beim Gleichgewichte ein Minimum

ist. Die Anwendung der zweiten Methode schliesst die Kenntnis des Ausdruckes für die von der Deformation herrührende potentielle Energie in sich; doch ist die Form dieser Function nur bekannt, wenn die Oberfläche frei von äusserem Drucke ist, so dass die Methode sich nicht eignet.

Die Arbeit des Hrn. Bryan (Cambr. Proc. VI, F. d. M. XX. 1888. 1063), so weit sie bezüglich des Problems sich von dem Resultate des Verfassers unterscheidet, ist nach seiner Ansicht mit einem Fehler in dem Ausdrucke für die potentielle, von der Biegung herrührende Energie auf die Längeneinheit des Querschnitts behaftet; derselbe ist nur richtig, wenn die Oberfläche der Röhre frei von äusserem Drucke ist. Der Verf. schreitet zur Entwickelung seiner Lösung unter der Annahme, dass die Bewegung zweidimensional ist, und dass die Ausdehnung der mittleren Oberfläche vernachlässigt wird, während jedoch die Schale äusserem Drucke unterworfen wird. Ist $\sigma$ die Dichte und $2h$ die Dicke, dann sind die Gleichungen der Bewegung in der üblichen Bezeichnung ($\mu = 2h\sigma$):

$$\frac{dT}{ds} + \frac{N}{\varrho} = \mu v'', \qquad \frac{dG}{ds} + N = 0,$$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T}{\varrho} + \Pi_2\left(1 - \frac{h}{\varrho}\right) - \Pi_1\left(1 + \frac{h}{\varrho}\right) = \mu w''.$$

Der Ausdruck für das Kräftepaar $G$, von dem die Lösung abhängt, wird in der Form erhalten:

$$G = \frac{8h^3}{3a^2}\left(\frac{mn}{m+n} + \alpha\right)\left(\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w\right)$$

$$+ \frac{4h^3}{3a^2}\left(\frac{mn(m-n)}{(m+n)^2} + \beta\right)\left(\frac{dv}{d\varphi} + w\right) + \gamma,$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ von den Drucken abhängige Grössen sind, welche Null werden, falls keine äusseren Drucke vorhanden sind. Dieses Ergebnis wird dann unter Hinweis auf die notwendigen Vorsichtsmassregeln auf die fragliche Theorie angewandt, und die Stabilitätsbedingung der Röhre erhält die Gestalt:

$$\Pi_1 - \Pi_2 < \frac{8h^3}{a^3}\left(\frac{mn}{m+n} + \alpha\right).$$

Das Bryan'sche Resultat geht hieraus hervor, wenn man $\Pi_2 = 0$, $\alpha = k\Pi_1$ setzt, wo $k$ eine von $h$ unabhängige Constante bedeutet, und wenn man die Potenzen von $h$ über die dritte hinaus vernachlässigt, nämlich:

$$\Pi_1 < \frac{8h^3mn}{(m+n)a^2}.$$

Gbs. (Lp.)

---

WITTFELD. Stärke der Radreifen. Glaser's Ann. XXX. 218-219.

Der Verfasser bestimmt den jährlichen Aufwand $S$, welcher sich bei einer Stärke $x$ des Radreifens ergiebt, und sucht dann denjenigen Wert $x$, für welchen $S$ ein Minimum wird. Die Aufgabe führt auf eine kubische Gleichung für $x$. F. K.

---

S. DRZEWIECKI. Sur une méthode pour la détermination des éléments mécaniques des propulseurs hélicoïdaux. C. R. CXIV. 820-822.

Kurzer Bericht über eine ausführliche Arbeit des Verfassers. Das Ziel ist aus dem Titel zu erkennen; welche Mittel der Verfasser anwendet, um zu seinen Formeln zu gelangen, lässt sich aus dem vorliegenden Auszuge nicht ersehen. F. K.

---

J. MELAN. Ueber Berechnung der Führungsgerüste von Gasbehältern. Zeitschr. f. Bauw. XLII. 417-456.

Der Verf. berechnet die Beanspruchungen der einzelnen Bestandteile des Gerüstes unter Benutzung gewisser Hypothesen, die nicht streng genug gerechtfertigt erscheinen. Zu einem Referat an dieser Stelle liegt deshalb keine Veranlassung vor. F. K.

---

P. SCHIFF. Versuch der Anwendung der Elasticitätstheorie auf die Lehre von der Wirkung des Schusses auf die Lafette. Petersb. Abh. Anhang zum LXVII. Bd. No. 3. 1-60. (Russisch.)

Nach einem kurzen historischen Ueberblick über die Entwickelung der Lafettentheorie integrirt der Verfasser die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines elastischen isotropen starren Körpers unter der Vorausetzung, dass 1) jede Ebene, die der Symmetrieebene der Lafette parallel ist, keiner Spannung unterworfen ist, und dass 2) die Schwingungsverschiebungen in Bezug auf die Gleichgewichtslage ausser Acht gelassen werden können. Unter Voraussetzung solcher Bedingungen stellt sich dieses Problem als ein Analogon des Problems von Clebsch heraus. Danach besteht die Hauptschwierigkeit der Aufgabe in der Bestimmung der Constanten aus den Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte, deren Angriffsort die Fläche des Kanonengestells ist; hierzu gesellen sich noch die Schwierigkeiten, die von der Discontinuität der Functionen, welche die wirkenden Kräfte charakterisiren, herrühren, sowie diejenigen, die daraus entstehen, dass die Oberfläche der Lafette aus Ebenen und Cylinderflächen besteht. Der Verfasser bewältigt diese Schwierigkeiten, indem er von den bekannten Integralen Lejeune Dirichlet's Gebrauch macht. Nachdem er die Verschiebungen gefunden hat, betrachtet er das Elasticitätsellipsoid und findet die Bedingung seiner Festigkeit. Jk.

---

R. Hauser. Festigkeit der Stahlbronze-Rohre. Mitt. üb. Art. u. Gen. XXIII. 335-358.

Eine theoretische Untersuchung über die Geschützrohre aus Stahlbronze, die nach der in Oesterreich erzielten Vervollkommnung bei dem Herstellungsverfahren eine solche Festigkeit erhalten, „dass sie auch mit den besten Stahlrohren gleicher Dimensionen zu concurriren im Stande sind.“ Wir führen aus der Arbeit das Schlussurteil über die Inanspruchnahme des 9 cm Feldkanonenrohres beim Schusse an: Es seien zwei gleich dimensionirte Rohre aus Stahl und Stahlbronze in Parallele gestellt. „Unter diesen Verhältnissen zeigt die Gleichung (11), dass das Stahlrohr dem Stahlbronzerohr bedeutend unterlegen ist, indem ersteres bei voller Ausnutzung des Materials bis zur Elasticitätsgrenze von 24 kg für die Bohrungsschicht nur einem Gasdruck von 1400 Atmosphären gewachsen ist.“ Lp.

---

## Weitere Litteratur.

E. Claussen. Statik und Festigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Bauconstructionen. Analytisch und graphisch behandelt. Berlin. R. Oppenheim (Gust. Schmidt.) VII + 285 S. 8°.

Bericht in Abschnitt X, Capitel 3 A.

G. Kaiser. Die Construction der gezogenen Geschützrohre. Wien. [Arch. für Art. XCIX. 204-205.]

W. Keck. Vorträge über Elasticitätslehre als Grundlage für die Festigkeitsberechnung der Bauwerke. (In zwei Teilen.) Teil I. Hannover. VI + 162 S. gr. 8°.

C. J. Kriemler. Aus der Festigkeitslehre. Der Spannungszustand in den Punkten eines geraden Stabes bei den vier einfachen Fällen der Beanspruchung. Dargestellt zur Einführung in das Studium der Festigkeitslehre. Vevey. Roth's Verlag. 127 S. Mit 1 Taf.

J. Perry. Struts and tie-rods with lateral loads. Phil. Mag. (5) XXXIII. 269-284.

G. Di Simone. Sulle travi rette di uguale resistenza. Appendice. Politecnico. XL. 274-284, 349-361. — Vgl. Politecnico. XXXIX. 447-462, 560-576, 621-637, 641-648; F. d. M. XXIII. 1891. 1040.

Sommerfeldt. Die Grundzüge der Festigkeitslehre in ihrer besonderen Anwendung auf die Berechnung provisorischer Eisenbahn-Brücken. Berlin. Mittler u. Sohn. VIII u. 258 S. Mit Abbildungen. 8°.

H. Undeutsch. Spannungen aufgehängter prismatischer Körper, hervorgerufen durch statische und dynamische Beanspruchungen. [Aus: „Oesterr. Zeitschr. f. Berg- u. Hüttenwesen".] Freiberg. Craz und Gerlach. 51 S. mit 1 Holzschn. u. 2 Taf. 8°.

## C. Capillarität.

E. PADOVA. Sulla teoria della capillarità. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 331-335.

Der Verfasser leitet die Bedingungen, welche an der Berührungsfläche der Grenze zweier Flüssigkeiten gelten, aus der Voraussetzung ab, dass die Capillarkräfte ein Potential haben, welches proportional der Oberfläche der gemeinschaftlichen Grenze ist. Es müssen also die äusseren Kräfte, welche auf die Flüssigkeit wirken, für jede virtuelle Verrückung, bei welcher das Volumenelement im Innern der Flüssigkeit und das Flächenelement an der Grenze ihren Wert nicht ändern, die Arbeit Null ergeben.

Der Verfasser multiplicirt nun die Gleichungen, welche diese Bedingungen zum Ausdruck bringen, mit willkürlichen Grössen, integrirt dann über die Gebiete, für welche sie gelten, und fügt die so gewonnenen Ausdrücke zu demjenigen für die Arbeit hinzu. So gelangt er zu einem Ausdruck, welcher für jede beliebige Verrückung zum Verschwinden gebracht werden kann. Indem durch bekannte Transformationen die Ableitungen der Verrückungen beseitigt werden, gelangt er schliesslich zu den gewünschten Gleichgewichtsbedingungen. F. K.

J. D. VAN DER WAALS. Thermodynamische theorie der capillariteit in de onderstelling van continue dichtheidsverandering. Amst. Verh. I. No. 8. 1-56.

In Herrn Gibbs' Abhandlung ist eine thermodynamische Theorie der Capillarität entwickelt, welche sich auf die Anwesenheit von Discontinuitätsflächen stützt. Der Verfasser beabsichtigt, eine solche Theorie unter Voraussetzung nur stetiger Dichtigkeitsänderungen aufzustellen. Den Ausgangspunkt bildet der Grundsatz, ein Stoff lagere sich in einem gegebenen Raume so, dass bei gegebener Energie die Entropie einen Maximalwert erhält, oder, mathematisch formulirt, so, dass man hat:

$$(1) \qquad \delta\int\varrho(\varepsilon-\tau_1\eta)dk=0, \text{ wenn } \int\varrho dk=\text{constant}.$$

Hierin sind $\varrho$, $\varepsilon$, $\eta$ die Dichte, die Energie und die Entropie, die beiden letzteren pro Masseneinheit, $\tau_1$ eine gegebene Temperatur. Wenn keine capillaren Wirkungen in Betracht gezogen werden, so ist der Wert von $\varepsilon - \tau_1 \eta$ in jedem Punkte eine Function der Dichte $\varrho$ allein in eben demselben Punkte. Die Capillarität wird nun in Rechnung gebracht, indem vorausgesetzt wird, $\varepsilon - \tau_1 \eta$ sei eine Function der Dichte $\varrho$ und sämtlicher Parameter, welche die Aenderung der Dichte in der um denselben Punkt beschriebenen Wirkungssphäre der molecularen Kräfte bestimmen. Für jene Parameter können unter der Voraussetzung paralleler Schichten, wenn $h$ eine Normale zu denselben bedeutet, die Grössen $\frac{d\varrho}{dh}$, $\frac{d^2\varrho}{dh^2}$, ... angenommen werden. Im Falle einer Flüssigkeit (Dichte $\varrho_1$), über der sich der gesättigte Dampf (Dichte $\varrho_2$) befindet, wird für einen Punkt im Innern der Flüssigkeit gesetzt:

$$\varepsilon_1 = C - a\varrho_1,$$

wo $a$ die Constante der Zustandsgleichung ist. Im Punkte $h$ der Grenzschicht wird sodann aus einer Betrachtung der molecularen Wirkungen gefunden:

$$\varepsilon = C - a\varrho - \frac{c_2}{2!}\frac{d^2\varrho}{dh^2} - \frac{c_4}{4!}\frac{d^4\varrho}{dh^4} - \cdots.$$

Vorläufig werden nur die drei ersten Glieder in Rechnung gezogen, d. h. es wird angenommen, die Dicke der in Betracht kommenden Grenzschicht sei „sehr gross gegenüber dem Radius der Wirkungssphäre". Wenn eine Function von $\varrho$ allein als die Entropie betrachtet werden darf, so ist die freie Energie pro Masseneinheit

$$f(\varrho) - \frac{c_2}{2}\frac{d^2\varrho}{dh^2},$$

worin

$$f(\varrho) = -\int p\,dV = -R\tau \log\left(\frac{1}{\varrho} - b\right) - a\varrho.$$

Durch Einführung dieses Wertes in (1) erhält man als Gleichgewichtsbedingung im ganzen Gefäss:

$$(2) \qquad f(\varrho) + \varrho\frac{df}{d\varrho} - c_2\frac{d^2\varrho}{dh^2} = \mu_1,$$

wo $\mu_1$ das thermodynamische Potential des Stoffes pro Masseneinheit bedeutet, oder auch:

$$\varepsilon - \tau_1 \eta + p V - \mu_1 = \frac{c_2}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \cdot$$

Die Aenderung der Dichte in einer zur Grenzschicht senkrechten Richtung wird graphisch dargestellt durch zwei der $h$-Axe nahezu parallele Linien, welche durch eine stark fallende Curve verbunden sind.

Es wird nun weiter die Stabilität der erhaltenen Massenverteilung durch die Bestimmung des Vorzeichens der Grösse

$$\delta^2 \int \varrho \left[ f(\varrho) - \frac{c_2}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} - \mu_1 \right] dh$$

näher untersucht; diese Variation ist positiv, der Zustand somit stabil. Die Gleichung (2) ergiebt durch Differentiation und nachherige Integration

$$(3) \qquad p_1 = p - c_2 \left[ \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \right],$$

wo $p_1$ den äusseren Druck bedeutet. Hiermit wird nun

$$(4) \qquad \varepsilon - \tau_1 \eta + p_1 V = \mu_1 + \frac{c_2}{2} \left[ \frac{1}{\varrho} \left( \frac{d\varrho}{dh} \right)^2 - \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \right],$$

woraus der Verfasser schliesst, dass, wenn für das thermodynamische Potential in der Grenzschicht entweder $\varepsilon - \tau_1 \eta + p V$ oder $\varepsilon - \tau_1 \eta + p_1 V$ angenommen wird, dasselbe jedenfalls nicht den im übrigen Teil des Gefässes bestehenden constanten Wert $\mu_1$ hat. Aus diesem Grunde wird gegen die Herleitung der Grundgleichung der Capillarität in der Gibbs'schen Theorie:

$$\varepsilon_s = \tau_1 \eta_s + \sigma S + \mu_1 m_s$$

ein Einwand erhoben, obgleich die Gleichung selbst, wie der Verfasser beweist, mit der nachstehenden übereinstimmt:

$$\sigma = \int \varrho dh [\varepsilon - \tau_1 \eta + p_1 V - \mu_1],$$

welche den Wert der capillaren Energie pro Flächeneinheit in des Verfassers Theorie bestimmt. Dieser Ausdruck wird mit Hülfe

von (4) umgestaltet zu

$$\sigma = c_2 \int \left(\frac{d\varrho}{dh}\right)^2 dh = - c_2 \int \varrho \frac{d^2\varrho}{dh^2} dh,$$

woraus folgt: diejenigen Schichten, welche als verdünnte Flüssigkeit betrachtet werden können, tragen zur capillaren Energie bei, während die als comprimirter Dampf auftretenden Schichten dieselbe verringern. Dieses Gesetz soll allgemein gültig sein.

Im nächsten Abschnitt wird die Capillarität in einer kugelförmigen Masse untersucht. Zunächst wird wieder aus moleculartheoretischen Betrachtungen ein Ausdruck für die Kraft hergeleitet, welche eine in einer Schicht von veränderlicher Dichte befindliche Masseneinheit in der Richtung des Radius erfährt, und hieraus für die Energie gefunden

$$\varepsilon = C - a\varrho - \frac{c}{2} \frac{d^2\varrho}{dR^2} - \frac{c}{R} \frac{d\varrho}{dR}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung wird somit

$$f(\varrho) + \varrho \frac{df}{d\varrho} - c \frac{d^2\varrho}{dR^2} - 2 \frac{c}{R} \frac{d\varrho}{dR} - \mu_1 = 0$$

lauten. Der Druck in der Flüssigkeit und im Dampfe hat nun aber nicht denselben Wert, der bei einer ebenen Grenzschicht aus (3) sich ergab. Für zwei Punkte innerhalb der Flüssigkeit und des Dampfes, die bzw. die Entfernungen $R_1$, $R_2$ vom Mittelpunkte haben, ergiebt sich

$$p_1 - p_2 = 2c \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{R} \left(\frac{d\varrho}{dR}\right)^2 dR,$$

woraus für

$$c \int \left(\frac{d\varrho}{dR}\right)^2 dR = \sigma$$

mit grosser Annäherung die bekannte Formel

$$p_1 - p_2 = \frac{2\sigma}{R}$$

der gewöhnlichen Theorie folgt. Für die capillare Energie pro Flächeneinheit wird ebenfalls mit grosser Annäherung die so eben eingeführte Grösse $\sigma$ gefunden; dieselbe ist die Capillaritätsconstante der älteren Theorie.

Mit Hülfe der Zustandsgleichung wird aus (2), (3) erhalten:

$$\sigma = \sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} d\varrho \left[ p_1 - \mu_1 \varrho - a\varrho^2 - R\tau\varrho \log \left( \frac{1}{\varrho} - b \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

und in der Nähe der kritischen Temperatur lässt sich die Integration angenähert ausführen, wodurch sich ergiebt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{ca}{8}} \cdot \varrho_k^{\frac{3}{2}} \frac{(n_2 - n_1)^3}{6}.$$

Diese Formel weicht von der aus der Laplace'schen Theorie hervorgehenden ziemlich stark ab. Sie wird mit einer empirischen, von Mathias gegebenen Formel verglichen.

Bei der nun folgenden Berechnung der Grösse der capillaren Schicht wird hierfür ein unendlich grosser Wert gefunden, was der Verf. nicht als einen Einwand gegen seine Theorie betrachten will, weil gezeigt werden kann, dass die Dicke der Schicht für bei den Experimenten zutreffende Daten etwa den 500-fachen Wert des Radius der Wirkungssphäre noch nicht übersteigt.

Die thermischen Eigenschaften der capillaren Schicht finden im nächsten Abschnitt Berücksichtigung. Ausserdem wird durch Einführung der Voraussetzung einer discontinuirlichen Dichtigkeitsänderung aus der Form der Capillaritätsconstante $\sigma$ der Laplace'sche Ausdruck für dieselbe hergeleitet.

Im letzten Abschnitt wird eine Schätzung des Einflusses der Vernachlässigung der Glieder von der Form

$$\frac{c_4}{4!} \cdot \frac{d^4\varrho}{dh^4} \text{ etc.}$$

versucht. Einige weitere mathematische Ueberlegungen führen den Verfasser zu dem Schlusse, es sei

$$C - \int \frac{du}{u} e^{-\frac{u}{\lambda}}$$

der wahre Ausdruck für das Potential zweier Massenpunkte in der Entfernung $u$ von einander. Mo.

---

C. Maltézos. Mesures directe et indirecte de l'angle de raccordement d'un liquide qui ne mouille pas le verre. C. R. CXIV. 977-979.

Es wird ohne Ableitung eine neue Gleichung zwischen der Capillaritätsconstante und den geometrischen Dimensionen eines auf einer Glasplatte ruhenden Quecksilbertropfens und ein Verfahren zur Messung des dabei auftretenden Randwinkels mitgeteilt. Diese Messung geschieht durch einen Positionskreis, der am Fernrohr eines Kathetometers angebracht ist. Br.

---

C. Maltézos. Conditions d'équilibre et de formation des microglobules liquides. C. R. CXV. 796-799.

Der Verfasser betrachtet den Gleichgewichtszustand einer kleinen Flüssigkeitsmenge, die, umgeben von einem Gas, auf einer andern Flüssigkeit ruht. Als wirkende Kräfte kommen die drei Oberflächenspannungen, die Schwere und die Auftriebe in Frage. Aus den Gleichgewichtsbedingungen wird für die Möglichkeit von Tropfenbildungen folgendes Resultat abgeleitet: 1) Wenn ein Flüssigkeitstropfen sich auf der freien Oberfläche einer anderen, dichteren ausbreitet, so erhält man im Fall der entgegengesetzten Lagerung der Flüssigkeiten Tropfen. 2) Wenn eine Flüssigkeit auf der Oberfläche einer andern, dichteren Tropfen bildet, so findet bei der entgegengesetzten Lagerung der Flüssigkeiten Ausbreitung statt.

Br.

---

M. Cantor. Ueber Capillaritätsconstanten. Wiedemann Ann. XLVII. 399-423.

Die Arbeit behandelt im wesentlichen den Einfluss von elektrolytischen Polarisationen auf die Randwinkel zwischen Metall und Flüssigkeit. Der theoretische Teil besteht der Hauptsache nach in der Aufstellung von Formeln, die zur Berechnung der Versuche dienen sollen und ohne allgemeines Interesse sind. Br.

---

Lord Rayleigh. On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force. Phil. Mag. (5) XXXIV. 145-154.

Lord Rayleigh. On the instability of cylindrical fluid surfaces. Phil. Mag. (5) XXXIV. 177-180.

Wenn die Gleichgewichtsoberfläche $r = a$ eines langen Flüssigkeitscylinders etwas deformirt wird, so dass sie $r = a + \alpha \cos kz$ wird ($z$ parallel der Axe), so ist die Deformation nach Plateau stabil oder instabil, je nachdem $ka$ grösser oder kleiner als 1 ist, d. h. je nachdem die Wellenlänge $\lambda$ der Erweiterung (varicosity) kleiner oder grösser als der Cylinderumfang $2\pi a$ ist. Allein die Lösung der bloss statischen Aufgabe ist nicht ausreichend für die Anwendung auf das wichtige Problem des Zerfalles eines Flüssigkeitsstrahles. Eine Deformation von irgend einer Wellenlänge, die über $2\pi a$ hinausgeht, wächst exponentiell mit der Zeit ($e^{qt}$), und was gefordert wird, ist die Beziehung zwischen $q$ und $\lambda$; ein Wert von $\lambda$, wenn irgend einer, für den $q$ ein Maximum ist, bestimmt die Art der grössten Instabilität. Als eine der Capillarität widerstrebende Kraft scheint Plateau nur die Zähigkeit berücksichtigt zu haben, aber in dem Falle der aus Flüssigkeiten wie Wasser gebildeten Strahlen dürfte der Einfluss der Zähigkeit klein ausfallen und die Trägheit eine führende Rolle übernehmen. Versuche über das Verhalten feiner Syrupsfäden auf Papier, die sich langsam in Tropfen auflösen von ähnlichem Aussehen, wie die aus einem Wasserstrahle erhaltenen, wiesen darauf hin, dass unter dem alleinigen Einflusse der Zähigkeit die Auflösungsart nahezu dieselbe sein würde wie unter dem alleinigen Einflusse der Trägheit. Doch war das Resultat sehr verschieden, und die von der Papierunterlage ausgeübten verzögernden Kräfte dürften von einem ganz anderen Charakter sein als die von der blossen Zähigkeit des Flüssigen herrührenden. Zur Darstellung solcher Contactkräfte wird das Problem hier in der Form betrachtet, die es annimmt, wenn die Widerstände proportional den absoluten Geschwindigkeiten der Teile sind, und das Ergebnis beleuchtet das Verhalten der Syrupsfäden in Berührung mit dem Papiere, indem es einen markirten Unterschied zwischen diesem Falle und dem eines Fadens zeigt, dessen Zerfallen nur an der wirklichen Zähigkeit des Flüssigen einen Widerstand findet. Die radialen und axialen Geschwindigkeiten $u$, $\omega$ können als aus einem Geschwindigkeitspotential abgeleitet genommen werden: $u = \partial\varphi/\partial r$, $\omega = \partial\varphi/\partial z$. Ist der Widerstand das $\mu'$-fache der Geschwindigkeit, so ist im gegenwärtigen Falle der

Druck $p = -\mu'\varphi - \varrho d\varphi/dt$. Die Gleichung für das Geschwindigkeitspotential wird

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - k^2\varphi = 0,$$

indem die die Bewegung definirenden Grössen als Functionen von $z$ zu $e^{ikz}$ und als Functionen von $t$ zu $e^{int}$ proportional sind, wo $k$ reell ist, $n$ aber complex sein kann. Für $\varphi$ ist die Lösung

$$\varphi = Ae^{i(nt+kz)}J_0(ikr),$$

während $p = -(\mu' + in\varrho)\varphi$. Die Grenzbedingung für $r = a$ giebt, da der variable Teil des Druckes von der Spannung $T$ herrührt, die constant vorausgesetzt wird:

$$\frac{T}{\varrho a^2} \cdot \frac{(k^2a^2-1)ikaJ_0'(ika)}{J_0(ika)} + in(in + \mu'/\varrho) = 0,$$

d. h. eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von $n$. Ist daher $\mu' = 0$, so ist die Verrückung exponentiell instabil, falls $ka < 1$, periodisch, falls $ka > 1$; ist dagegen die Trägheit im Vergleich zur Zähigkeit zu vernachlässigen, so folgt

$$in = \frac{T}{\varrho a^2}\,\frac{ika(1-k^2a^2)J_0'}{\mu'/\varrho . J_0},$$

so dass die Instabilität am grössten ist, wenn $ka$ denselben Wert hat wie im vorigen Falle. Im allgemeinen Falle ist die Verrückung bei $ka < 1$ instabil, bei $ka > 1$ stabil.

Die Untersuchung für eine wirkliche zähe Flüssigkeit ist complicirter, da ja ein Geschwindigkeitspotential nicht existirt. Dieser Fall wird ebenfalls erörtert, doch können wir kaum darüber berichten, weil dies zu grossen Raum beanspruchen würde. Es möge jedoch ausgesprochen werden, dass das Ergebnis darauf hinauskommt, zu zeigen, dass, wenn die Zähigkeit überwiegt, lange Fäden nicht danach streben, sich in Tropfen in gegenseitigen Abständen aufzulösen, die mit dem Durchmesser des Cylinders vergleichbar sind, sondern dass sie vielmehr durch Verdünnung an wenigen und entfernten Stellen nachgeben. Eine Trennung in zahlreiche Tropfen kann als augenscheinlicher Beweis dafür an-

genommen werden, dass die Fluidität ausreichend war, um die Trägheit in Thätigkeit zu versetzen.

In der zweiten Abhandlung wird der Fall, bei dem die Trägheit nicht des Flüssigen an der Aussenseite, sondern desjenigen an der Innenseite vernachlässigt werden kann, besonders betrachtet, ein Fall z. B. der Auflösung eines Luftstrahles unter Wasser.

Gbs. (Lp.)

---

G. VAN DER MENSBRUGGHE. Sur la cause commune de l'évaporation et de la tension superficielle des liquides. C. R. CXV. 1059-1060, Belg. Bull. (3) XXIV. 543-544.

Kurze Note, die nur Ueberlegungen enthält. Die gemeinsame Ursache der gedachten Erscheinungen sieht der Verfasser in der Existenz von Repulsivkräften und Tangentialdrucken. Br.

---

# Capitel 2.
# Akustik und Optik.

## A. Akustik.

D. E. JONES. Elementary lessons in sound, light, and heat. London. Macmillan and Co. XI + 232 S.

D. E. JONES. Lessons in heat and light. London. Macmillan and Co. X + 315 S.

Beide Bücher sind elementar, aber ausgezeichnete Beispiele für das, was solche Bücher zu leisten haben. Gbs. (Lp.)

---

F. V. DWELSHAUVERS-DERY. Grundlage einer neuen Methode der Schallstärkemessung. Diss. Leipzig u. Baden-Baden. Const. Wild's Verl. 23 S. 8°.

---

MOESSARD. Sur la méthode Doppler-Fizeau. C. R. CXIV. 1471-1473.

H. DE LA FRESNAY. Méthode Doppler-Fizeau. Formule exacte. Formule approchée. Évaluation de l'erreur commise. C. R. CXV. 1289-1292.

Bewegt sich eine Licht- oder Schallquelle längs einer Geraden mit der constanten Geschwindigkeit $v$, und bewegt sich gleichzeitig der Beobachter auf derselben Geraden mit der Geschwindigkeit $v'$, ist ferner $t$ die Zeit zwischen der Aussendung zweier Wellen seitens der Quelle, $t'$ dagegen die Zeit, welche zwischen der Ankunft der einen und der anderen beim Beobachter verstreicht, so ist

$$(1) \qquad \frac{t}{t'} = \frac{V-v'}{V-v},$$

falls $V$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei ruhender Quelle und ruhendem Beobachter bezeichnet. Diese Formel wird von Herrn Moessard durch elementare Betrachtungen abgeleitet und sodann dahin erweitert, dass ausser den vorher angegebenen Bewegungen noch eine Bewegung des die Wellen fortpflanzenden Mediums erfolgt, und zwar an der Schall- resp. Lichtquelle mit der Geschwindigkeit $a$, beim Beobachter mit der Geschwindigkeit $a'$. Dann tritt an Stelle der Formel (1) die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{t}{t'} = \frac{V+a'-v'}{V+a-v},$$

aus der mehrere Folgerungen gezogen werden.

In der zweiten der im Titel genannten Abhandlungen wird die Betrachtung dahin erweitert, dass sich Schallquelle und Beobachter längs verschiedener Linien bewegen. In diesem Falle wird

$$(3) \qquad \frac{t}{t'} = \frac{V-v'}{V-v} - \frac{s}{t'(V-v)}.$$

Hierin haben $V$, $t$, $t'$ die frühere Bedeutung; $v$ und $v'$ aber sind nicht die Geschwindigkeiten des Beobachters und der Quelle, sondern die Projectionen jener Geschwindigkeiten auf die Linie $AB$, welche den Ausgangspunkt $A$ der ersten Welle mit dem Orte $B$ verbindet, den der Beobachter bei Ankunft der ersten Welle einnimmt. Ferner ist, wenn $A_1 B_1$ dieselbe Bedeutung für die zweite

Welle hat wie $AB$ für die erste, $s$ die Differenz der Linie $A_1 B_1$ und ihrer Projection auf $AB$.

Aus (3) werden mehrere Näherungsformeln abgeleitet und deren Anwendungen besprochen. Schliesslich werden Bedenken gegen die Zulässigkeit der Formel (2) geäussert; keinesfalls gelte diese unter allen Umständen. Wn.

---

F. Lippich. Ueber die Wirkungsweise des Violinbogens. Prag. Math. Ges. 1892. 118-138.

Zur Erklärung der Wirkungsweise des Violinbogens muss man, wie schon Duhamel fand, die Reibung zwischen Bogen und Saite in Betracht ziehen. Die auf dieser Grundlage von Duhamel gegebenen Entwickelungen sind indessen nicht ausreichend, da dieser Autor nur den Fall eingehend behandelt hat, in dem die Bogengeschwindigkeit grösser ist als die grösste Geschwindigkeit des gestrichenen Saitenpunktes im Sinne der Bogenbewegung; ungleich wichtiger aber als der vorgenannte ist der andere Fall, in dem der gestrichene Saitenpunkt dieselbe Geschwindigkeit wie der Bogen erreichen kann. Die für letzteren Fall geltenden Formeln werden in der vorliegenden Abhandlung entwickelt.

Die Erörterung des Reibungsvorganges ergiebt, dass in dem in Rede stehenden Falle die gestrichene Stelle eine gewisse Zeit hindurch an dem Bogen haften bleibt. Die Bewegung der Saite ist für diese Zeit eine gezwungene. Die Ableitung der Formeln für diese gezwungene Bewegung ist die erste zu lösende Aufgabe. Der Ausschlag $y$ jedes Punktes der Saite genügt der bekannten partiellen Differentialgleichung und lässt sich daher durch die Gleichung

$$y = \eta_1 + \lambda_1(x)$$

darstellen, wo $\lambda_1$ die Ordinate eines durch die Endpunkte der Saite gehenden Polygons ist, $\eta_1$ eine nach Sinus der Vielfachen von $\frac{\pi x}{l}$ und Sinus und Cosinus der Vielfachen von $\frac{2\pi t}{T}$ fortschreitende Reihe. Die Coefficienten dieser Reihe sind so zu bestimmen, dass von $t = 0$ bis $t = \tau$ die Geschwindigkeit des gestrichenen Punktes,

der bei $x = a$ liege, gleich der constanten Geschwindigkeit $v$ des Bogens ist. Weiter ist die Bewegung der Saite für die Zeit zu ermitteln, wo der gestrichene Punkt vom Bogen losgerissen ist, d. h. für $t > \tau$. Hier wird, falls $t$ kleiner ist als die Schwingungsdauer $T$, $y$ von der Form

$$y = \eta_1 + \eta_0 + \lambda_2(x) + \lambda_0(x),$$

wo $\eta_1$ die obige Reihe ist, $\eta_0$ eine analoge mit anderen Coefficienten, $\lambda_2$ und $\lambda_0$ die Ordinaten gewisser gebrochener Linien. In der letzten Gleichung liegt das Resultat, dass der periodische Teil von $y$ sich aus zwei Componenten zusammensetzt, von denen die eine denselben Ausdruck hat wie in der Periode des Mitnehmens, während die andere der Bewegung einer zur Zeit $t = \tau$ an mehreren Stellen gezupften Saite entspricht.

Nachdem so die Bewegung der Saite für die Dauer einer Schwingung ermittelt ist, wird die stationäre Bewegung der Saite untersucht unter der Voraussetzung, dass der gestrichene Punkt während eines Hin- und Rückgangs nur einmal innerhalb einer endlichen Strecke gleiche Geschwindigkeit mit dem Bogen habe. Soll überhaupt eine stationäre Bewegung möglich sein, so muss die Schwingungsdauer der gestrichenen Saite dieselbe sein wie die der frei schwingenden. Für die stationäre Bewegung wird

$$y = \eta + \lambda_0,$$

wo

$$\eta = \frac{vT^2}{\pi^2(T-\tau)} \sum_i \frac{\sin\frac{\pi i t}{T}}{i^2 \sin\frac{\pi i a}{l}} \sin\frac{\pi i x}{l} \sin\frac{2\pi i}{T}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

ist, während $\lambda_0$ die Ordinate der gebrochenen Linie ist, die den Punkt des Losreissens vom Bogen mit den festen Endpunkten der Saite verbindet.

Zum Schluss werden aus der aufgestellten Theorie noch mehrere Folgerungen gezogen, die mit experimentell festgestellten Thatsachen übereinstimmen. Wn.

E. Mercadier. Sur la forme générale de la loi du mouvement vibratoire dans un milieu isotrope. C. R. CXV. 1264-1267.

Für die Schwingungszahl $n$ eines isotropen Körpers wird aus dem Princip, dass die Dimensionen zu beiden Seiten einer jeden Gleichung dieselben sein müssen, folgende Formel abgeleitet:

$$n = A\sqrt{\frac{q}{\delta}}\cdot\frac{1}{\varphi_1}.$$

Darin ist $q$ der Elasticitätsmodul, $\delta$ die Dichtigkeit, $A$ eine numerische Constante, $\varphi_1$ eine Function, die alle Dimensionen des betrachteten Körpers enthalten und dabei vom ersten Grade sein muss. Der letzteren Forderung kann man, wenn mehr als eine Dimension in Frage kommt, auf mehrfache Weise genügen; welche von den möglichen Lösungen zu wählen ist, ist experimentell zu bestimmen. Für Kreisscheiben von der Dicke $e$ und dem Durchmesser $d$ ist z. B.

$$\varphi_1 = \frac{d^2}{e},$$

weil erfahrungsgemäss die Schwingungszahl von Scheiben desselben Durchmessers der Dicke proportional ist.

Nachdem die Function $\varphi_1$ für eine Reihe von Beispielen bestimmt ist, wird zum Schluss der Satz aufgestellt: die Verhältnisse der Schwingungszahlen geometrisch und mechanisch ähnlicher Körper stehen im umgekehrten Verhältnis der homologen Dimensionen.

Wn.

---

## B. Theoretische Optik.

A. B. Basset. A treatise on physical optics. Cambridge. Deighton, Bell, and Co. [Nature XLVI. 266-267, 315.]

---

C. Somigliana. Sulle espressioni analitiche generali dei movimenti oscillatori. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 111-119.

Der Satz von Clebsch (Ueber die Reflexion an einer Kugel-

fläche, J. für Math. LXI. 195-262, 1861) bezüglich der Zerlegung einer beliebigen oscillatorischen Bewegung eines isotropen Mittels in zwei Bewegungen, von denen die eine longitudinal, die andere transversal ist, wird in der „Mathematischen Optik“ von Kirchhoff, herausgegeben von K. Hensel, und in den „Vorlesungen über die Theorie des Lichtes“ von Volkmann angezogen, wegen seines Beweises aber wird auf die oben citirte Abhandlung von Clebsch verwiesen. Der Verf. hält nun das Beweisverfahren von Clebsch für nicht gerade einfach und meint, dasselbe erfordere ausserdem eine andere Betrachtung zur Ergänzung. Beides bezweckt er durch seinen Beweis zu leisten. Lp.

---

O. J. Lodge. On the present state of our knowledge of the connection between ether and matter: an historical summary. Nature XLVI. 164-165.

Auszug aus einem Vortrage vor der Londoner Physikalischen Gesellschaft. Nach der Aufzählung aller Experimente, welche zur Feststellung der relativen Bewegung des Aethers zur Erde mit negativem Erfolge angestellt worden sind, wird eine Formel entwickelt, in welcher die Aethergeschwindigkeit enthalten ist. Aus ihr zieht der Verf. den Schluss: „Keine optische, von der Erdbewegung herrührende Wirkung erster Ordnung kann in auffindbarer Form vorhanden sein“. Lp.

O. J. Lodge. Aberration problems: a discussion concerning the connexion between ether and matter, and the motion of the ether near the earth. Lond. R. S. Proc. LI. 98-101.

Auszug aus einer Abhandlung, die in den Transactions erscheinen dürfte. Cly. (Lp.)

---

O. J. Lodge. Aberration problems. Nature XLVI. 497-502.

Eine Vorlesung in der Royal Institution über „die Bewegung

des Aethers bei der Erde", in der alle Gesichtspunkte anschaulich gemacht, alle bezüglichen Erscheinungen erklärt und übersichtlich zusammengestellt sind. Lp.

---

G. Foussereau. Sur l'entraînement des ondes lumineuses par la matière en mouvement. Almeida J. (3) I. 144-147.

Nach Hrn. Potier pflanzt sich eine pendelartige Schwingungsbewegung von unveränderlich angenommener Amplitude und Wellenlänge durch ein mit einer Geschwindigkeit $v$ behaftetes Medium mit einer Geschwindigket $V_1$ in der Richtung der Fortpflanzung der Wellen gemäss der Formel fort:

$$(\varrho+\varrho')V'^2 = \varrho V_1^2+\varrho'(V_1-v)^2,$$

wo $V'$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen durch dasselbe, in Ruhe befindliche Medium bedeutet, $\varrho$ und $\varrho'$ die Dichtigkeiten des freien und des im Medium verdichteten Aethers. Der Verf. liefert mit Benutzung einer Fresnel'schen Hypothese einen Beweis jener Formel für eine beliebige dem Aether mitgeteilte Erschütterung, die eine ebene Welle oder eine Reihe solcher Wellen erregt, ohne etwas anderes als die Anfangsbedingungen jener Erschütterung anzunehmen. Lp.

---

Lord Rayleigh. Aberration. Nature XLV. 499-502.

Ein zusammenfassender Artikel über alle mit dem Namen der Aberration zu belegenden Erscheinungen, ursprünglich für die Encyclopaedia Britannica geschrieben (1887), aber damals nicht abgedruckt und erst jetzt veröffentlicht; „nicht bloss die scheinbare, von Bradley entdeckte Verrückung der Sterne, sondern auch andere verwandte Erscheinungen, die von der Lichtgeschwindigkeit abhängen, welche ein endliches Verhältnis zur Erdgeschwindigkeit bei ihrem Laufe um die Sonne, sowie zu anderen astronomischen Geschwindigkeiten besitzt". Lp.

---

H. Poincaré. Sur un mode anormal de propagation des ondes. C. R. CXIV. 16-18.

Ein particuläres Integral der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V^2 \Delta \xi,$$

von der die Lichtschwingungen in einem isotropen Medium abhängen, das ausser von $z$ und $t$ nur von $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ abhängt, ist

$$(2) \qquad \xi = A I_0(h\varrho)\cos 2\pi\left(\frac{z}{l} - \frac{t}{T}\right).$$

Darin bezeichnet $I_0$ die Besselsche Function mit dem Index Null, und zwischen den Constanten $h$, $l$, $T$ besteht die Gleichung

$$\frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{1}{V^2 T^2} - \frac{1}{l^2}.$$

Gleichung (2) stellt eine Schwingung dar, die sich parallel $z$ fortpflanzt, und deren Intensität mit dem Abstande von der $z$-Axe variirt; $l$ wird als scheinbare, $\lambda = VT$ als normale Wellenlänge bezeichnet. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer derartigen Welle ist nicht

$$\frac{l}{T} = \frac{Vl}{\lambda},$$

sondern $V\frac{\lambda}{l}$. Das ergiebt sich, wenn man annimmt, dass in (2) $A$ nicht constant, sondern eine Function von $z$ und $t$ ist. Für $A$ erhält man dann eine Differentialgleichung, in der die Factoren der Ableitungen erster Ordnung sehr gross gegen die Factoren der Ableitungen zweiter Ordnung sind. Man kann daher die letztgenannten Glieder vernachlässigen, und aus der übrig bleibenden Differentialgleichung erster Ordnung folgt

$$A = f\left(z - \frac{V\lambda}{l}t\right),$$

d. h. die Bewegung pflanzt sich mit der Geschwindigkeit $\frac{V\lambda}{l}$ fort.

Wn.

E. Beltrami. Sull'espressione analitica del principio di Huygens. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 99-108.

Die vom Verfasser in einem früheren Aufsatze [cfr. F. d. M. XXI. 1889. 1063ff*)] mitgeteilte Ableitung des Huygens'schen Princips wird in der vorliegenden Arbeit vereinfacht, und das Princip selbst erweitert. Wie früher, wird zunächst eine dem Green'schen Satze analoge Gleichung aufgestellt, und zwar folgende: Sind die Functionen $F$ und $\varphi$ nebst ihren Ableitungen innerhalb des Raumes $S$ monodrom, continuirlich, endlich und differentiirbar, bezeichnet ferner $r$ den Abstand eines Punktes von $S$ von einem festen Pole innerhalb $S$, und ist $F$ nur von $r$ abhängig, so ist:

$$(1)\qquad 4\pi F_0\varphi_0 = \int\left(\varphi\frac{\partial\frac{F}{r}}{\partial n} - \frac{F}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma - \int\left(\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - F\Delta_2\varphi\right)dS.$$

In dieser Gleichung, die für $F=1$ in die Green'sche Gleichung übergeht, ist $dS$ ein Volumenelement, $d\sigma$ ein Oberflächenelement von $S$, $n$ die innere Normale von $d\sigma$, ferner $F_0$, $\varphi_0$ die Werte von $F$ und $\varphi$ im Pole, $\Delta_2$ die Summe der zweiten partiellen Ableitungen von $\varphi$. Die Gleichung (1) wird auf eine Function $\varphi$ angewandt, welche der Gleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2(\Delta_2\varphi+\psi)$$

genügt, wo $\psi$ irgend eine Function der Coordinaten und der Zeit ist; zugleich wird für $F$ eine willkürliche Function mit dem Argumente $t+\frac{r}{a}$ genommen. Die sich durch diese Substitution ergebende Gleichung wird nach $t$ zwischen den Grenzen $t_0$ und $t_1$ integrirt, und zwar sind diese Grenzen so gewählt, dass

$$\varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) = 0 \text{ für } t \leqq t_0,$$
$$F(t) = 0 \text{ für } t \geqq t_1.$$

Durch Ausführung der Integration folgt eine Gleichung der

*) In jenem Referate ist der Name Morera durch Maggi zu ersetzen.

Form

$$\int_{t_0}^{t_1} F\left(r+\frac{t}{a}\right) M dt = 0,$$

und da $F$ eine willkürliche Function ist, so muss $M=0$ sein, d. h.

$$(2b) \qquad 4\pi\varphi_0 = \int G\left(t-\frac{r}{a}\right) d\sigma + \int \psi\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r}.$$

Darin ist

$$G(t) = \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

und $\psi\left(t-\frac{r}{a}\right)$ ergiebt sich aus $\psi(x, y, z, t)$, wenn man $t-\frac{r}{a}$ an Stelle von $t$ setzt, $x$, $y$, $z$ aber ungeändert lässt; eine analoge Bedeutung hat $G\left(t-\frac{r}{a}\right)$.

Für $\psi=0$ geht die Gleichung (2b) in die Kirchhoff'sche Form des Huygens'schen Princips über. In der Hinzufügung der Function $\psi$ auf der rechten Seite der Differentialgleichung (2) für $\varphi$ besteht die Verallgemeinerung des Princips. Die Bedeutung dieses Gliedes ist, wie weiter gezeigt wird, die, dass dasselbe herrührt von Lichtquellen, die in dem Raume $S$ verteilt sind. Jenes Glied fehlt, sobald innerhalb des Raumes $S$ keine Lichtquellen vorhanden sind. Man kann auch die Gleichung (2), die für $\psi=0$ freie Oscillationen giebt, als die Differentialgleichung für eine gestörte Bewegung auffassen und dann die Kraft untersuchen, die eine derartige Störung hervorbringt. Es wird gezeigt, dass man die Störung als von einer variabeln elektro-magnetischen Kraft herrührend ansehen kann. Wn.

---

V. Volterra. Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 161-170.

V. Volterra. Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 265-277.

Der Verfasser legt sich die Frage vor, wie sich der Kirchhoff'sche Ausdruck für das Huygens'sche Princip in einem Raume von zwei oder von mehr als drei Dimensionen gestaltet. Die Lösung

dieser Frage wird durch folgenden Umstand complicirt. Sucht man das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2},$$

das ausser von $t$ nur von

$$r^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$$

abhängt, so erhält man nur für die Fälle $m = 1$ und $m = 3$ endliche Ausdrücke, während in allen anderen Fällen die Lösung die Form eines bestimmten Integrals hat, das willkürliche Functionen enthält. Diese Schwierigkeit tritt schon für Cylinderwellen im Raume von drei Dimensionen, die ja nur von zwei Coordinaten abhängen, zu Tage; schon für diesen Fall also bedarf es einer neuen Formel, und der Ableitung derselben ist die erste der im Titel genannten Abhandlungen gewidmet.

Die Function $\psi$ genüge der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right),$$

$V$ dagegen der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right),$$

wo $r$ den Abstand des Punktes $\xi$, $\eta$ von einem festen Punkte $x$, $y$ bezeichnet. $V$ lässt sich dann durch einen der folgenden vier Ausdrücke darstellen, in denen $f$ eine willkürliche Function bezeichnet, die für alle Werte des Arguments oberhalb, resp. unterhalb einer gewissen Grenze verschwindet:

$$(3) \quad V_{1,2} = \int_r^{\infty} f(t \pm u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}, \qquad V_{3,4} = \int_{-r}^{+r} f(t+u) M \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}},$$

wo

$$M_3 = 1 \quad \text{oder} \quad M_4 = \log \left( \frac{r^2 - u^2}{r} \right)$$

ist. Auf die beiden Functionen $\psi$ und $V_1$ wird der Green'sche Satz angewandt, so ergiebt sich:

$$(4) \qquad 2\pi \psi(x, y, t) f(t) + \int_s \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial n} \psi \right) ds$$
$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_o \left( \psi \frac{\partial V_1}{\partial t} - V_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\sigma \right).$$

Dabei ist das rechts stehende Integral über ein zweidimensionales Gebiet $\sigma$ auszudehnen, in dessen Innerem der feste Punkt $x$, $y$ liegt, das links stehende Integral über die Grenzcurve $s$ von $\sigma$. Nimmt man noch an, dass $\psi$ für solche Werte von $t$, die unterhalb einer gewissen Grenze liegen, verschwindet, so kann man Gleichung (4) zwischen den Grenzen $t=-\infty$ und $t=+\infty$ integriren, wodurch die rechte Seite verschwindet. Transformirt man noch das links stehende dreifache Integral, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\lambda\, dt = 0,$$

deren Bestehen, da $f(t)$ eine willkürliche Function ist, das Verschwinden von $\lambda$ erfordert. Dadurch ergiebt sich folgendes Resultat: Es ist

$$\text{(A)}\qquad 2\pi\psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial n} \int_r^\infty \psi(\xi, \eta, t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \right\}.$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial n},$$
$$\frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Die Gleichung (A) ist für Cylinderwellen das Analogon der Kirchhoff'schen Form des Huygens'schen Princips. Nimmt man $V_2$ statt $V_1$, so ist in (A) nur $t+u$ statt $t-u$ zu setzen, und dann muss $\psi$ für alle Werte von $t$ **oberhalb** einer gewissen Grenze verschwinden [Gleichung (B)]. Für $V = V_4$ ergiebt sich:

$$\text{(D)}\quad 2\pi^2\psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{+r} \psi(\xi, \eta, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right.$$
$$\left. - \frac{\delta}{\delta n} \int_{-r}^{+r} \psi(\xi, \eta, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right\}.$$

Um endlich die $V = V_3$ entsprechende Gleichung (C) zu erhalten, hat man in (D) rechts den Factor $\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)$ fortzulassen und auf der linken Seite Null statt $2\pi^2\psi$ zu setzen.

Weiter wird gezeigt, welche Gleichungen an Stelle von (A), (B), (C) treten, wenn die Anzahl der Dimensionen $m$ statt zwei beträgt; zur Verallgemeinerung der Gleichung (D) ist eine gerade Zahl von Dimensionen erforderlich.

In der zweiten Arbeit wird bewiesen, dass die beiden Formeln (A) und (B), sowie auch die Poisson'sche Lösung von (1), nämlich

$$\psi(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^t \psi(x+z\cos\varphi, y+z\sin\varphi, 0)\,\frac{z\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^t \left[\frac{\partial\psi(x+z\cos\varphi, y+z\sin\varphi, t)}{\partial t}\right]_{t=0} \frac{z\,dz}{\sqrt{t^2-z^2}},$$

specielle Fälle folgender allgemeineren Formel sind:

$$\text{(E)}\quad 2\pi\psi(x_1,y_1,t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{t_1-t}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\,d\sigma$$
$$+\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Zur Ableitung von (E) denke man sich in einem dreidimensionalen Raume mit den Coordinaten $x$, $y$, $t$ einen Rotationskegel, dessen Scheitel der Punkt $x_1$, $y_1$, $t_1$ und dessen Axe zu $t$ parallel ist, während seine Oeffnung 90° beträgt. Den Innenraum des Kegels begrenze man durch eine beliebige Fläche $\sigma$ und schneide endlich aus dem so erhaltenen einfach zusammenhängenden Raume ein Stück heraus durch einen Rotationscylinder, dessen Axe mit der Kegelaxe zusammenfällt, und dessen Radius $= \varepsilon$ ist. Der von der Kegelfläche, der Fläche $\sigma$ und der Cylinderfläche begrenzte Raum heisse $S$. Dann drücke man das über $S$ erstreckte Integral

$$\int_S (\psi\Delta\chi - \chi\Delta\psi)\,dS,$$

worin

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

ist, durch Oberflächenintegrale aus, setze für $\psi$ eine beliebige Lösung der Gleichung $\Delta\psi = 0$, für $\chi$ die specielle Lösung

$$\chi = \log \frac{\pm(t_1 - t) + \sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \qquad (r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2})$$

und gehe zur Grenze $\varepsilon = 0$ über. Dann erhält man die Formel (E). Aus derselben geht die Poisson'sche Formel hervor, wenn man für $\sigma$ einen in der $xy$-Ebene liegenden Kreis mit dem Radius $t_1$ nimmt, während man, um zu den Formeln (A) und (B) zu gelangen, für $\sigma$ eine Fläche nehmen muss, die aus einem Stück einer Cylinderfläche und einem ebenen Flächenstück zusammengesetzt ist.

Zum Schluss werden noch ähnliche Verallgemeinerungen der oben mit (C) bezeichneten Formel abgeleitet. Wn.

---

V. Volterra. Sul principio di Huygens. Nuovo Cimento (3) XXXI. 244-255; XXXII. 59-65.

Erster Teil einer Vorlesung über die von Kirchhoff, Beltrami und Poincaré über dieses Princip aufgestellten Untersuchungen. Referat darüber im nächsten Jahrgange. Vi.

---

E. Lommel. Berechnung von Mischfarben. Münch. Abh. XVII. 491-515. (Mit 2 Tafeln.)

So geeignet auch die Newton'sche Farbenregel einerseits, das Maxwell'sche Verfahren andererseits ist, um Mischfarben durch numerische Rechnung zu bestimmen, sind beide doch nicht fähig, einen analytischen Ausdruck zu liefern, der z. B. für die Farben dünner Blättchen oder diejenigen der Beugungsfransen das Gesetz der Farbenfolge als Function der Dicke des Blättchens oder den Beugungswinkel angäbe. Um einen geeigneten analytischen Ausdruck zu gewinnen, denkt der Verfasser alle Spectralfarben auf der Peripherie eines Kreises aufgetragen, so dass die Farbe von der Wellenlänge $\lambda$ an der Stelle $\varphi$ der Peripherie liegt, die durch

$$\frac{1}{\lambda} = a + \frac{b}{2\pi}\varphi$$

bestimmt ist. $a$ und $b$ sind numerische Constanten, die aus Be-

obachtungsdaten bestimmt werden, und zwar $b$ dadurch, dass je zwei Complementärfarben an den Endpunkten eines Durchmessers liegen.

Ist nun ein Intensitätsausdruck, z. B. für eine Interferenzerscheinung, als Function von $\frac{1}{\lambda}$ gegeben, so hat man die Grösse

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\frac{d\varphi}{2\pi} = f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right)\frac{d\varphi}{2\pi}$$

als Kraft von constanter Richtung an der durch $\varphi$ bestimmten Stelle der Peripherie aufzutragen. Die Resultirende aller parallelen Kräfte

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{b}{2\pi}\varphi\right)\frac{d\varphi}{2\pi}$$

giebt dann die Lichtstärke der Mischung an. Sind ferner $r$, $\vartheta$ die Polarcoordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden, so giebt der Winkel $\vartheta$ auf der Peripherie den Farbenton der Mischung an. Die Strecke $r$ endlich, um welche der Angriffspunkt vom Kreismittelpunkte absteht, ist das Sättigungsverhältnis.

Die allgemeinen Formeln werden angewandt zur Berechnung von $M$, $r$, $\vartheta$ für die speciellen Functionen

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \sin^2\frac{\pi d}{\lambda}, \quad f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \cos^2\frac{\pi d}{\lambda},$$

welche die Intensität des durch dünne Krystallblättchen gegangenen Lichtes bei gekreuzten oder parallelen Polarisationsebenen ergeben. Angenähert gelten diese Ausdrücke übrigens auch für die Farben dünner Blättchen, also für die Newton'schen Ringe im reflectirten, resp. im durchgelassenen Lichte. Die erforderlichen Integrationen werden ausgeführt, die resultirenden Formeln zu numerischen Rechnungen wie zur Discussion der Erscheinungen benutzt. Zum Schluss wird noch die Beugungserscheinung eines engen Spaltes betrachtet, für welche $f$ die Form hat

$$f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d}{\lambda}\right)^2}.$$

Die Integrale führen hier auf transcendente Functionen; doch lassen sich für kleine Werte von $\frac{\pi d}{\lambda}$ leicht Näherungsformeln finden. Wn.

E. Blasius. Ueber die Interferenzerscheinungen in zwei planparallelen Platten. Wiedemann Ann. XLV. 316-352.

Die Interferenzerscheinungen, welche man in zwei planparallelen Platten von gleicher Dicke und demselben Material erhält, sind genauer bisher nur für den Fall untersucht, dass das Licht von beiden Platten in derselben Ebene reflectirt wird (cfr. F. d. M. XVII. 1885. 1007). Es giebt aber noch andere Versuchsanordnungen, bei denen der Gangunterschied zwischen den interferirenden Strahlen verschwinden kann, d. h. der Gangunterschied zwischen dem Lichtanteil, der an der Vorderfläche der ersten sowie an der Hinterfläche der zweiten Platte reflectirt ist, und dem Anteil, der umgekehrt an der ersten Platte hinten, an der zweiten vorne reflectirt wird. Man erhält derartige Anordnungen z. B. dadurch, dass man beide Platten zuerst in parallele Lage bringt und dann die eine um eine Axe dreht, die mit ihr einen spitzen Winkel bildet. Für derartige Lagen der Platten wird in der vorliegenden Arbeit die Formel für den Gangunterschied der interferirenden Strahlen, sowie für die Breite der Interferenzstreifen entwickelt. In den Fällen, bei denen die Interferenzstreifen mit grosser Annäherung äquidistante Gerade sind, wird die Formel für die Breite der Streifen, auch der den grösseren Gangunterschieden entsprechenden, noch nach einer zweiten, auf einfacheren Betrachtungen beruhenden Methode abgeleitet. Im Anschluss daran werden die Interferenzerscheinungen, die an planparallelen Platten von ungleicher Dicke entstehen, einer genaueren Discussion unterworfen; zugleich wird ein Verfahren angegeben, diese Erscheinungen experimentell festzustellen. Weiter werden die verschiedenen Interferenzen behandelt, welche möglich sind, wenn die beiden Platten von gleicher Dicke und nahezu parallel sind. Endlich werden gewisse, an dünnen Krystallplatten sich zeigende Interferenzerscheinnngen kurz besprochen. Wn.

E. Blasius. Ueber Interferenzerscheinungen in den Newton'schen Farbengläsern und anderen Linsencombinationen. Wiedemann Ann. XLV. 385-425.

In den Gläsercombinationen, welche zur Erzeugung der Newton'schen Farbenringe dienen, hat zuerst Knox auch Interferenzen anderer Art endeckt. Ausser den durch ihn, später namentlich durch v. d. Willigen und Mach untersuchten Erscheinungen lässt sich noch, wie hier gezeigt wird, eine ganze Reihe weiterer Systeme beobachten. Zum Teil sind dieselben schon vorhanden, wenn eine Convexlinse auf einer undurchsichtigen Unterlage ruht, zum Teil nur, wenn auch die Unterlage eine durchsichtige Linse oder Platte ist, und eine andere Art endlich nur dann deutlich, wenn zwischen den Dicken der beiden angewandten Gläser einfache Verhältnisse bestehen. Einige von diesen Erscheinungen können auch in Linsencombinationen vorkommen, welche nicht die gewöhnlichen Newton'schen Ringe zeigen. Hierher gehören die von Brewster in Fernrohrobjectiven beobachteten Systeme. Alle genannten Erscheinungen werden in der vorliegenden Arbeit ausführlich untersucht; es wird der Gang der zur Interferenz kommenden Strahlen erörtert, ihre Wegdifferenz ermittelt und damit die Erscheinung der Rechnung unterworfen. Insbesondere werden zur Erklärung auch wiederholte Reflexionen teils im Innern der Linsen, teils im Innern der dünnen Luftschicht herangezogen. Hinsichtlich der Einzelheiten muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Wn.

Ch. Fabry. Théorie de la visibilité et de l'orientation des franges d'interférence. Almeida J. (3) I. 313-332.

Die Abhandlung, welche nach einer Fussnote nur der Auszug aus einer grossen, in den Annales de la Faculté des Sciences de Marseille erschienenen Arbeit ist, schliesst sich an den Aufsatz an, über den in F. d. M. XXIII. 1891. 1076 berichtet ist, und enthält eine Uebersicht über die Theorie und Verwirklichung der Sichtbarkeit der Interferenzerscheinungen. Der erste Teil ist einigen neuen Untersuchungen über die Theorie der vollkommenen

Sichtbarkeit der Fransen gewidmet. In dem zweiten zeigt der Verfasser, wie die Theorie der Sichtbarkeit der Fransen zu derjenigen ihrer Orientirung führt. Der dritte Teil ist dem Studium der Fransen ausserhalb der Bedingungen vollständiger Schärfe und vornehmlich der Erscheinungen periodischer Sichtbarkeit, die in diesem Falle erzeugt werden, gewidmet. Lp.

---

A. Hurion. Sur les franges visibles dans un oculaire nadiral. Almeida J. (3) I. 414-423.

Die fraglichen Fransen entstehen durch die Interferenz zweier Wellensysteme an einer durchsichtigen Platte mit planparallelen Wänden. Die ersten Wellen dringen in die Platte ein, werden an der zweiten Fläche reflectirt, gehen durch das Objectiv, werden am Spiegel reflectirt und kommen auf die Platte zurück, welche sie direct durchqueren. Bei dem zweiten System wird das Licht an der Vorderfläche der Platte reflectirt und wird nach der Rückkehr zweimal im Innern der Platte reflectirt, bevor es sie durchquert. Die allgemeine Theorie solcher Fransen ist von Hrn. Mascart in Ann. de Ch. et Phys. (4) XXIII gegeben worden. Der Zweck des gegenwärtigen Artikels ist der, die vom Verf. bemerkten Besonderheiten zu erklären. Lp.

---

G. Meslin. Sur la visibilité des anneaux de Newton. Almeida J. (3) I. 332-340.

Der Verf. nimmt die Frage wieder auf, warum man durch ein Prisma (statt einer Linse) die Newton'schen Ringe deutlicher und in grösserer Zahl sieht. „Das Prisma (mit convexer Basis) erteilt den Strahlen, welche die Lamelle überschreiten und interferiren, je nach ihren Farben verschiedene Richtungen. Da der Einfallswinkel nicht derselbe ist, so ist die Lage der Ringe anders als bei parallelem weissem Lichte; die brechbareren Strahlen sind stärker geneigt, ihre Ringe entsprechen einer grösseren Dicke, d. h. haben einen beträchtlichen Durchmesser, der sich mehr dem den Ringen der weniger brechbaren Farben entsprechenden Durchmesser annähert, und dies verringert die Dispersion und vergrössert

die Sichtbarkeit der Ringe um das Centrum herum". Zur Stütze dieser Erklärung wird die Ordnung dieser Annäherung für den Fall aufgesucht, bei dem die Lamelle aus Luft besteht.

Lp.

---

T. C. Porter. On a new method of viewing Newton's rings. Nature XLVI. 80-81.

Die kurze Note geht aus von der Entstehung der vielfachen Bilder, welche von dunklen Schirmen in planparallelen Glasplatten entstehen, und will diese zur Beobachtung der Newton'schen Farbenringe verwerten. Lp.

---

A. A. Michelson. On the application of interference methods to spectroscopic measurements. II. Phil. Mag. (5) XXXIV. 280-299.

Die theoretische Untersuchung der Beziehung zwischen der Lichtverteilung in einer Quelle als einer Function der Wellenlänge und der sich ergebenden Sichtbarkeitscurve war in einem gleichbetitelten Aufsatze Phil. Mag. (5) XXXI (F. d. M. XXIII. 1891. 1068) gegeben worden. Der vorliegende liefert recht vollständige Versuchsergebnisse. Gbs. (Lp.)

---

Lord Rayleigh. On the interference bands of approximately homogeneous light; in a letter to Prof. A. Michelson. Phil. Mag. (5) XXXIV. 407-411.

Erörtert einige Punkte in Hrn. Michelson's Arbeit über Interferenz. Dieselben betreffen 1) die Bestimmtheit, mit welcher der Charakter der Spectrallinien $\varphi(x)$ aus der Sichtbarkeitscurve abgeleitet werden kann, und 2) die Wirkung des allmählichen Verlustes an Energie durch Mitteilung an den Aether auf die Homogeneität des von frei vibrirenden Molekeln ausgestrahlten Lichtes.

Gbs. (Lp.)

---

E. Mascart. Sur l'achromatisme des interférences. Almeida J. (3) I. 509-516.

Bei vielen optischen Erscheinungen erzeugt die Ueberlagerung der im weissen Lichte erhaltenen Fransen an manchen Punkten eine besondere Uebereinstimmung der auf die Nachbarfarben bezüglichen Systeme und einen wirklichen Achromatismus, demjenigen vergleichbar, welchen man durch die Combination der Prismen und Linsen erhält. Der Verfasser hat früher mehrere Beispiele hierfür gegeben (vgl. F. d. M. XXI. 1889. 1091). Lord Rayleigh aber hat Einwände gegen die Art erhoben, wie der Verf. die Sichtbarkeit der Herschel'schen Fransen deutet. Da diese Einwände durch eine unzureichende Ausführlichkeit der Erklärungen verursacht sind, so kommt Herr Mascart auf den Gegenstand zurück, erörtert die Frage zunächst in grösster Allgemeinheit und erläutert dann die Betrachtungen an dem Beispiele der Herschel'schen Fransen mit denselben Bezeichungen und unter Aufstellung der Gleichungen gemäss derselben Anordnung wie im ersten Teile.

Lp.

---

E. Mascart. Sur l'arc-en-ciel. Ann. de chim. et phys. (6) XXVI. 501-526.

Zur Erläuterung der Rechnungen von Airy und Stokes betreffs der überzähligen Bogen hatte der Verf. in seinem Traité d'optique eine geometrische Deutung gegeben, welche zur Gewinnung der Ablenkungen von der zweiten Franse an mit aller nötigen Strenge genügt, indem er zugleich die merkwürdigen Bedingungen der Achromasie hervorhob, welche die Erscheinung darbietet. Jetzt kommt Hr. Mascart auf diesen Gegenstand zurück, um die Einzelheiten seiner vor mehreren Jahren ausgeführten Messungen zu geben. Zugleich erörtert er die möglichen Schwankungen in dem Durchmesser des Bogens, sowie manche noch unerklärten Erscheinungen. Zu diesem Zwecke wiederholt er kurz die Theorie des Phänomens. Am Schluss sagt er: „Man sieht aus diesen summarischen Betrachtungen, dass die Regenbogen manche interessante Besonderheiten darbieten; es ist ein Gegenstand für Forschungen, der die Aufmerksamkeit der Beobacher auf sich zu ziehen verdient.“

Lp.

---

E. Mascart. Sur l'arc-en-ciel blanc. C. R. CXV. 429-435, 453-455.

Es werden nach der Theorie von Airy die Bedingungen entwickelt, unter welchen die Intensität einer bei dem Regenbogenphänomen auftretenden Lichtart sich mit der Wellenlänge möglichst wenig ändert; dann wird das Auge einen „achromatisirten" Bogen — mit einem schwachen rötlichen Schein — wahrnehmen. Der Elevationswinkel eines weissen Bogens ist kleiner als der des gewöhnlichen Regenbogens. Das Phänomen kann bei einer bestimmten Grösse des Durchmessers der brechenden Wassertröpfchen auftreten, welche in der Wirklichkeit jedenfalls nicht selten vorkommt.
Mh.

A. Kurz. Der fragwürdige dritte Regenbogen. Schlömilch Z. XXXVII. 318-320.

Giebt eine Berechnung der Radien des roten und des violetten Kreisbogens für den dritten Regenbogen (welcher im Gegensatze zum ersten und zweiten Bogen auf derselben Seite wie die Sonne sich befindet); das berechnete Resultat wird durch geometrische Construction bestätigt und stimmt auch mit den von Schellbach in seiner „Darstellenden Optik" mitgeteilten Werten gut überein. Die durch vielleicht ungenaue Beobachtung gewonnenen Grössen, welche Heilermann in Ztschr. f. math. und naturw. Unterr. 1880, S. 72 veröffentlicht hat, weichen von Schellbach's Angaben merklich ab.
Mh.

J. Macé de Lépinay et A. Perot. Contribution à l'étude du mirage. Ann. de chim. et phys. (6) XXVII. 94-138.

Aus der Differentialgleichung für einen Strahl, der durch ein Medium mit veränderlicher Dichte geht, leiten die Verf. mehrere allgemeine Sätze ab, die einen Beitrag zur Erkenntnis des Wesens der Luftspiegelung liefern, ohne dass sie der Kummer'schen Abhandlung „Ueber atmosphärische Strahlenbrechung" (J. für Math. LXI. 263-275) Erwähnung thun, wo Untersuchungen von grösserer Allgemeinheit angestellt sind. Graphische Darstellungen und Mo-

delle dienen zur Veranschaulichung der entwickelten Theorie. Zuletzt werden auch die Interferenzfransen, welche die künstlich erzeugte Luftspiegelung begleiten können, näher untersucht.

Lp.

---

E. Mach. Ueber eine elementare Darstellung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen, insbesondere der Gitterspectren. Poske Z. V. 225-229.

Das Verfahren besteht darin, das Fresnel'sche Princip der Ermittelung der resultirenden Phase und Amplitude durch eine Parallelogrammconstruction gleich auf ein System von unendlich vielen Elementarstrahlen anzuwenden („Fächerprincip").

Lp.

---

H. Nagaoka. A problem on diffraction. Tokio Math. Ges. V. 75-79.

Es wird zunächst die Formel für die Intensität der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen berechnet, die durch eine grosse Zahl von congruenten kleinen Oeffnungen entstehen, falls diese in gleichen Abständen von einander auf der Peripherie eines Kreises verteilt sind und in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises ähnlich liegen. Die Intensität lässt sich darstellen als das Quadrat des Moduls einer complexen Grösse

$$L = L_1 \sum_{m=0}^{n-1} e^{i(\mu a_m + \nu b_m)}.$$

Dabei ist $i = \sqrt{-1}$, $a_m$, $b_m$ sind die Coordinaten des Mittelpunktes einer der kleinen Oeffnungen, $\mu$, $\nu$ die bekannten, von den Neigungswinkeln der auffallenden und der gebeugten Strahlen abhängigen Constanten, und $L_1$ ist die complexe Grösse, deren Modulquadrat die Intensität der Beugungserscheinung einer der kleinen Oeffnungen giebt. Da die Punkte $a_m$, $b_m$ auf einem Kreise in gleichen Abständen von einander liegen, so kann man den Ausdruck $\mu a_m + \nu b_m$ durch Einführung von Polarcoordinaten auf die Form bringen:

$$\mu a_m + \nu b_m = \xi \cos(m\vartheta - \delta),$$

wo $\xi$, $\delta$ und $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$ für alle Oeffnungen dieselben Werte haben.

Entwickelt man dann $e^{i\xi\cos(m\vartheta-\delta)}$ in eine nach Cosinus der Vielfachen von $m\vartheta-\delta$ fortschreitende Reihe, so sind die Coefficienten Bessel'sche Functionen mit dem Argumente $\xi$. Bei Summation aller dieser Reihen verschwinden alle Bessel'schen Functionen ausser denen mit den Indices 0, $n$, $2n$, $3n$ etc. Wenn ferner $\xi$ gegen $n$ klein ist, kann man $J_n(\xi)$, $J_{2n}(\xi)$ etc. vernachlässigen. Dadurch ergiebt sich die Näherungsformel

$$L = nJ_0(\xi)L_1.$$

Betrachtet man andererseits die Diffractionserscheinung, die durch eine Oeffnung von der Form eines schmalen Kreisrings, dessen Breite $\delta r$, entsteht, und nimmt an, dass der mittlere Radius des schmalen Ringes derselbe ist wie der des Kreises, auf dem vorher die Punkte $a_m$, $b_m$ lagen, so ist die Intensität des Beugungsbildes

$$L' = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\left[\xi J_0(\xi)\right]\delta r.$$

Darin ist, wie auch in dem Ausdruck für $L$, $\xi = r\sqrt{\mu^2+\nu^2}$, falls $r$ der Radius des Kreises ist. Die Formel für $L'$ ergiebt sich, wenn man die Intensitäten der Bilder subtrahirt, die durch zwei volle Kreise mit den Radien $r+\frac{1}{2}\delta r$ und $r-\frac{1}{2}\delta r$ entstehen.

Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke für $L$ und $L'$ folgt, dass das erste, durch eine grosse Zahl von kleinen, auf einem Kreise symmetrisch verteilten Oeffnungen erzeugte Beugungsbild angesehen werden kann als entstanden durch Superposition der Beugungsbilder einer der kleinen Oeffnungen und einer schmalen ringförmigen Oeffnung. Wn.

---

J. L. Sirks. De l'influence de la diffraction par un réseau à mailles rectangulaires placé devant l'objectif d'une lunette sur la clarté de l'image principale d'une étoile. Amst. Versl. en Meded. (3) IX. 307-328.

In der Sitzung vom 3. April 1891 hat das „Comité international permanent pour l'exécution de la carte photographique du ciel" beschlossen, den teilnehmenden Observatorien gleiche metallische Gitter zu senden, die, vor das Objectiv eines Fernrohres

gesetzt, die Grösse der Sterne um zwei Einheiten verringern würden. Der Durchlässigkeitscoefficient dieser Gitter ist vielfach durch photographische Messungen experimentell bestimmt. Der Verfasser bezweckt, diesen Coefficienten theoretisch herzuleiten. Für ein einfaches Gitter ist diese Aufgabe schon von Lord Rayleigh gelöst, wobei sich ergab, dass, wenn mit $p$ das Verhältnis der Breite der Oeffnung des Gitters zur totalen Breite bezeichnet wird, der Bruchteil des einfallenden Lichtes, welcher im centralen Bilde zusammentrifft, gleich $p^2$ gesetzt werden muss. Dieser Satz wird auf analytischem Wege bewiesen, indem aus der bekannten Formel für die Intensität des Bildes in einer Distanz $x$ vom centralen Bilde:

$$J = a^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{ax}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2x^2}{\lambda^2}} \frac{\sin^2 n\pi \frac{ex}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{ex}{\lambda}},$$

— wo $n$ die Zahl der Oeffnungen im Gitter, $a$ die Breite jeder Oeffnung, $d$ die Dicke eines Stäbchens und $\lambda$ die Wellenlänge bedeutet, während $e = a + d$ gesetzt ist — approximativ $Q = \int J dx$ bestimmt wird.

Weiter knüpft der Verfasser einige Betrachtungen an die Formel für die Intensität des Lichtes, das von einem Gitter mit $n_1 n_2$ rechteckigen Oeffnungen durchgelassen wird. Es zeigt sich dabei, dass das Gitter wie zwei hinter einander unter sich rechtwinklig aufgestellte lineare Gitter wirkt, so dass der Durchlässigkeitscoefficient die Form erhält $p_1^2 p_2^2$, wobei $p_1 = \frac{a_1}{e_1}$, $p_2 = \frac{a_2}{e_2}$, mit der oben verzeichneten Bedeutung der Grössen $a$ und $e$. Schliesslich vergleicht der Verfasser die Resultate einiger photographischen Messungen mit den theoretischen Formeln und findet genügende Uebereinstimmung. Mo.

---

J. Walker. On the intensity at the focal point of a telescope, when the object-glass is covered by a diaphragm pierced with circular apertures. Phil. Mag. (5) XXXIII. 266-269.

Der Vorschlag, die Bildstärke eines Sternes durch Schirme zu verringern, die vor das Objectiv des Fernrohres gebracht werden, hat zu dem Problem geführt, den theoretischen Wert der Intensität in solchen Fällen zu bestimmen. Für den Fall von Kreisöffnungen in dem Schirme wird die Lösung in der Note gegeben. In Bezug auf den Mittelpunkt des Schirmes als Pol möge die Gleichung einer der Oeffnungen sein $\varrho^2 - 2a\varrho\cos\theta + a^2 = r^2$, wo $r$ der Radius des Kreises, $a$ der Abstand seines Mittelpunktes vom Pole ist. Wenn die Aberration durch $\beta\varrho^4$ bezeichnet wird, kann die Amplitude der Verrückung im Brennpunkte durch eine Summe von Gliedern von der Form dargestellt werden:

$$A = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} e^{i\beta\varrho^4}\varrho\, d\varrho\, d\theta \qquad \left(\alpha = \arcsin\frac{r}{a}\right),$$

wo $\varrho_1$, $\varrho_2$ die beiden Wurzeln der Gleichung des Kreises sind. Die Grösse $e^{i\beta\varrho^4}$ wird in eine Reihe entwickelt und das allgemeine Glied integrirt. Der für die Intensität $I$ erhaltene Ausdruck ist:

$$I = \pi^2\{C_0^2 + (C_1^2 - 2C_2C_0)\beta^2 + (C_2^2 - 2C_3C_1 + 2C_4C_0)\beta^4 + \cdots\},$$

wo $C_n$ die Summe der aus

$$\frac{a^{4n+2}}{n!}\sum_{p=1}^{p=2n+1}\frac{\{(2n)!\}^2}{p!\,(p-1)!\,\{(2n+1-p)!\}^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2p}$$

erhaltenen Ausdrücke bedeutet, wenn man für $r$ und $a$ ihre eigenen Werte einsetzt. Gbs. (Lp.)

---

H. Poincaré. Sur la polarisation par diffraction. Acta Math. XVI. 297-339.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, theoretisch die Gesetze abzuleiten, welche Gouy in den Jahren 1883-1885 [C. R. XCVI-CI, Annal. de chimie (6) VIII] hinsichtlich der Polarisation des an einem Schirme mit einfachem Rande gebeugten Lichtes experimentell gefunden hatte. Zur Vereinfachung der Rechnung wird angenommen, dass der Schirm eine scharfe Kante habe, in der zwei Ebenen zusammenstossen, die einen unendlich kleinen Winkel bilden; ferner dass das Licht durch eine Cylinderlinse gegangen ist, deren Brennlinie mit der erwähnten Kante zusammenfällt;

endlich dass der Schirm im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie ein vollkommener Leiter ist.

Ist das einfallende Licht in der Diffractionsebene polarisirt, so ist der Vector der Aetherschwingung, welcher der elektrischen Kraft entspricht, der Kante, welche zur $z$-Axe genommen wird, parallel; und da es sich um Cylinderwellen handelt, gilt für diesen Vector die Gleichung:

$$(1) \qquad V^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$$

mit der aus den obigen Annahmen folgenden Nebenbedingung:

$$Z=0 \text{ für } \omega=0 \text{ und } \omega=2\pi,$$

falls $\varrho$, $\omega$ Polarcoordinaten in der $xy$-Ebene sind. Der Winkel an der Schirmkante ist dabei gleich Null angenommen.

Setzt man in (1)

$$Z=Z'\cos pt+Z''\sin pt,\ p=aV,$$

so ergeben sich für $Z$ und $Z'$ Reihen der Form

$$Z'=\Sigma g_n I_{\frac{n}{2}}(a\varrho)\sin\frac{n\omega}{2},$$

wobei die Summation über alle ganzen Zahlen $n$ auszudehnen ist. Wird für die Bessel'sche Function $I_{\frac{n}{2}}(a\varrho)$ die bekannte Näherungsformel gesetzt und der Zeitfactor mit den Constanten $g_n$ vereinigt, so erhält man

$$(6) \qquad Z=\Sigma A_n\sqrt{\frac{2}{a\pi\varrho}}\cos\left(a\varrho-\frac{n+1}{4}\pi\right)\sin\frac{n\omega}{2},$$

wo $A_n$ eine lineare Function von $\cos pt$ und $\sin pt$ mit constanten Coefficienten ist.

Die durch (6) dargestellte Bewegung ist die Resultante von drei Bewegungen, deren erste den direct von der Lichtquelle kommenden Wellen angehört, die zweite den reflectirten, die dritte den gebeugten Wellen. Für die durch das directe Bündel hervorgebrachte Bewegung kann man setzen

$$(7) \qquad Z=\sqrt{\frac{2}{a\pi\varrho}}\cos\left(a\varrho-\frac{\pi}{4}+pt\right)\Sigma B_n\sin\frac{n\omega}{2},$$

die den beiden anderen Bündeln entsprechende Bewegung hat dann die Form

$$(8)\qquad Z=\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\varrho}}\left\{\cos\left(\alpha\varrho-\frac{\pi}{4}-pt\right)\Sigma\, C_n \sin\frac{n\omega}{2}\right.$$
$$\left.+\sin\left(\alpha\varrho-\frac{\pi}{4}-pt\right)\Sigma\, D_n\sin\frac{n\omega}{2}\right\}.$$

Damit die Summe der Ausdrücke (7) und (8) mit der Form (6) identisch wird, müssen zwischen den Coefficienten $B$, $C$, $D$ gewisse Beziehungen bestehen, z. B.

$$B_n=C_n,\ D_n=0,\ \text{wenn}\ n\equiv 0\ (\text{mod.}\,4)\ \text{etc. etc.}$$

Nimmt man nun weiter an, dass der einfallende Lichtbündel zwischen den beiden Ebenen $\omega=\beta$ und $\omega=\beta_1$ liegt, so ist

$$f(\omega)=\Sigma\, B_n\sin\frac{n\omega}{2}$$

für Werte von $\omega$ zwischen $\beta$ und $\beta_1$ gleich 1, während $f(\omega)$ für alle übrigen $\omega$ verschwindet. Diese Annahme führt in Verbindung mit den vorher erwähnten Beziehungen zwischen $B_n$, $C_n$, $D_n$ zu dem schliesslichen Resultat, dass die gesamte Aetherbewegung die Form haben muss

$$(11)\quad Z\sqrt{\frac{\pi\alpha\varrho}{2}}=f_1(\omega)\cos\left(\alpha\varrho-\frac{\pi}{4}+pt\right)$$
$$+\psi_1(\omega)\cos\left(\alpha\varrho-\frac{\pi}{4}-pt\right)+\psi_2(\omega)\sin\left(\alpha\varrho-\frac{\pi}{4}-pt\right).$$

Darin hat $f_1(\omega)$ die Form

$$f_1(\omega)=\frac{f(\omega)+f(\omega+2\pi)}{2}=\Sigma\, B_{2n}\sin n\omega.$$

Ferner ist

$$\psi_1(\omega)=f_1(\omega+\pi),$$

$$\psi_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{\omega-\beta+\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\omega+\beta_1-\pi}{4}}{\operatorname{tang}\frac{\omega-\beta_1+\pi}{4}\operatorname{tang}\frac{\omega+\beta-\pi}{4}}\right).$$

Ferner stellt das dritte Glied der rechten Seite von (11) das gebeugte Licht dar. Die Intensität des letzteren ist also dem Quadrate von $\psi_2(\omega)$ proportional.

Eine ähnliche Untersuchung wie für das in der Beugungsebene wird weiter auch für das senkrecht zu jener Ebene polarisirte Licht durchgeführt. In diesem Falle ist der der magnetischen Kraft entsprechende Lichtvector der Schirmkante parallel, und für diesen Vector $\gamma$ gilt dieselbe Differentialgleichung wie oben für $Z$; nur sind hier die Grenzbedingungen:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \omega} = 0 \quad \text{für} \quad \omega = 0 \quad \text{und} \quad \omega = 2\pi.$$

Für $\gamma$ ergiebt sich ein Ausdruck von derselben Form wie (11); nur tritt in den Reihen für $f_1$ und $\psi_1$ Cosinus an Stelle von Sinus, und $\psi_2(\omega)$ hat jetzt den Wert:

$$\overline{\psi}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{\operatorname{tang} \frac{\omega - \beta + \pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\omega + \beta - \pi}{4}}{\operatorname{tang} \frac{\omega - \beta_1 + \pi}{4} \operatorname{tang} \frac{\omega + \beta_1 - \pi}{4}} \right).$$

Aus dem Verhältnis der beiden Ausdrücke für $\psi_2(\omega)$ und $\overline{\psi}_2(\omega)$ ergiebt sich der Polarisationszustand des gebeugten Lichtes. Dies Verhältnis wird speciell unter der Annahme näher untersucht, dass $\beta_1 - \beta$ so klein ist, dass man die Quadrate dieser Grösse vernachlässigen kann.

Nachdem noch gezeigt ist, dass sich die Resultate nicht wesentlich ändern, wenn der Winkel an der Schirmkante nicht als unendlich klein angenommen wird, wird erörtert, welchen Einfluss auf das Resultat die der Rechnung zu Grunde gelegte Annahme hat, dass der Schirm ein vollkommener Leiter ist, und dass in Folge dessen nur elektrische Schwingungen senkrecht zu dem Schirme möglich sind. Will man diese Annahme, deren Zulässigkeit Bedenken erregt, nicht machen, so muss man auch noch die elektrische resp. magnetische Bewegung in dem Schirme betrachten nebst den Bedingungen für den Grenzübergang. Die erforderlichen Rechnungen werden nicht soweit durchgeführt, um die im Resultat eintretenden Aenderungen numerisch auswerten zu können; der Verfasser begnügt sich vielmehr damit, zu untersuchen, welcher Art im allgemeinen die Aenderungen sind, welche der neue Ansatz mit sich führen würde. Die genauere Durchführung dieser Rechnung wird einer späteren Arbeit vorbehalten. Wn.

---

P. DRUDE. In wie weit genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik? Gött. Nachr. 1892. 366-391, 393-412.

Für das „praktisch-physikalische" Bedürfnis kommt es nicht sowohl auf die theoretische Herleitung eines „Erklärungssystems" [so nennt der Verfasser die für ein gewisses Gebiet optischer Erscheinungen geltenden Differentialgleichungen nebst den zugehörigen Grenzbedingungen] an, als darauf, dass dasselbe eine Klasse von Erscheinungen bequem zu beschreiben, sowie numerische Beziehungen zwischen verschiedenen Erscheinungen abzuleiten gestattet. Herr Drude untersucht nun in der vorliegenden Abhandlung, wie weit die bisher aufgestellten Theorien jenen Anforderungen für einzelne Gebiete optischer Erscheinungen genügen, und stellt die dadurch gewonnenen, so zu sagen sicher fundirten, Erklärungssysteme zusammen. Enthält diese Zusammenstellung auch manches Bekannte, so sind doch viele Resultate neu; jedenfalls ist die Frage in der Vollständigkeit wie hier noch nirgends behandelt.

Für durchsichtige isotrope Medien wird ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem durch die Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Delta u = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \text{ etc.}$$

gebildet, verbunden mit den Grenzbedingungen

$$(3) \qquad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad a_1\xi_1 = a_2\xi_2, \quad a_1\eta_1 = a_2\eta_2$$

oder

$$(3') \qquad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2.$$

Darin sind $u$, $v$, $w$ die senkrechten Componenten eines periodisch mit der Zeit sich ändernden Vectors, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Componenten eines andern Vectors, der mit dem vorigen durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \text{ etc.}$$

zusammenhängt. Die Indices 1 und 2 beziehen sich auf zwei Medien, deren Trennungsfläche die Ebene $z = 0$ ist.

Das System (2) in Verbindung mit (3) entspricht der Neumann'schen, (2) zusammen mit (3') der Fresnel'schen Theorie. Man gelangt von den Neumann'schen Grenzbedingungen (3) zu den Fresnel'schen (3'), wenn man nicht $u$, $v$, $w$, sondern $a\xi$, $a\eta$, $a\zeta$ als Componenten des Lichtvectors interpretirt. Ebenso wird man umgekehrt von den Grenzbedingungen (3') zu den Bedingungen (3) geführt, wenn nicht $u$, $v$, $w$, sondern $\xi$, $\eta$, $\zeta$ als Componenten des Lichtvectors angesehen werden. Beide Arten von Bedingungen lassen sich aus dem Energieprincip in Verbindung mit dem Princip der Continuität der beiden der Grenze parallelen Componenten des Lichtvectors herleiten; beide verlieren aber dadurch nicht den Charakter des Hypothetischen. Denn man kann die Grenzbedingungen nur dann in einer bestimmten Form aus jenen beiden Principien ableiten, wenn man eine bestimmte Voraussetzung darüber macht, durch welche Formel die Energie der Lichtbewegung oder wenigstens ein Teil derselben, z. B. die kinetische, ausgedrückt wird. In der That folgt in der einen Theorie der kinetische Vector, d. h. der, mit dessen Verschwinden die kinetische Energie verschwindet, den Neumann'schen, der potentielle Vector den Fresnel'schen Gesetzen, während in der anderen Theorie gerade das Umgekehrte stattfindet. Ein Grund, eine der beiden Theorien vor der anderen zu bevorzugen, ist nicht vorhanden, da nicht mit Sicherheit zu entscheiden ist, welche physikalische Bedeutung die Constante $a$ hat.

Um die Dispersion durchsichtiger Substanzen zu erklären, muss man den Gleichungen (2) Zusatzglieder hinzufügen, herrührend von der Einwirkung der ponderablen Teilchen. Diese Zusatzglieder sind als Reihenentwickelungen aufzufassen, welche convergiren, so lange die Schwingungsdauer des Lichtes nicht mehr mit einer Eigenschwingungs-Dauer der Materie zusammenfällt. Die durch die Zusatzglieder erweiterten Differentialgleichungen lauten in der Neumann'schen Theorie:

$$(2''') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a' \Delta u + a'' \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + a''' \frac{\partial^4 \Delta u}{\partial t^4} + \cdots,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

in der Fresnel'schen dagegen

$$(2'''')\qquad \frac{1}{a'}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{a''}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\frac{1}{a'''}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}+\cdots=\Delta u,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Auch das Formelsystem der elektromagnetischen Lichttheorie

$$(4)\qquad A\mu\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\quad A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

verbunden mit den Grenzbedingungen

$$(5)\qquad L_1=L_2,\quad M_1=M_2,\quad X_1=X_2,\quad Y_1=Y_2 \text{ für } z=0,$$

stellt die Lichterscheinungen in isotropen Medien dar. Interpretirt man die magnetischen Kraftcomponenten $L$, $M$, $N$ als Componenten des Lichtvectors, so folgen die Resultate der Neumann'schen Theorie, während man, wenn man die elektrische Kraft ($X$, $Y$, $Z$) als Lichtvector deutet, auf die Fresnel'schen Resultate geführt wird.

Zur Erklärung der Dispersion muss man die Gleichungen (4), in denen $\mu=1$ gesetzt werden kann, folgendermassen erweitern:

$$(4')\qquad \begin{cases} A\dfrac{\partial L}{\partial t}=\dfrac{\partial Z}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial z},\ \ldots \\ A\left(\varepsilon\dfrac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon'\dfrac{\partial^3 X}{\partial t^3}+\varepsilon''\dfrac{\partial^5 X}{\partial t^5}+\cdots\right)=\dfrac{\partial M}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial y}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen (5) sind mit dem Energieprincip vereinbar. Die erweiterte Form (4') beseitigt die Widersprüche, welche gegen die ursprünglichen Formeln der elektromagnetischen Theorie erhoben werden können.

Für absorbirende isotrope Medien erhält man ein sicher begründetes Erklärungssystem, wenn man in den Gleichungen (2) der Constante $a$ complexe Werte beilegt. Will man für derartige Medien auch die Dispersion berücksichtigen, so muss man auf der rechten Seite der Gleichungen (2''') weitere Zusatzglieder von der Form

$$b\frac{\partial \Delta u}{\partial t}+b'\frac{\partial^3 \Delta u}{\partial t^3}+\cdots$$

hinzufügen, dagegen auf der linken Seite von (2'''') Glieder der Form

$$-\frac{1}{b}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{b'}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dots.$$

Die Grenzbedingungen bleiben dieselben wie für durchsichtige Körper.

Die Formeln der elektromagnetischen Lichttheorie für leitende Körper lauten:

$$(16)\qquad A\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\quad A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}-4\pi\lambda AX,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Mit den Grenzbedingungen (5) verbunden, liefern diese Gleichungen dieselben beiden möglichen Erklärungssysteme der Metalloptik wie die mechanischen Theorien. Die den Gleichungen (4') entsprechende Erweiterung des Erklärungssystems absorbirender Medien besteht darin, dass an Stelle der Gleichungen (16) die Gleichungen

$$(16'')\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial L}{\partial t}=\dfrac{\partial Z}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial z} \\ \dots\dots\dots \\ \text{und} \\ A\left(\varepsilon\dfrac{\partial X}{\partial t}+4\pi\lambda X\right)=\dfrac{\partial M}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial y}+\dfrac{p}{A}\Delta X \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

treten. Diese Gleichungen stellen in Verbindung mit den Grenzbedingungen (5) die Beobachtung befriedigend dar.

Für durchsichtige Krystalle nimmt der Verfasser den Ausgangspunkt von der elektromagnetischen Lichttheorie. Die Grundgleichungen sind hier:

$$(27)\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial L}{\partial t}=\dfrac{\partial Z}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial z},\dots. \\ A\left(\varepsilon_{11}\dfrac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{12}\dfrac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\dfrac{\partial Z}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial M}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial y}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

wozu wieder die Grenzbedingungen (5) kommen. Fasst man die magnetische Kraft als Lichtvector auf, setzt also $u=L$, $v=M$, $w=N$, setzt ferner

$$\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}=-\xi \text{ etc.}$$

und

$$G = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta,$$

wo $A^2.a_{hk} = b_{hk}$ die Coefficienten von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sind, die sich bei der Auflösung des zweiten Systems (27) nach $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$ ergeben: so wird man genau auf die Kirchhoff'schen Gleichungen geführt (cfr. F. d. M. VIII. 1876. 647ff.).

Um die Fresnel'sche Auffassung zu erhalten, kann man entweder

$$(33) \qquad u = X,\ v = Y,\ w = Z$$

oder

$$(33') \qquad u = \varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z,$$

. . . . . . . . . .

setzen. Die Annahme (33') führt auf ein System Differentialgleichungen von der Form

$$(38) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial u} - \frac{\partial H}{\partial x \partial w}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial u}\right),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

wo

$$2H = a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{23}vw + 2a_{31}wu + 2a_{12}uv$$

ist. Damit sind die Grenzbedingungen zu verbinden:

$$(39) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_2, \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial w} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial v}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial w} - \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial v}\right)_2, \\ \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial u} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial w}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial u} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial w}\right)_2. \end{cases}$$

Diese Grenzbedingungen fallen wahrscheinlich mit den von Cornu [Ann. d. Chim. (4) XI. 1867] aufgestellten zusammen.

Während die vorstehenden, aus der Annahme (33') abgeleiteten Gleichungen auf streng transversale Wellen führen, ergiebt sich aus der Annahme (33) diejenige Form der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen, auf welche die Theorien von Sarrau [Liouv. J. (2) XII. 1867] und Boussinesq [Liouv. J. (2) XIII, cf. F. d. M. I. 1868. 512] führen, wenigstens wenn man in letzterer Theorie von der longitudinalen Welle abstrahirt. Die Schwingungen

sind für die letzte Annahme nicht streng transversal. Hiernach lassen sich also die Gesetze der Krystalloptik durch drei verschiedene, gleich berechtigte Erklärungssysteme darstellen.

Für absorbirende Krystalle gilt ein Gleichungssystem, das sich aus (27) durch ähnliche Zusatzglieder ergiebt, wie (16) aus (4).

Das einfache Erklärungssystem für natürliche active Medien ist

$$(44) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Delta u + \sigma\xi, \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Grenzbedingungen sind entweder, der Neumann'schen Anschauung entsprechend,

$$(49) \qquad u_1 = u_2, \ v_1 = v_2, \ a_1\xi_1 + \sigma_1 u_1 = a_2\xi_2 + \sigma_2 u_2,$$
$$a_1\eta_1 + \sigma_1 v_1 = a_2\eta_2 + \sigma_2 v_2$$

oder, den Fresnel'schen Vorstellungen entsprechend,

$$(49') \qquad u_1 = u_2, \ v_1 = v_2, \ \xi_1 = \xi_2, \ \eta_1 = \eta_2.$$

Vor dem MacCullagh'schen System, bei dem in den Gleichungen (44) rechts $\Delta\xi$ statt $\xi$ steht, verdient das System (44) den Vorzug. Bei Zugrundelegung der Vorstellungen der elektromagnetischen Theorie nämlich kann man das System (44) mit dem Energieprincip in Uebereinstimmung bringen, das MacCullagh'sche System aber nicht.

Nachdem noch gezeigt, wie man die für durchsichtige Krystalle geltenden Formeln zu erweitern hat, um die Erscheinungen in activen Krystallen zu erklären, wird zum Schluss die Polarisation des gebeugten Lichtes besprochen und erörtert, weshalb die Beugungsphänomene ebenso wenig wie irgend welche anderen Experimente zwischen der Neumann'schen und Fresnel'schen Grundanschauung eine Entscheidung herbeizuführen vermögen.

Was die theoretische Herleitung der besprochenen Erklärungssysteme betrifft, so zeigt sich, dass wohl oft dieselbe nach rationellen Principien möglich ist, dass aber diese Art der Herleitung noch nicht den Stempel der notwendigen Richtigkeit trägt. Als besten Pfadfinder hat sich bisher die elektromagnetische Lichttheorie bewährt. Als vollkommen kann man freilich auch diese

Theorie nicht betrachten, da sie ebenso wenig wie die älteren mechanischen Theorien im Stande ist, von wenigen, dem Experimente entnommenen Hypothesen aus sämtliche Erscheinungen in mathematisch zwingender Weise abzuleiten. Wn.

---

W. Gosiewski und W. Natanson. Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes. Theorie von Sir W. Thomson.
Prace mat.-fiz. III. 161-178. (Polnisch.)

Uebersetzung der Abhandlung „On the reflexion and refraction of light" von Sir W. Thomson (Phil. Mag. (5) XXVI. 1888) mit Anmerkungen der Uebersetzer. Vergl. F. d. M. XX. 1889. 1112.
Dn.

---

Lord Rayleigh. On the intensity of light reflected from water and mercury at nearly perpendicular incidence.
Phil. Mag. (5) XXXIV. 309-320.

Ein Bericht über Versuche zur Prüfung der Fresnel'schen Formeln für Reflexion, wenn die reflectirenden Oberflächen Wasser und Quecksilber sind. Der Artikel geht recht vollständig auf die Versuchsergebnisse ein, doch möge die folgende Schlussfolgerung angezogen werden: Die Uebereinstimmung mit den Fresnel'schen Formeln ist somit leidlich gut, aber die Frage drängt sich auf, ob dieselbe nicht besser sein sollte. Abgesehen von vorgefassten Meinungen in Betreff des zu erwartenden Ergebnisses, würde ich die Versuchsfehler so geschätzt haben, dass sie wahrscheinlich ein halbes Procent nicht überschritten, und sicherlich würde keine Anstrengung des Urteils bezüglich der photometrischen Bilder Uebereinstimmung zu Stande bringen. Andererseits muss daran erinnert werden, dass ein Procent nicht ein grosser Fehler in der Photometrie ist, und dass im gegenwärtigen Falle ein einprocentiger Fehler bei der Reflexion nur 1 : 5000 bedeutet als Bruchteil des einfallenden Lichtes. Während also der Widerstreit wirklich vorhanden sein kann, ist dies eine zu kleine Grundlage, um darauf mit Zuversicht weiter bauen zu können. Gbs. (Lp.)

---

Lord RAYLEIGH. On reflexion from liquid surfaces in the neighbourhood of the polarizing angle. Phil. Mag. (5) XXXIII. 1-19.

Lord RAYLEIGH. Experiments upon surface films. Phil. Mag. (5) XXXIII. 363-373.

Die erste dieser Abhandlungen, welche vornehmlich eine experimentelle Bedeutung haben, handelt von der durch Oberflächenverunreinigung hervorgebrachten Wirkung als Ursache für die Erscheinung, dass in der Nähe des Polarisationswinkels die Reflexion des Lichtes von gewöhnlichen durchsichtigen, flüssigen und festen Körpern merklich von dem Fresnel'schen Gesetze abweicht. Bezeichnet man mit $k$ die Ellipticität, d. h. das Verhältnis der reflectirten Amplituden für die beiden Hauptebenen, wenn das unter dem Winkel $\operatorname{arctg}\mu$ einfallende Licht unter 45° zu diesen Ebenen polarisirt ist, dann ist nach Fresnel $k = 0$, während Jamin für Wasser $k = -0{,}00577$ und für absoluten Alkohol $k = +0{,}00208$ fand. Die im einzelnen beschriebenen Versuche weisen darauf hin, dass Jamin's Ergebnisse die Wirklichkeit übertreiben, vielleicht in Folge fettiger Oberflächen, und dass für reine Oberflächen der Wert von $k$ viel kleiner ist als für Oberflächen, die nur wenig beschmutzt sind. Für Alkohol und Petroleum ist der Wert von $k$ etwa $+0{,}0010$ und für Wasser $+0{,}00042$, indem $k$ positiv ist.

Gbs. (Lp.)

---

P. JANET. Remarques sur les formules de Fresnel relatives à la réflexion totale. Almeida J. (3) I. 373-375.

Die Note zeigt, wie man durch Benutzung eines bekannten Satzes der Functionentheorie zu den Formeln der totalen Reflexion gelangen kann, indem man die wesentlichen Principien der Fresnel'schen Theorie beibehält.

Lp.

---

E. KETTELER. Der Grenzbrechungsexponent für unendlich lange Wellen. Transformation der Dispersionsgleichungen. Wiedemann Ann. XLVI. 572-583.

Die Dispersionscurve aller durchsichtigen Mittel lässt sich

durch die empirische Formel

$$\nu^2 = -k\lambda^2 + a^2 + \frac{M}{\lambda^2} + \frac{N}{\lambda^4}$$

darstellen. Eine Interpretation der in derselben auftretenden Constanten und damit die Ermittelung des Wertes von $\nu$ für $\lambda = \infty$ ist indessen ohne Zuhülfenahme einer Theorie nicht möglich. Nun führen die Formeln der Helmholtz'schen Dispersionstheorie für $\lambda = \infty$ auf unbestimmte Ausdrücke, die sich für weitere Schlüsse nicht eignen. Anders soll sich dies in der Theorie des Verfassers verhalten. Um die obige Formel mit den Formeln seiner Theorie vergleichen zu können, sucht der Verf. dieselbe zunächst umzuformen. Was er jedoch für eine Umformung ausgiebt, ist eine willkürliche Aenderung derart, dass die neue Formel mit der, deren Umformung sie sein soll, mathematisch gar nicht zusammenhängt. Der vom Verfasser angestrebte Zweck ist nach des Referenten Ansicht daher nicht erreicht.

Herr Ketteler benutzt die Gelegenheit, um eine Umformung der Grundgleichungen mitzuteilen, auf denen seine Theorie (cf. F. d. M. XVII. 1885. 985) beruht. Er giebt denselben nunmehr die Form:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = n\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} - \Sigma\alpha\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} - \Sigma\beta\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

$$m'\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} = -k_\mu\xi' - g_\mu\frac{\partial\xi'}{\partial t} + \gamma\left(\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right).$$

Darin beziehen sich $m$, $\xi$ auf die Aether-, $m'$, $\xi'$ auf die Körperteilchen. Das letzte Glied der zweiten Gleichung wird gedeutet als eine den gesamten Einfluss des Aethers repräsentirende zusätzliche Kraft, welche der Differenz der Beschleunigungen von Körper- und Aetherteilchen proportional ist.

Referent muss auch hinsichtlich der umgeänderten Gleichungen sein früheres Urteil aufrecht erhalten, wonach jenen Gleichungen die genügende Begründung aus mechanischen Principien fehlt, so dass dieselben höchstens den Wert empirischer Formeln beanspruchen können. Wn.

H. v. Helmholtz. Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung. Berl. Ber. 1892. 1093-1109.

Zur Erklärung der Farbenzerstreuung nimmt der Verfasser an, dass innerhalb des von elektrischen Oscillationen durchzogenen Aethers bewegliche wägbare Teilchen mit Ladungen wahrer Elektricität enthalten sind, etwa Ladungen von der Art, wie sie an den Valenzstellen chemisch verbundener Ionen haften. Ein solcher, mit Aether und Ionenpaaren gefüllter Raum würde nach der älteren Vorstellung von der Existenz bipolarer magnetischer Molekeln dem Innern eines magnetisirten Körpers ganz analog sein; und daher lassen sich auch die aus jener älteren Theorie hergeleiteten Berechnungen des Energievorrats in dem Volumenelemente hier verwenden.

Es seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die elektrischen Momente für die Volumeneinheit, welche durch die wahre Elektricität der Ionen gebildet werden. Die elektrischen Kräfte $X$, $Y$, $Z$, welche notwendig sind, diese Momente hervorzubringen, sind ihnen proportional:

$$X = \frac{1}{\vartheta}\mathfrak{x}, \quad Y = \frac{1}{\vartheta}\mathfrak{y}, \quad Z = \frac{1}{\vartheta}\mathfrak{z}.$$

Die Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des continuirlichen Mediums, in welches jene beweglichen Molekeln eingelagert sind, sind ebenfalls jenen Kräften proportional:

$$\mathfrak{X} = \varepsilon X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z,$$

falls $\varepsilon$ die dielektrische Constante bezeichnet.

Für das betrachtete Medium wird nun, zum Teil auf Grund eines anderen Aufsatzes (vgl. Capitel 3 dieses Abschnitts) nach einander der elektrische, der magnetische und der elektromagnetische Teil des kinetischen Potentials berechnet, desgleichen die lebendige Kraft mit Rücksicht auf die Reibung der bewegten Ionen, und sodann werden die Bedingungen dafür gesucht, dass die Variation der Summe der ersten drei jener Ausdrücke, vermindert um den vierten, verschwindet. Die Betrachtung der einzelnen möglichen Variationen giebt drei Systeme von Gleichungen, aus

denen durch Elimination ein System von der Form

$$\mathfrak{X} = a^2\mathfrak{x} + m\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} + k\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

folgt.

Für ein System ebener Wellen, das in der Richtung der $x$-Axe läuft, kann man setzen:

$$\mathfrak{Y} = Be^{in(t+px)}), \quad \mathfrak{y} = be^{in(t+px)}, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{x} = \mathfrak{z} = 0.$$

Dann wird

$$b = hB = \frac{B}{a^2 - mn^2 + ink},$$

und für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{1}{p}$ folgt die Gleichung

$$\frac{p}{A}\frac{1-h}{1+h} = \frac{\varepsilon\mu A}{p}.$$

Setzt man

$$p = \frac{1}{\mathfrak{C}} - \frac{q}{in}, \quad \frac{1}{h} + 1 = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}, \quad \frac{1}{h} - 1 = \varrho_1 e^{i\vartheta_1},$$

so wird

$$\frac{q}{in} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_0}}\sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1), \quad \frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}} = \sqrt{\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_0}}\cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1),$$

worin

$$\mathfrak{C}_0 = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im continuirlichen Aether ist.

Die Resultate werden eingehend discutirt, insbesondere werden die verschiedenen Möglichkeiten hinsichtlich der Grösse von $a$ erörtert und das Verhalten nicht absorbirender Medien besprochen. Sodann wird gezeigt, dass die mit der obigen elektrischen verbundene magnetische Schwingung des Aethers

$$\mathfrak{N} = Ce^{in(t+px)}$$

gegen die ponderable Schwingung eine Phasendifferenz besitzt.

Zum Schluss wird die Brechung der vorher betrachteten Wellen an einer Ebene untersucht. Bedingung ist die Continuität aller Componenten an der Grenze. Insbesondere wird die Brechung

einer in der Einfallsebene polarisirten Welle betrachtet und für diese die Grösse des Polarisationswinkels den Fresnel'schen Gesetzen entsprechend gefunden, und zwar für alle Farben.

Wn.

C. Pulfrich. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Lichtbrechung des Glases. Wiedemann Ann. XLV. 609-665.

Eine grosse Reihe von experimentellen Untersuchungen, die mittels des Abbe'schen Spectrometers an verschiedenen Glassorten angestellt sind, führt den Verfasser zu folgenden Schlussfolgerungen, die auch in theoretischer Hinsicht von Interesse sind:

„Zur Erklärung für das Verhalten der Brechungsindices durchsichtiger fester Körper unter dem Einfluss der Temperatur ist die Annahme einer neben der Volumenänderung herlaufenden Vergrösserung des Absorptionsvermögens im blauen und ultrablauen Teile des Spectrums nicht nur notwendig, sondern auch vollkommen ausreichend. Die beiden Ursachen sind in ihren Wirkungen einander entgegengesetzt, die Abnahme der Dichte vermindert den Index, die sich steigernde Absorption im Blau erhöht denselben wieder; je nachdem nun die eine oder andere der beiden Wirkungen überwiegt, haben wir es mit einer Abnahme oder mit einer Zunahme des Brechungsindex zu thun; wenn die beiden Wirkungen sich gerade aufheben, bleibt der Brechungsindex anscheinend ganz befreit von dem Einfluss der Temperatur."

Eine Discussion der Refractionscurve, d. h. der Curve, deren Abscissen $= \frac{1}{\lambda^2}$, und deren Ordinaten die Brechungsindices $n$ sind, ergiebt folgendes Resultat:

„Die bei den durchsichtigen festen Körpern beobachtete Dispersionssteigerung ist, wenigstens für die Mehrzahl der Flintgläser, die directe Folge einer durch den Einfluss der Temperatur gesteigerten Absorptionswirkung im Ultrablau; dieser gegenüber kommen etwaige Veränderungen des Absorptionsvermögens im Ultrarot für den Bereich des mittleren Spectrums wenig oder gar nicht in Betracht. Bei den übrigen Körpern können wir aus den Ver-

änderungen, welche die Neigungstangente der Refractionscurve unter dem Einfluss der Temperatur erleidet, allein keine Entscheidung darüber treffen, ob die Dispersionssteigerung von einer Zunahme des ultraroten oder des ultrablauen Absorptionsvermögens herrührt“.

Schliesslich wird auch das Refractionsvermögen besprochen. Der Verfasser findet, dass keine der bisher aufgestellten Formeln

$$\frac{n-1}{d} = \text{const.}, \quad \frac{n^2-1}{d} = \text{const.}, \quad \frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{1}{d} = \text{const.}$$

die Aenderung von $n$ für feste Körper auch nur angenähert darstellt. Der Grund liegt auch hier darin, dass der Einfluss der Dichteänderung durch den Einfluss des geänderten Absorptionsvermögens verdeckt wird. Wn.

---

## F. Zecchini. Sul potere rifrangente del fosforo. I.

Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_2$. 433-441.

Es wird das Refractionsvermögen verschiedener Verbindungen des Phosphors sowohl nach der Formel $\frac{\mu-1}{d} = \text{const.}$ als nach der von Landolt aufgestellten $\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}\,\frac{1}{d} = \text{const.}$ [$\mu$ ist der Brechungsexponent] berechnet. Weder die linke Seite der einen, noch die der anderen Formeln giebt constante Werte, sondern die Resultate variiren je nach der Verbindung erheblich. Wn.

---

## Lord Rayleigh. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium.

Phil. Mag. (5) XXXIV. 481-502.

In der Absicht, eine Vorstellung von den Grenzen für die Anwendung der Formel zu erhalten, welche die Beziehung zwischen dem Brechungsindex und der Dichte ausdrückt, wie diese Formel von L. Lorenz und H. A. Lorentz gegeben ist, und auch in der Absicht, die Beweise zu vereinfachen, wird das Problem hier in der bestimmteren Gestalt betrachtet, die es annimmt, wenn die Widerstände in rechteckiger oder quadratischer Ordnung an-

gereiht auftreten, und weiter wird gezeigt, wie die Annäherung verfolgt werden kann, wenn die Dimensionen der Hindernisse nicht mehr sehr klein sind im Vergleich zu den Abständen zwischen ihnen. Zuerst wird das zweidimensionale Problem betrachtet, und zwar wird die Leitungsfähigkeit für Wärme oder Elektricität eines sonst gleichförmigen, durch cylindrische, in rechteckiger Ordnung aufgerichtete Hindernisse unterbrochenen Mediums untersucht. Die Seiten des Rechteckes sind mit $\alpha$, $\beta$ und der Radius des Cylinders mit $a$ bezeichnet, während das Material der Cylinder eine bestimmte, von der des Mediums verschiedene Leitungsfähigkeit besitzt. Beschränkt man die Betrachtung auf die Leitung parallel zu einer der Seiten ($\alpha$), so lassen sich Reihen für das Potential ausserhalb und innerhalb eines Cylinders ansetzen und durch die Betrachtungen von Grenzbedingungen reduciren. Das Potential $V$ kann man ansehen als herrührend von äusseren Quellen im Unendlichen (durch die der Fluss verursacht wird), die ein Glied $Hx$ geben, und auch von vielfachen Quellen auf den Axen der Cylinder. Das unendliche, von den Cylindern besetzte Gebiet hat nach Voraussetzung rechteckige Grenzen parallel zu $\alpha$ und $\beta$, erstreckt sich aber unendlich weiter parallel zu $\alpha$ als parallel zu $\beta$. Das Verhältnis des gesamten Stromes $C$ quer durch ein Rechteck $\alpha\beta$ zu $V_1$, dem Potentialfall entsprechend einem Rechtecke in Richtung $\beta$, wird dann gefunden, und dies bestimmt die specifische Leitungsfähigkeit des vorliegenden Mediums für Ströme parallel zu $\alpha$. Bedeutet $\nu$ die Leitungsfähigkeit des Materials der Cylinder, wenn die des übrigen Mediums gleich 1 ist, und $p$ den von den Cylindern besetzten verhältnismässigen Raum, so ist die Leitungsfähigkeit für $\beta = \alpha$

$$1 - \frac{2p}{\nu' + p - \frac{3p^4}{\nu'\pi^4} S_4^2 - \frac{7p^8}{\nu\pi^8} S_8^2},$$

wo $\nu' = (1+\nu)/(1-\nu)$ und $S_4$, $S_8$ gewisse Reihen bedeuten. Für den Fall, bei welchem die Cylinder nicht-leitend sind ($\nu' = 1$), giebt die Substitution des Wertes von $S_4$ bis $p^4$ einschliesslich:

$$1 - \frac{2p}{1 + p - 0{,}3058 p^4}.$$

Es wird gezeigt, wie die Berechnung ausgeführt werden kann für den Fall, dass $\alpha$ und $\beta$ ungleich sind, indem die auftretenden Reihen mit den $\theta$-Functionen eng verbunden sind. Die Abhandlung geht dann zu der Betrachtung sphärischer Hindernisse über, die in rechtwinkliger Folge angeordnet sind, und die Formel, die der oben hingesetzten entspricht, ist bis zu einer gewissen Annäherung und bei ähnlicher Bezeichnung

$$\frac{(2+\nu)/(1-\nu)-2p}{(2+\nu)/(1-\nu)+p},$$

indem die Ordnung kubisch ist. Bis hierher sind die Ergebnisse in der Sprache der Elektricitätslehre ausgedrückt worden, werden dann aber auf gewisse Probleme der Vibration angewandt. Das einfachste derselben ist das Problem der Wellenbewegung in einem von starren und festgelegten Cylindern oder Kugeln durchsetzten gasartigen Mittel, und zwar wird angenommen, dass die Wellenlänge sehr gross ist im Vergleich zur Periode ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$) der Structur. Für cylindrische Durchsetzung wird das Quadrat der Geschwindigkeit der Fortpflanzung in dem Verhältnisse $1/(1+p)$ geändert, so dass, wenn $\mu$ den Brechungsindex bezogen auf den des undurchsetzten Mittels als Einheit bezeichnet, $(\mu^2-1)/p$ $=$ const., wobei die Ordnung quadratisch ist. Wenn die Hindernisse die Eigenschaften einer Flüssigkeit von endlicher Dichte mit Zusammendrückbarkeit besitzen, so ist für kugelförmige Hindernisse $(\mu^2-1)/p(\mu^2+\frac{1}{2}) =$ const. Es ist anzumerken, dass die Anwendung dieser Formeln auf mässig kleine Werte von $p$ begrenzt ist. Endlich wird in Analogie zu Maxwell's allgemeiner Theorie elektrischer Leitung die Wellenfläche für die Fortpflanzung in dem durchsetzten Mittel betrachtet, und wenn die Kugeln in kubischer Ordnung angereiht sind und $p$ klein ist, wird die Lorentz'sche Gleichung gewonnen:

$$\frac{\mu^2-1}{\mu^2+2}\cdot\frac{1}{p} = \text{const.}$$

Wenn die Hindernisse cylindrisch sind und in quadratischer Folge angeordnet, so ist das zusammengesetzte Medium doppelbrechend. Gbs. (Lp.)

H. A. Lorentz. Ueber die Brechung des Lichtes durch Metallprismen. Wiedemann Ann. XLVI. 244-259.

Die vorliegende Arbeit bietet nicht sowohl wegen der gewonnenen Resultate Interesse dar als wegen der Art ihrer Ableitung. Die Resultate stimmen mit den von Drude entwickelten (F. d. M. XXIII. 1891. 1091) überein; aus der hier gegebenen Ableitung geht aber hervor, dass die gefundenen Formeln unabhängig von speciellen Annahmen über die Natur der Lichtschwingungen sind und aus einigen einfachen Grundsätzen abgeleitet werden können.

Der Gedankengang des Verfassers ist folgender: Wird die ebene Grenzfläche eines absorbirenden Mediums von einem Bündel paralleler Lichtstrahlen senkrecht getroffen, so lässt sich der in dem Medium entstehende Schwingungszustand durch die Formel

$$(1) \qquad g = Ae^{-px}\cos(kt-qx+s)$$

darstellen, in der $x$ die Entfernung von der Grenzfläche, $t$ die Zeit, die übrigen Buchstaben Constanten bezeichnen. Die Betrachtung eines Bündels schief auftreffender Strahlen zeigt indessen die Notwendigkeit, Bewegungszustände zu untersuchen, welche allgemeiner sind als der durch (1) dargestellte. Welche Theorie des Lichts man nun auch annehmen wolle, jedenfalls hat man die Abweichung vom Gleichgewichtszustande als einen Vector aufzufassen, dessen Componenten parallel drei senkrechten Axen gewissen drei linearen, homogenen Differentialgleichungen genügen müssen. Diese müssen Gleichung (1) als eine mögliche Lösung zulassen und ausserdem, da das Medium isotrop ist, die Eigenschaft haben, bei einer Coordinatentransformation ihre Form nicht zu ändern. Auf Grund dieser Eigenschaften wird zunächst die mögliche Form für die Differentialgleichung ermittelt, welcher die senkrecht zur Einfallsebene liegende Schwingungscomponente $g$ genügt. Hier braucht man nur eine Drehung der in der Einfallsebene liegenden Axen vorzunehmen. Sind diese $x$, $z$, so lautet die Differentialgleichung in symbolischer Form:

$$(2) \qquad \Sigma\alpha\frac{\partial^a}{\partial t^a}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^r g = 0.$$

Der Umstand, dass (1) dieser Differentialgleichung genügen

muss, und die Betrachtung der Eigenschaften von (1) führen dazu, für $g$ die Form anzunehmen:

$$(3) \qquad g = Ae^{-p_1x-p_2z}\cos(kt-q_1x-q_2z+s),$$

wo die $x$-Axe senkrecht zur Oberfläche liegt, $z$ der Schnitt dieser Fläche mit der Einfallsebene ist. Die durch (3) dargestellte Bewegung wird discutirt und auf den Durchgang durch ein Prisma angewandt, wobei sich für kleine Prismenwinkel die Drude'sche Formel ergiebt. Sodann wird gezeigt, dass die abgeleiteten Formeln auch gültig bleiben, wenn die Schwingungen parallel der Einfallsebene geschehen.

Zum Schluss wird erörtert, weshalb ein von Hrn. du Bois und Rubens aufgestelltes empirisches Brechungsgesetz für Metalle nicht annehmbar ist. Wn.

---

H. E. J. G. du Bois und H. Rubens. Ueber ein Brechungsgesetz für den Eintritt des Lichtes in absorbirende Medien. Wiedemann Ann. XLVII. 203-207.

Die Verfasser erkennen die Bedenken, welche Hr. Lorentz (vgl. das vorhergehende Referat) gegen eine früher von ihnen aufgestellte empirische Formel erhoben hat, als berechtigt an und ersetzen jene Formel durch eine andere, die sich so ergiebt: Ist $i_m$ der Winkel, welchen die Ebene gleicher Phase im Metall mit der ersten Prismenfläche bildet, $i$ der Einfallswinkel, so ist nach Lorentz

$$i_m = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n_1}\right).$$

Hierin wird für das mit dem Einfallswinkel variable Brechungsverhältnis $n_1$ die aus der Helmholtz'schen Theorie der anomalen Dispersion folgende Formel [vgl. Kirchhoff, Theoretische Optik, S. 183, Formel (18)] gesetzt und dann arcsin durch arccotg ausgedrückt. Auf Grund der so gewonnenen Formel haben die Verfasser Brechungscurven für mehrere Metalle entworfen; der Verlauf dieser Curven wird discutirt. Wn.

D. Shea. Zur Brechung und Dispersion des Lichtes durch Metallprismen. Wiedemann Ann. LXVII. 177-202.

In der wesentlich experimentellen Arbeit wird die Ablenkung des Lichtes durch ein Metallprisma berechnet. Zu dem Zwecke benutzt der Verfasser die bekannte Formel für die Ablenkung nicht absorbirender Prismen und ersetzt in derselben den constanten Brechungsexponenten $n$ durch den mit der Farbe veränderlichen $n_1$, auf den die Helmholtz'sche Theorie der anomalen Dispersion führt (vgl. das vorhergehende Referat). Aus der so gewonnenen strengen Formel, die für praktische Anwendungen zu complicirt ist, werden fünf Näherungsformeln abgeleitet, deren eine mit einer Formel des Hrn. Drude (F. d. M. XXIII. 1891. 1091) übereinstimmt. Auch mit den von Hrn. Lorentz (vgl. das Referat S. 1018) aufgestellten Formeln stimmen die hier gefundenen überein.

Wn.

---

A. B. Basset. On selective and metallic reflection. Lond. M. S. Proc. XXIII. 4-18.

In der vorliegenden Arbeit wird die Helmholtz'sche Theorie der anomalen Dispersion in eigenartiger Darstellung entwickelt, wobei sowohl die zu Grunde liegenden Voraussetzungen erörtert als die sich ergebenden Formeln eingehend discutirt werden. Zu neuen Resultaten gelangt der Verfasser nicht; als eine Erweiterung der Helmholtz'schen Theorie, die in der Einleitung ausdrücklich versprochen wird, kann das Vorgetragene nicht angesehen werden.

Wn.

---

M. Brillouin. Sur la propagation des vibrations dans les milieux absorbants isotropes. C. R. CXV. 808-811.

Die Arbeit enthält einige allgemeine Erörterungen über die Form der Wellenfläche in absorbirenden Medien. Selbst in isotropen absorbirenden Medien ist nach des Verfassers Ansicht die Wellenfläche nicht kugelförmig, sondern eine Rotationsfläche, die je nach der gegenseitigen Lage der Absorptionsebene und der einfallenden Welle, resp. der Polarisationsebene der letzteren andere und andere Formen annehmen kann. Bei dem Uebergang des Lichtes aus einem absorbirenden Medium in ein anderes braucht

die Wellenfläche im zweiten Medium nicht einmal eine Rotationsfläche zu sein. Ferner sind die Bedingungen an der Austrittsfläche eines absorbirenden Mediums ganz andere als an der Eintrittsfläche; das Gesetz über die Umkehrung der Strahlenrichtung besteht nicht mehr. Wn.

---

L. FLETCHER. The optical indicatrix and the transmission of light in crystals. Oxford. University Press Warehouse. [Nature XLVI. 581-582.]

---

F. KOLÁČEK. Theorie der Doppelbrechung in inductiver Darstellung. Wiedemann Ann. XLVIII. 258-264.

Der Verfasser versucht, die Gesetze der Lichtfortpflanzung, soweit sich dieselben auf den geometrischen Charakter der Doppelbrechung beziehen, auf inductivem Wege abzuleiten. Den Ausgangspunkt bildet das Huygens'sche Princip. Aus diesem und dem Begriffe der doppelten Brechung wird als fundamentale Eigenschaft der Wellenfläche deducirt, dass sich durch eine beliebige, ausserhalb derselben gelegene Gerade vier reelle Tangentialebenen zu derselben legen lassen. In Ebenencoordinaten muss daher ihre Gleichung vom vierten Grade sein, und soll die Wellenfläche bezüglich der drei Coordinatenebenen symmetrisch sein, so darf jene Gleichung nur gerade Potenzen der Ebenencoordinaten enthalten. Die Bestimmung der Coefficienten dieser Gleichung geschieht durch Betrachtung von Wellen, die sich längs der Axen, resp. in einem der Hauptschnitte fortpflanzen. Dabei wird aus der Erfahrung die Thatsache entnommen, dass die Doppelbrechung linear polarisirtes Licht erzeugt, und zur Darstellung der Polarisationsverhältnisse wird eine der beiden folgenden Hypothesen benutzt:

a) „Alle ebenen Wellen, deren Schwingungsrichtungen parallel sind, haben gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit“; oder

b) „alle ebenen Wellen, für welche die zur Wellennormale und zur Schwingungsrichtung senkrechten Richtungen parallel sind, besitzen gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit“.

Jede dieser Hypothesen, die sich gegenseitig ausschliessen, er-

giebt dieselben Gesetze der Doppelbrechung. Der Unterschied in den Consequenzen beruht lediglich in der verschiedenen Lage der Schwingungsebene gegen die Polarisationsebene. Aus der Gleichung der Wellenfläche ergeben sich mit Zuziehung einer der beiden erwähnten Hypothesen die Gesetze der Fortpflanzung und die Bewegungsrichtung einer beliebigen Welle. Wn.

---

A. Schrader. Geometrische Untersuchung der Geschwindigkeits-Kegel und der Oberflächen gleichen Gangunterschiedes optisch doppelbrechender Krystalle. Diss. Münster. 8°.

---

V. Volterra. Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Acta Math. XVI. 153-215.

Von den Resultaten der vorliegenden Arbeit ist vor allem hervorzuheben der Nachweis, dass diejenigen vom Lamé aufgestellten particulären Integrale der Differentialgleichungen für die Lichtbewegung in krystallinischen Medien, welche die sich von einem Centrum ausbreitenden Wellen darstellen sollen (Lamé, Leçons sur la théorie de l'élasticité, Vorl. 22 und 23), nicht eindeutige Functionen des Ortes und daher für den Zweck, dem sie dienen sollen, unbrauchbar sind. Aus demselben Grunde stellen die von Frau v. Kowalevski gefundenen Formeln (cfr. F. d. M. XVII. 1885. 987 ff.) nicht die allgemeinen Integrale jener Differentialgleichungen dar. Aber Herr Volterra begnügt sich nicht mit diesem negativen Resultat, sondern leitet neue Ausdrücke für die allgemeinen Integrale der in Rede stehenden Gleichungen her; allerdings versteht er unter „allgemeinen Integralen" etwas anderes, als sonst üblich ist.

Der Gang der Untersuchung ist folgender: Zunächst werden die Lamé'schen Gleichungen für die Lichtbewegung in krystallinischen Medien auf beliebige krummlinige Coordinaten transformirt, und zwar durch Benutzung eines vierfachen Integrals, als dessen erste Variationen die linken Seiten der auf Null gebrachten Gleichungen angesehen werden können. Im Anschluss daran wird gezeigt, dass

mit dem System der transformirten Gleichungen ein zweites Gleichungssystem, das als dem ersten conjugirt bezeichnet wird, verbunden ist, derart, dass man aus einer Lösung des ersten Systems sofort auch eine Lösung des zweiten erhält. Das erste System stellt Schwingungen dar, die der Neumann'schen Anschauung über die Lage der Polarisationsebene entsprechen, das zweite System Schwingungen, wie sie die Fresnel'sche Annahme erfordert.

Die gewonnenen Transformationsformeln werden benutzt, um die Lamé'schen Gleichungen auf die, für den Raum erweiterten, Weber'schen Variabeln zu transformiren (vgl. F. d. M. X. 1878. 533-538). Zwischen diesen Variabeln und rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$ eines Raumpunktes finden die Beziehungen statt:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = bu_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_3, & \infty > u_1 \geqq 0, \\ y = au_1 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{cn} u_3, & K \geqq u_2 \geqq -K, \\ z = au_1 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{sn} u_3, & 2L \geqq u_3 \geqq -2L. \end{cases}$$

Darin sind sn etc. die elliptischen Functionen für die Moduln

$$\varkappa^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad \mu^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},$$

und zwar bezieht sich der Modul $\varkappa$ auf die Functionen, deren Argumente den Index 2, $\mu$ auf die, deren Argumente den Index 3 haben; $4K$ und $4L$ sind die reellen Perioden für jene Moduln. Für $u_1 =$ Const. stellen die Gleichungen (1) den äusseren Mantel einer Wellenfläche dar. Neben diesen Variabeln werden die folgenden, Weber'sche Coordinaten zweiter Art genannt, betrachtet:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = c\bar{u}_1 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_2, & \infty > \bar{u}_1 \geqq 0, \\ y = c\bar{u}_1 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_2, & \bar{K} \geqq \bar{u}_2 \geqq -\bar{K}, \\ z = b\bar{u}_1 \operatorname{dn} \bar{u}_3 \operatorname{sn} \bar{u}_2, & 2\bar{L} \geqq \bar{u}_3 \geqq -2\bar{L}. \end{cases}$$

Hier sind die Moduln der elliptischen Functionen die Complemente der vorigen Moduln, $4\bar{K}$ und $4\bar{L}$ sind die reellen Perioden für die complementären Moduln. Jede der Flächen $\bar{u}_1 =$ const. stellt den inneren Mantel einer Wellenfläche dar. Wie Hr. Volterra hervorhebt, ändert sich in (1) $\operatorname{cn} u_3$ discontinuirlich an dem Teil der $xz$-Ebene, der zwischen den optischen Axen liegt und die posi-

tive und negative $x$-Axe enthält. Analoges findet in (2) für $\mathrm{cn}\,\bar{u}_3$ statt an dem Teil der $xz$-Ebene, der zwischen den optischen Axen liegt und die $z$-Axe enthält. Alle übrigen elliptischen Functionen dagegen sind continuirliche Functionen des Ortes.

Aus den auf die Weber'schen Coordinaten transformirten Differentialgleichungen ergeben sich nun leicht die Lamé'schen Integrale jener Gleichungen. Denselben wird hier, wenn $u$, $v$, $w$ die Componenten der Schwingung sind, folgende Form gegeben:

$$(3)\quad \begin{cases} u = -\mu^2 \dfrac{b\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3\,\mathrm{cn}\,u_2}{a^2 u_1 \Delta}\cdot M, \quad v = -\dfrac{\mathrm{cn}\,u_3\,\mathrm{sn}\,u_3\,\mathrm{dn}\,u_3}{a u_1 \Delta} M, \\ w = \dfrac{\mathrm{dn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_3\,\mathrm{dn}\,u_3}{a u_1 \Delta} M, \quad M = f(t+u_1)+\varphi(t-u_1), \end{cases}$$

$$\Delta = 1-\varkappa^2\mathrm{sn}^2 u_2 - \mu^2\mathrm{sn}^2 u_3 + (\mu^2+\varkappa^2-1)\mathrm{sn}^2 u_2\,\mathrm{sn}^2 u_3.$$

$f$ und $\varphi$ sind willkürliche Functionen. Die den Weber'schen Coordinaten zweiter Art entsprechenden Integrale erhält man aus (3) durch Vertauschung von $u$ mit $w$, $a$ mit $c$, wenn man zugleich $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ an Stelle von $u_1$, $u_2$, $u_3$ setzt. Durch Vertauschung von $a$ und $c$ gehen von selbst die Moduln in die complementären über. Uebrigens sind die obigen Lösungen die einzigen, welche die Form

$$u = m f(u_1+t)+n\varphi(u_1-t)$$

. . . . . . . . . . . . . . .

haben.

Die Gleichungen (3) lassen in Verbindung mit der obigen Bemerkung über die Discontinuität von $\mathrm{cn}\,u_3$ erkennen, dass die Function $v$ monodrom ist, nicht aber $u$ und $w$. In der That, geht man von einem beliebigen Punkte aus längs einer geschlossenen Linie fort, welche eine optische Axe umschliesst, so haben die Functionen $u$, $w$ bei der Rückkehr zum Ausgangspunkte die entgegengesetzten Werte. Die Lamé'schen Lösungen sind daher unbrauchbar zur Darstellung von Schwingungen, die sich von einem Centrum aus ausbreiten. Schwingungen, wie sie durch (3) dargestellt werden, könnten höchstens herrühren von einer Schicht von Erschütterungscentren, die auf einem der zwischen den optischen Axen liegenden Teile der $xz$-Ebene ausgebreitet sind.

Nun lassen sich, wie weiter gezeigt wird, aus den Lamé'schen Lösungen die von Frau v. Kowalevski aufgestellten Formeln für

die allgemeinen Integrale der Lamé'schen Gleichungen durch dasselbe Verfahren ableiten, mittels dessen sich aus dem Ausdruck $\frac{1}{r}F(r-Vt)$ das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \Delta_2 u$$

ergiebt. Aus der Form, in der die Kowalevski'schen Lösungen hier auftreten, wird geschlossen, dass sie Functionen darstellen, die selbst nebst ihren Ableitungen nach der Zeit zur Zeit $t=0$ verschwinden. Jene Formeln stellen daher gar keine Integrale der Lamé'schen Gleichungen dar.

Um brauchbare Lösungen zu erhalten, verfährt nun der Verf. so: Es seien $u_1$, $u_2$, $u_3$ resp. $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ nicht die absoluten Weber'schen Coordinaten des Punktes $x$, $y$, $z$, sondern die relativen Coordinaten der Punkte $x, y, z$ und $\xi, 0, \zeta$, d. h. es sei

$$x-\xi = bu_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_3 \quad \text{etc.}$$

Dann ist der Ausdruck

$$(4)\quad \begin{cases} u = -\int \frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} f(t+u_1,\ \xi,\ \zeta) d\xi d\zeta \\ \qquad + \int \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{f}(t+\bar{u}_1,\ \xi,\ \zeta) d\xi d\zeta, \end{cases}$$

in dem $f$ und $\bar{f}$ willkürliche Functionen ihrer drei Argumente sind, continuirlich und monodrom für alle positiven, desgleichen für alle negativen $y$, während derselbe für $y=0$ discontinuirlich ist. Nun kann die relative Coordinate $u_3$ zweier Punkte der $xz$-Ebene sowohl durch $u_3$ als durch $\pm 2L - u_3$ dargestellt werden. Setzt man in Bezug auf diese relative Coordinate $u_3$ fest, dass sie stets zwischen $L$ und $-L$ liege, ebenso $\bar{u}_3$ zwischen $\bar{L}$ und $-\bar{L}$, so ergiebt sich

$$\lim_{y=+0} u = -\lim_{y=-0} u,$$

Die allgemeinen Integrale der Lamé'schen Gleichungen werden nach diesen vorbereitenden Betrachtungen so gefunden: Da

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

so können $u$, $v$, $w$ durch zwei andre Functionen $\varpi$, $\sigma$ dargestellt werden:

$$u = \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varpi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \sigma}{\partial y};$$

und für die allgemeinen Integrale der Gleichungen, denen $\varpi$ und $\sigma$ genügen, ergeben sich Ausdrücke, die analog wie (4) gebildet sind, die aber ausser den beiden willkürlichen Functionen $f$, $\bar{f}$ noch die Ableitungen zweier anderen willkürlichen Functionen $g$, $\bar{g}$ nach $t$ resp. nach $\xi$, $\zeta$ enthalten. Diese Ausdrücke haben die folgende Eigenschaft: Sie sind endlich, monodrom und continuirlich für alle $x$, $z$ und für $y > 0$. Die Werte, welche $\varpi$ und $\sigma$ sowie ihre Ableitungen nach $y$ für $y = 0$ annehmen, hängen von vier willkürlichen Functionen dreier Variabeln ab. Lösungen von dieser Eigenschaft nennt der Verf. allgemeine Lösungen. Die Berechtigung dieser Bezeichnung dürfte zweifelhaft sein, da die Gültigkeit der Ausdrücke der Beschränkung $y > 0$ unterworfen ist.

Noch mag bemerkt werden, dass der Verfasser auch eine Erweiterung der Kirchhoff'schen Form des Huygens'schen Princips ableitet, eine Erweiterung, die zur Anwendung auf Wellen in zweiaxigen Medien geeignet ist. — Zum Schluss wird gezeigt, dass die Gleichungen, welche die elektromagnetische Lichttheorie für die Bewegung in Krystallen liefert, sich auf die Lamé'schen Gleichungen reduciren lassen. Wn.

---

A. Garbasso. Sul problema delle onde piane nella teoria elettromagnetica della luce. Torino Atti XXVII. 854-861.

Unter der Voraussetzung, dass die drei Hauptaxen der elektrischen Kraft $(X, Y, Z)$ mit denen der magnetischen $(L, M, N)$ zusammenfallen, dass ferner die Constanten der magnetischen Polarisation für die drei Hauptaxen gleich sind, gilt folgendes System von sechs Gleichungen:

$$(1) \qquad A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

. . . . . . . . . . . . . .

$$(2) \qquad A \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

. . . . . . . . . . .

Die übrigen vier Gleichungen folgen aus (1) und (2) durch cyklische Vertauschung von $X$, $Y$, $Z$ und $L$, $M$, $N$. Zugleich treten an Stelle von $\varepsilon_1$ die Constanten $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$.

Durch Elimination von $L$, $M$, $N$ folgen aus (1) und (2) drei Gleichungen für $X$, $Y$, $Z$, denen man durch die bekannte, auf ebene Wellen führende Annahme

$$\varepsilon_1 X = af, \quad \varepsilon_2 Y = bf, \quad \varepsilon_3 Z = cf$$

genügen kann, wo $f$ ausser von der Zeit nur von

$$s = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

abhängt. Aus jenen Gleichungen folgt dann sofort, dass die Richtung $a$, $b$, $c$ auf der Richtung $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ senkrecht steht; d. h. dass die sich ergebenden Schwingungen transversal sind. Für das Quadrat $\varrho$ der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ergiebt sich ferner die Gleichung

$$(h_1 - \varrho)(h_2 - \varrho)(h_3 - \varrho) + k_1 k_2 k_3 = 0,$$

während die Richtungscosinus $a$, $b$, $c$ der Schwingung durch

$$(h_1 - \varrho)a + k_1 b = 0$$

und die aus letzterer durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 sowie von $a$, $b$, $c$ folgenden Gleichungen bestimmt sind. Die Bezeichnungen $h_1$, $k_1$ etc. sind Abkürzungen für

$$\frac{\alpha^2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_2} = h_1, \quad \frac{\alpha\beta}{\varepsilon_2 \varepsilon_3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = k_1 \text{ etc.}$$

An diese Resultate knüpft der Verfasser folgendes Räsonnement. Die Gleichung dritten Grades für $\varrho$ hat sicher eine reelle Wurzel $\varrho_1$; ihr mögen die Werte $a_1$, $b_1$, $c_1$ von $a$, $b$, $c$ entsprechen. Sind dann $a_2$, $b_2$, $c_2$ drei andere Richtungscosinus, die mit $a_1$, $b_1$, $c_1$ durch Gleichungen von der Form

$$a_2 = \beta c_1 - \gamma b_1 \text{ etc.}$$

zusammenhängen, so genügen $a_2$, $b_2$, $c_2$ denselben Gleichungen, die man für die Verhältnisse von $a_1$, $b_1$, $c_1$ nach Elimination von $\varrho_1$ erhält. Also sind $a_2$, $b_2$, $c_2$ ebenfalls mögliche Lösungen; ihnen entspricht eine zweite Wurzel der Gleichung für $\varrho$. Diese Gleichung hat daher notwendig drei reelle Wurzeln. Die dritte Wurzel muss mit einer der ersten beiden zusammenfallen. Denn

wäre sie von jenen verschieden, so gäbe es ein drittes Wertsystem $a_3$, $b_3$, $c_3$, das den obigen Bedingungen genügte, und in Folge dessen ein viertes, das mit $a_3$, $b_3$, $c_3$ ebenso zusammenhinge wie $a_2$, $b_2$, $c_2$ mit $a_1$, $b_1$, $c_1$; mithin müsste die Gleichung für $\varrho$ vier Wurzeln haben, was nicht möglich ist. Ferner besteht die Gleichung

$$\frac{a_1}{\varepsilon_1} a_2 + \frac{b_1}{\varepsilon_2} b_2 + \frac{c_1}{\varepsilon_3} c_2 = 0.$$

Nun sind $\frac{a_1}{\varepsilon_1}$, $\frac{b_1}{\varepsilon_2}$, $\frac{c_1}{\varepsilon_3}$ den Richtungscosinus von $X$, $Y$, $Z$ proportional, daher sind $a_2$, $b_2$, $c_2$ die Richtungscosinus von $L$, $M$, $N$.

Wn.

---

G. Basso. Di un carattere di reciprocità proprio della luce riflessa dai mezzi cristallini. Torino Atti XXVIII. 149-154.

In einem im vorigen Jahrgang (cf. F. d. M. XXIII. 1891. 1088-1089) besprochenen Aufsatze hatte Herr Potier u. a. folgenden Satz bewiesen: Wird ein geradlinig polarisirter Lichtstrahl an einer Krystallfläche reflectirt, so hat der reflectirte Strahl eine derartige Intensität und ist so polarisirt, dass, wenn man unter Beibehaltung aller übrigen Bedingungen den Weg des Lichtstrahls umkehrt, der neue reflectirte Strahl nicht nur mit dem früheren einfallenden zusammenfällt, sondern dass auch der reflectirte Strahl bei beiden Reflexionen dieselbe Intensität und dieselbe Polarisationsebene besitzt. Diesen Satz leitet Herr Basso hier für einaxige Krystalle aus den Formeln ab, die er in einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. XVII. 1885. 1003) auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie aufgestellt hatte. Wn.

---

Th. Schwedoff. Sur une anomalie dans la réfraction double des liquides. Almeida J. (3) I. 49-53.

Zur Erklärung einer Anomalie, welche in den Kundt'schen Versuchen über Doppelbrechung rotirender Flüssigkeiten beim Collodium besonders eingetreten war (vgl. F. d. M. XIII. 1881. 755), wird gezeigt, dass diese Erscheinung verständlich wird, wenn man

annimmt, dass die Axen der Deformation in manchen Fällen von der Richtung abweichen, welche ihnen die heutige Elasticitätstheorie zuweist. Lp.

---

O. Kurth. Beitrag zur Erklärung der Farben von Krystallplatten im polarisirten Licht. Pr. (Nr. 187) Gymn. Jauer. 15 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Die hier mitgeteilte Ableitung der Farbenerscheinungen, welche dünne Krystallblättchen im polarisirten Lichte zeigen, reproducirt lediglich bekannte Rechnungen und enthält weder hinsichtlich der Methode noch hinsichtlich der Resultate irgend etwas Neues.

Wn.

---

E. Carvallo. Absorption cristalline et choix entre les diverses théories de la lumière. C. R. CXIV. 661-664.

H. Becquerel. Observations relatives à la communication de M. Carvallo. C. R. CXIV. 664-665.

Geht Licht von der Intensität $i_0$ durch eine absorbirende Krystallplatte von der Dicke $z$, so erhält man die Intensität des austretenden Lichtes durch folgende, von Becquerel aufgestellte Formel:

$$\sqrt{i} = \sqrt{i_0}\,(e^{-mz}\cos^2\alpha + e^{-nz}\cos^2\beta + e^{-pz}\cos^2\gamma).$$

Darin sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel, welche die Fresnel'sche Schwingungsrichtung mit den optischen Elasticitätsaxen bildet. Herr Carvallo hat diese Formel am Turmalin experimentell geprüft und dieselbe für Wärmestrahlen grosser Wellenlänge bestätigt gefunden. Einige aus der Formel sich ergebende Folgerungen sind mit keiner der bisher aufgestellten optischen Theorien vereinbar; demnach sind nach Herrn Carvallo's Ansicht alle diese Theorien nicht im Stande, von den Gesetzen der Absorption in Krystallen Rechenschaft zu geben.

Herr Becquerel stellt die Anschauungen und Hypothesen zusammen, die ihn auf die obige empirische Formel geführt haben.

Wn.

---

H. Becquerel. Sur les lois de l'intensité de la lumière émise par les corps phosphorescents. Almeida J. (3) I. 137-144.

Zur Erklärung des allmählichen Verlöschens des Lichtes bei phosphorescirenden Körpern nimmt der Verf. an, die Abnahme der Amplitude sei die Folge einer intermolecularen dämpfenden Kraft, proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit. Hieraus ergiebt sich die Intensität $i$ nach Verlauf der Zeit $t$ in der Form:

$$i = \frac{1}{(a+bt)^2},$$

wo $a$ und $b$ zwei Constanten bedeuten. Die Vergleichung dieser Formel mit den alten Versuchsergebnissen des Vaters des Verfassers ist ganz befriedigend. Abweichungen bei manchen Körpern werden darauf zurückgeführt, dass Mischungen verschiedenartiger Bestandteile vorlagen. Lp.

---

J. Larmor. The equations of propagation of disturbances in gyrostatically loaded media, and on the circular polarization of light. Lond. M. S. Proc. XXIII. 127-135.

Um die magnetische Drehung der Polarisationsebene rein mechanisch zu erklären, denkt sich der Verfasser ein elastisches Medium, auf dessen Volumenelemente ausser den elastischen Kräften noch gewisse Kräftepaare wirken. Man kann ein derartiges Medium dadurch realisiren, dass man in einem elastischen Medium kleine Hohlräume anbringt, in deren Innerem Schwungräder rotiren. Die Rotation derselben soll eine so schnelle sein, dass dieselbe durch irgend welche Bewegungen des Mediums nicht alterirt wird, während die rotirenden Räder ihrerseits eine Reaction auf das Medium ausüben, die man als Wirkung eines Kräftepaares deuten kann. Alle elastischen Bewegungen des Mediums erfahren zwar durch das Vorhandensein der Hohlräume eine Störung; doch ist diese Störung von rein localem Charakter und ändert die elastische Eigenschaft des Mediums als eines Ganzen nicht, während die durch die Reaction der Schwungräder entstehenden Kräftepaare

als von derselben Ordnung angenommen werden wie die elastischen Kräfte.

Durch die genannten Kräftepaare erfahren die elastischen Druckkräfte folgende Aenderungen: Sind $u$, $v$, $w$ die Verrückungen, ferner $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ die Winkelgeschwindigkeiten der elastischen Bewegung, d. h.

$$\omega_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \text{ etc.,}$$

ist endlich

$$2\mathfrak{L} = -M\omega_z + N\omega_y, \quad 2\mathfrak{M} = -N\omega_x + L\omega_z,$$
$$2\mathfrak{N} = -L\omega_y + N\omega_z,$$

so gelten für die tangentialen Druckcomponenten die Gleichungen:

$$Y_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mathfrak{L},$$

$$Z_y = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mathfrak{L} \text{ etc.,}$$

während die Ausdrücke für die normalen Druckcomponenten dieselben bleiben wie ohne jene Kräftepaare. Setzt man die obigen Ausdrücke in die allgemeinen Elasticitätsgleichungen ein, so erhält man die Gleichungen, von denen die Fortpflanzung von Wellen in einem Medium der angenommenen Beschaffenheit abhängt. Besonders einfach gestalten sich diese Gleichungen, wenn $L$, $M$, $N$ constant sind. Ist speciell $M = 0$, $N = 0$, und betrachtet man eine Welle, deren Fortpflanzungsrichtung mit der $x$-Axe zusammenfällt, so haben die Gleichungen eine ähnliche Form wie die, auf die der Verfasser bei einer früheren Untersuchung geführt ist (cf. F. d. M. XXII. 1890. 1048ff.); sie lauten:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\mathfrak{L}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\mathfrak{L}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} = \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

An die Aufstellung dieser Gleichungen knüpft der Verfasser Bemerkungen über die Voraussetzungen, die der elektrischen Theorie der Drehung der Polarisationsebene zu Grunde liegen. Wn.

E. Carvallo. Sur la polarisation rotatoire du quartz. Ann. de chim. et phys. (6) XXVI. 113-144.

Der grössere Teil dieser Arbeit ist experimenteller Natur. Am Anfange (Abschnitt 1: Theorie) entwickelt der Verf. seine Theorie, die er auszugsweise schon in C. R. CXIII (F. d. M. XXIII. 1891. 1088) veröffentlicht hatte. Wir setzen nur die Einleitungsworte her: „Unter den zahlreichen Theorien der Doppelbrechung sind diejenigen, welche zu den Sarrau-Maxwell'schen Polarisationen führen, die einzigen, welche die Gesetze der Doppelbrechung mit dem Briot'schen Dispersionsgliede, dessen Existenz sich aufdrängt, vereinbaren. Ich habe dies in meiner Thèse gezeigt, sodann in einer Note an die Akademie der Wissenschaften. Ausserdem habe ich bewiesen, dass Gleichungen vom Typus der Boussinesq-Helmholtz'schen den gleichzeitigen Gesetzen der Doppelbrechung und Dispersion in aller Strenge genügen. Ich will hier zeigen, wie diese Gleichungen auch die Gesetze der Drehung der Polarisationsebene und der Dispersion enthalten können". Lp.

---

P. Lefèbvre. Vibrations privilégiées dans un milieu actif et biréfringent. Almeida J. (3) I. 121-127.

Unter den durch ein doppelbrechendes Medium hindurch beförderten Lichtschwingungen giebt es solche, welche das „Privileg" haben, ohne Modification und mit einer bestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeit befördert zu werden. Bei den einaxigen Krystallen sind dies z. B. die zum Hauptschnitte parallelen oder senkrechten Schwingungen, während jede andere Schwingung die Resultante zweier dieser privilegirten Schwingungen ist, welche vermöge ihrer verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sich beim Durchgange trennen. Im Anschlusse an eine Arbeit des Hrn. Gouy (F. d. M. XVII. 1885. 1005) stellt der Verf. bei einem activen und doppelbrechenden Medium die Existenz zweier Systeme privilegirter Schwingungen fest. Jene Schwingungen, die verschiedene Geschwindigkeiten haben, trennen sich beim Durchgange. Diese elliptische Doppelbrechung tritt immer wenig hervor. Die Existenz der hypothetischen conjugirten Schwingungen von Airy ergiebt

sich aus der als Thatsache zugestandenen Ueberlagerung des activen und des doppelbrechenden Vermögens. Lp.

---

Sir G. G. Stokes. Eighth report of the Committee appointed for considering the best methods of recording the direct intensity of solar radiation. Brit. Ass. Rep. 1892. 158-165.

Die Arbeit des Ausschusses war in dem Jahre auf eine sowohl experimentelle wie theoretische Prüfung von Balfour Stewart's zweitem Aktinometer bei seiner Benutzung als eines dynamischen Instrumentes beschränkt (Brit. Assoc. 1886. 63, 1887. 32).

Gbs. (Lp.)

---

Chr. Wiener. Die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke. Wiedemann Ann. XLVII. 659-670.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der experimentellen Bestimmung der Verhältnisschwelle bei Helligkeitswahrnehmungen, die der Verfasser individuell und zeitlich sehr verschieden findet.

Br.

---

## C. Geometrische Optik.

H. v. Helmholtz. Handbuch der physiologischen Optik. Zweite umgearbeitete Auflage. Lieferung 6 und 7. Hamburg und Leipzig. L. Voss. 401-560.

Die vorliegenden Lieferungen (über die ersten fünf Lieferungen vgl. F. d. M. XVIII. 1886. 1007, XIX. 1887. 1099, XXI. 1889. 1104) der neuen Ausgabe der physiologischen Optik sind, ebenso wie die drei vorhergehenden, der Lehre von den Gesichtsempfindungen gewidmet, und zwar werden die Intensität und Dauer der Lichtempfindung, ferner die Veränderungen der Reizbarkeit behandelt, die Lehre vom Contraste begonnen. Auch diese Lieferungen weisen

gegenüber den entsprechenden Abschnitten der ersten Auflage wesentliche Aenderungen resp. Erweiterungen auf; Lieferung 6 speciell ist fast durchweg (70 Seiten von 80) neu. Mathematische Betrachtungen sind an verschiedenen Stellen benutzt, insbesondere zur Erörterung des Einflusses des Eigenlichtes der Netzhaut auf die Unterschiedsschwellen, sowie der Beziehungen zwischen Farbenempfindlichkeit und Helligkeitsempfindlichkeit, ferner bei der Lehre von den Elementar- oder Urfarben, endlich in der Theorie der kürzesten Farbenlinien (über letztere vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 1094).
Wn.

---

M. Switalski. 50 stereometrische Aufgaben aus der Optik für Ober-Prima. Pr. (No. 3) Gymn. Braunsberg. 26 S. 4°.

Die Arbeit enthält 50 Aufgaben über die Lichtstärke, die Spiegelung und die Brechung des Lichtes mit Angabe der Resultate, zum Teil auch der Auflösungsmethoden. Die Aufgaben gewähren vielfache Gelegenheit zur Anwendung goniometrischer, trigonometrischer und stereometrischer Formeln.
Mh.

---

Heinr. Krüger. Das Spiegelbild eines leuchtenden Punktes in bewegtem Wasser. Pr. (Nr. 201) Ev. Fürstensch. Pless. 16 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Ein leuchtender Punkt $L$ liefert im ruhigen Wasser als Spiegelbild einen Punkt $L'$, im bewegten aber eine Curve, welche aufgefasst werden kann als Ort der Schnittpunkte eines durch das beobachtende Auge $A$ gehenden Strahlenbüschels mit einem dazu projectivischen Kreisbüschel, dessen Centrale die Verbindungsgerade der Projectionen von $L$ und $A$ auf die ruhende Wasserfläche, und dessen Grundpunkte $L$ und $L'$ sind. Die Reflexionscurve ergiebt sich als die Serpentine einer zweizügigen circularen Curve 3ter Ordnung; das zugehörige Oval geht durch $A$ und $L$. Es werden noch zwei andere Entstehungsweisen dieser Curve ermittelt, ferner wird ihre analytische Gleichung aufgestellt und durch synthetische Betrachtungen eine Reihe von Sätzen über ihre Asymptoten, Wendepunkte, Tangenten, Normalen und Doppelnormalen, endlich über

die Lage ihrer vier Scheitelpunkte, d. i. der höchsten und tiefsten Punkte des Ovals und der Serpentine, und über die Maxima und Minima ihrer Krümmung gewonnen. Zum Schlusse werden noch fünf Specialfälle synthetisch discutirt und die erhaltenen Resultate analytisch verificirt. Mh.

---

A. Kurz. Die kleinste Ablenkung im Prisma. Schlömilch Z. XXXVII. 317-318.

Enthält einen neuen Beweis dafür, dass derjenige Strahl, welcher das Prisma so durchläuft, dass Ein- und Austrittswinkel gleich sind, die geringste Ablenkung erfährt; es wird gezeigt, dass die rechts und links benachbarten zwei Strahlen eine grössere Ablenkung erleiden. Als Beweismittel wird an einer Stelle die Anschauung benutzt. Mh.

---

A. Kurz. Beiträge zur geometrischen Optik. 1. Construction geradsichtiger Prismensysteme. 2. Construction eines achromatischen Prismenpaares. Poske Z. V. 242-247.

Nach Radau's „Bemerkungen über das Prisma“ (Pogg. Ann. CXVIII. 1863) liefert der Verfasser die Construction für das drei- und für das fünfteilige Prismensystem für die erste, im Titel genannte Aufgabe, nach Reusch (Pogg. Ann. CXVII. 1862) für den Achromatismus eines Kronprismas von 40°. Lp.

---

G. Helm. Zur Behandlung der Reflexion an Kugelflächen. Poske Z. V. 131-133. Lp.

---

G. Van der Mensbrugghe. Sur une manière très simple d'exposer la théorie des miroirs ou des lentilles. Brux. S. sc. XVI A. 62-65.

G. Van der Mensbrugghe. Théorie élémentaire des lentilles épaisses et des systèmes optiques. Brux. S. sc. XVI B. 207-221.

G. Van der Mensbrugghe. Note sur la détermination des éléments de la lentille équivalente au système optique de l'oeil. Brux. S. sc. XVI B. 263-272.

Elementare Darstellung der bekannten Thatsachen für die Spiegel und die Linsen. Der Verf. begründet sie, indem er von Anfang an die reciproken Eigenschaften der Brennpunkte und der Nebenaxen zu Hülfe nimmt. Folgendes sind die Schlüsse der dritten Note: Das optische System des normalen Auges ist einer Sammellinse gleichwertig, deren Hauptpunkte bezw. 2 mm und 2,4 mm hinter der Hornhaut liegen. Der äussere Focalabstand ist 14,76 mm, der innere 19,88 mm. Der erste Knotenpunkt liegt 3,28 mm hinter der Vorderfläche des Krystallkörpers, der zweite 0,32 mm vor der Vorderfläche desselben Körpers.

Mn. (Lp.)

---

J. Larmor. The simplest specification of a given optical path, and the observations required to determine it. London M. S. Proc. XXIII. 165-173.

Die Resultate einer früher besprochenen Arbeit (F. d. M. XXI. 1889. 1110) werden weiter discutirt und vereinfacht.

R. M.

---

S. Finsterwalder. Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht. Münch. Abh. XVII. 517-587. (3 Fig.-Taf.)

S. Finsterwalder. Ueber die Bilder dioptrischer Systeme grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes. Deutsche Math. Ver. I. 41-43.

Die elementare Theorie der centrirten Linsensysteme, wie sie von Gauss zum Abschluss gebracht wurde, lässt sich im wesentlichen durch den Satz charakterisiren, dass, für Strahlen einer Farbe wenigstens, jedes noch so complicirte dioptrische System durch eine einzige Linse insofern ersetzt werden kann, als diese Linse zu jedem Object ein Bild von gleicher Grösse und Lage liefert, wie jenes

Linsensystem. Dieser Satz gilt nur in den engen Grenzen einer ersten Annäherung, und in Wirklichkeit bilden Linsensysteme scharfe leuchtende Punkte nicht wieder als solche ab und eben so wenig genau an der Stelle, welche aus der Gauss'schen Theorie folgt. Will man sich über den Betrag der Unschärfe der Bilder und über deren Verzerrung unterrichten, so muss man die nächsten, in den Gauss'schen Entwickelungen bereits vernachlässigten Glieder mit berücksichtigen und erhält dann eine Formelserie, welche den Gang eines Strahles durch ein dioptrisches System so genau darstellt, dass auch der Grad der Unschärfe der Bilder und die Verzerrung in erster Annäherung daraus gefolgert werden kann. Eine solche Formelserie, welche die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf das Gesichtsfeld und in Bezug auf die Oeffnung in Betracht zieht, hat zuerst L. von Seidel (1856, Astron. Nachr. Nr. 1027) aufgestellt. Aus dieser Formelserie kann die Art des Strahlensystems, welches durch die Brechung eines gewöhnlichen Strahlenbündels in einem dioptrischen System entsteht, erschlossen werden. Wenn der leuchtende Punkt sich ausserhalb der optischen Axe des Linsensystems befindet, ist das System der gebrochenen Strahlen von der fünften Ordnung und vierten Klasse und dessen Brennfläche von der neunten Ordnung. Dies gilt im allgemeinen. Ist dagegen das Linsensystem in der optischen Axe in Bezug auf die sphärische Aberration corrigirt, so reducirt sich die Ordnung des Systems der gebrochenen Strahlen auf 4 und die der Brennfläche auf 8. Im allgemeinen Fall kann das System der gebrochenen Strahlen auch mechanisch erzeugt werden. Bewegt sich nämlich ein Stab derart, dass drei auf ihm fest angenommene Punkte in drei zu einander senkrechten Ebenen gleiten, so beschreibt derselbe in seinen verschiedenen Lagen ein Normalensystem, das mit dem System der gebrochenen Strahlen dann zur Uebereinstimmung gebracht werden kann, wenn die Distanz zweier der festen Punkte des Stabes sehr klein gegenüber der Entfernung des dritten angenommen wird. Aus der in diesem Satze begründeten geometrischen Einsicht in die Natur des Systems der gebrochenen Strahlen lassen sich nun alle Eigentümlichkeiten der diffusen Lichtflecke, die an Stelle scharfer Bilder auftreten, ermitteln, so namentlich die Helligkeits-

verteilung durch Isophoten und die Begrenzungscurven, welche durch die Abblendung der einfallenden Strahlen bedingt sind. Durch Einführung elliptischer Coordinaten in die Seidel'schen Formeln werden besonders einfache Gleichungen für die erwähnten Curven gefunden, die dann zu einer bemerkenswerten Abbildung der Schirmebene, in der der Lichtfleck aufgefangen wird, führen. Bei dieser Abbildung gehen die Brennlinien des Lichtflecks in Gerade, die Isophoten in Hyperbeln, welche jene Geraden zu Asymptoten haben, und die Grenzcurven für verschieden grosse Blenden in eine andere Hyperbelschar über. Alle diese Verhältnisse sind durch Zeichnungen erläutert worden, die sich teils auf eine unsymmetrisch gebaute Convexlinse, teils auf das Königsberger Heliometerobjectiv beziehen. Verf.

---

M. Thiesen. Ueber vollkommene Diopter. Wiedemann Ann. XLV. 821-824.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich an eine frühere desselben Verfassers an (vergl. F. d. M. XXII. 1890. 1068). Ein vollkommenes Diopter ist eine Reihe von durchsichtigen Mitteln, durch welche eine in einem isotropen homogenen Medium liegende Fläche auf eine zweite — conjugirte — ebensolche Fläche abgebildet wird. Seine Wirkung ist durch die Zeit charakterisirt, in welcher das Licht von einem beliebigen Punkte der einen Grenzfläche zu einem Punkte der anderen gelangt. Für den Specialfall, dass die conjugirten Flächen Ebenen sind und eine geometrisch ähnliche Abbildung stattfindet, wird die Charakteristik aufgestellt; man sieht, dass zwischen den Richtungscosinus der einfallenden und der austretenden Strahlen eine lineare Gleichung besteht. Ob die Aufgabe, für eine gegebene Charakteristik ein zugehöriges vollkommenes Diopter zu construiren, immer lösbar ist, ist noch nicht erwiesen. Diese Aufgabe wird zum Schlusse analytisch formulirt. Mh.

---

G. Helm. Bemerkung zu einer dioptrischen Construction. Schlömilch Z. XXXVII. 123-125.

Es wird gezeigt, wie man für jedes beliebige centrirte System

brechender Kugelflächen, dessen Brenn- und Hauptpunkte bekannt sind, einen Kreis construiren kann, mit dessen Hülfe man zu jedem leuchtenden Punkte seinen Bildpunkt findet. Es ist eine Erweiterung einer von Möbius in seiner „Entwickelung der Lehre von den dioptrischen Bildern mit der Collineationsverwandtschaft" gegebenen Construction. Mh.

---

A. Schwarz. Ueber die optische Axe oder die Cardinale nicht centrirter dioptrischer Systeme. Diss. Rostock. 8⁰.

---

Ch. A. Stevenson. Note on the progress of the dioptric lens as used in lighthouse illumination. Nature XLVI. 514-516.

---

F. J. van den Berg. Over de berekening van gecentreerde lenzenstelsels. Amst. Versl. en Meded. (3) IX. 125-130.

Die Abhandlung bezweckt die Bestimmung der Brennpunkte und der Brennpunktdistanzen eines centrirten Linsensystems, ausgedrückt in den Brennpunktdistanzen und den gegenseitigen Entfernungen der einzelnen Linsen, nach einer andern Methode als der von G. Ferraris in den „Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino", 1880-81, Bd. XVI mitgeteilten. Mo.

---

R. Henke. Lage und Eigenschaften der Hauptpunkte einer Linse. Poske Z. VI. 27-29. Lp.

---

P. Lefèbvre. Notes d'optique géométrique. Almeida J. (3) I. 341-345.

Construction für centrirte Linsensysteme ohne Bezugnahme auf die früheren Veröffentlichungen der Vorgänger. Lp.

---

M. d'Ocagne. Remarque sur la représentation de la formule des lentilles. Almeida J. (3) I. 75-77.

Zur Construction der Formel $1/p + 1/p' = 1/f$ benutzt der Verf. ein Coordinatensystem mit dem Winkel $\frac{2}{3}\pi$ der Axen. Trägt man auf die $x$- und $y$-Axe bezw. die Strecken $p$ und $p'$ auf, so ist die Gleichung der die Endpunkte der Strecken verbindenden Geraden $x/p + y/p' = 1$. Da nun die Gerade $x = y$ den Coordinatenwinkel hälftet, so liefert der Schnittpunkt dieser Halbirungslinie mit jener Geraden die Endpunkte der Strecke $f$.

Lp.

---

A. Broca. Aplanétisme et achromatisme. Almeida J. (3) I. 147-162.

Für die Berechnung des Aplanatismus und der Achromasie der Linsen zieht der Verf. die Dicke derselben mit in Betracht, und zwar bis zur vierten Ordnung. „In Hinsicht auf den Aplanatismus der Oculare spielt die bisher vernachlässigte Dicke eine Hauptrolle, was mir die durch diese Studie benötigten langen Rechnungen zu rechtfertigen scheint.“ Bei der Frage der Achromasie beschränkt der Verf. die Behandlung auf den Fall einer aus Flint- und Kronglas zusammengesetzten Linse. Lp.

---

A. Broca. Sur l'aplanétisme. C. R. CXIV. 168-173.

A. Broca. Sur l'achromatisme. C. R. CXIV. 216-220.

Wenn von einem Punkte der Axe eines centrirten dioptrischen Systems ein Strahl die erste Linse in einem Punkte trifft, welcher von einem festen Axenpunkte unter dem als klein vorausgesetzten Erhebungswinkel $\omega$ gesehen wird, so lässt sich die Entfernung des Punktes, in welchem der conjugirte Strahl die Axe schneidet, von einem festen Punkte in eine nach Potenzen von $\omega$ fortschreitende Reihe entwickeln. Die sphärische Abweichung ist im allgemeinen von der Ordnung des ersten auftretenden Reihengliedes, für gewisse Axenpunkte jedoch, welche „aplanatische Punkte“ genannt werden, sinkt sie auf die Ordnung des zweiten Gliedes. Vermittelst einer graphischen Methode lassen sich die Aufgaben lösen: eine Kron-Flintglas-Linse zu construiren, für welche ein bestimmter Punkt ein aplanatischer ist, und: für eine gegebene Linse die aplanati-

schen Punkte zu finden. Praktisch brauchbare Punkte dieser Art haben nur Linsen, welche nicht zu dünn sind. In der zweiten Arbeit untersucht dann der Verfasser noch die Bedingungen, welchen die Krümmungsradien und die Dicken der Linsen eines Systems genügen müssen, um achromatisch zu wirken. Den Wert seiner Untersuchungen findet der Verf. darin, dass an der Hand derselben sich ziemlich dicke, stark vergrössernde Oculare beim Mikroskop und Fernrohr anwenden lassen. Mh.

---

J. Traill Taylor. The optics of photography and photographic lenses. London. Whittacker and Co. [Nature XLV. 364.]

---

# Capitel 3.

## Elektricität und Magnetismus.

H. Poincaré. Elektricität und Optik. Autorisirte deutsche Ausgabe von W. Jaeger und E. Gumlich. II. Band. Berlin. J. Springer. VII + 222 S. 8°.

Ueber den ersten Band dieses Werkes ist F. d. M. XXIII. 1891. 1108ff. referirt. Der zweite, von Herrn B. Brunhes redigirte Band enthält die Ausarbeitung der im Frühjahr 1890 von Herrn Poincaré an der Sorbonne gehaltenen Vorlesungen. Dieselben beginnen mit einer Darlegung der Ampère'schen Theorie, an die sich die Weber'sche und weiter die von Helmholtz anschliesst. In der Darstellung der letzteren Theorie, welche die Theorien von Neumann, Weber, Maxwell als specielle Fälle enthält, weicht der Verfasser wesentlich von Helmholtz ab.

Der zweite Teil des Bandes beschäftigt sich mit der Theorie der Hertz'schen Experimente; als Einleitung ist eine kurze, von Herrn Blondin ausgearbeitete Beschreibung der in Rede stehenden Versuche vorausgeschickt. Bei der Besprechung der Theorie selbst erhebt Herr Poincaré Einwürfe gegen die Rechnungen von Hertz.

In Folge eines Fehlers, den Hertz bei der Bestimmung der Capacität begangen, sei der Wert, den er für die Periode erhalten, durch $\sqrt{2}$ zu dividiren, der Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit daher mit $\sqrt{2}$ zu multipliciren. Damit sei eines der Resultate von Hertz, welche allgemein für die wichtigsten gehalten werden, auf einen Rechenfehler zurückzuführen. Nichts desto weniger behielten die Hertz'schen Versuche ein sehr grosses Interesse, und seien die Schlüsse, welche man in Bezug auf die elektrodynamischen Theorien daraus ziehen könne, darum nicht minder streng.

Dem Inhalt der eigentlichen Vorlesungen hat Herr Poincaré ein Ergänzungscapitel beigefügt, in dem einige Punkte, die in den Vorlesungen aus Mangel an Zeit nicht entwickelt werden konnten, ausführlicher besprochen werden. Ferner wird hier auf neue Versuche von Sarasin und De la Rive hingewiesen, sowie auf die Aenderungen der theoretischen Ansichten, zu denen diese Versuche nötigen.

Auch die Herausgeber der deutschen Uebersetzung haben dem Buche noch einige Zusätze beigefügt, welche die Theorie von Poynting und Heaviside, ferner verschiedene neuere Versuche über elektrische Schwingungen, über Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen, über die Beziehung zwischen Dielektricitätsconstante nnd Brechungsexponent u. a. betreffen. Wn.

---

A. Gray. Electromagnetic theories and the electromagnetic theory of light. Nature XLV. 367-372.

Darstellung des Gedankenganges von Hrn. Poincaré's „Électricité et optique", Teil II. („Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz".) Lp.

---

G. F. Fitzgerald. M. Poincaré et Maxwell. Nature XLV. 532-533.

Der Verf. kritisirt das von Hrn. Poincaré in seinem Buche „Électricité et optique" eingeführte „fluide inducteur", dessen postulirte Eigenschaften, die Elasticität und Incompressibilität, im

Widerspruch mit einander seien, und hebt im Gegensatze hierzu die Maxwell'sche Anschauung eines mit Structur begabten Mediums als logisch gefestigt hervor. Lp.

---

Heinrich Hertz. Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig. J. A. Barth. 1892. VIII + 296 S. Mit 40 Fig. im Text.

Die Verlagsbuchhandlung hat sich den Dank aller Physiker durch den Wiederabdruck von zwölf der epochemachenden Abhandlungen von H. Hertz erworben. Von besonderem Werte aber ist die von Hertz neu hinzugefügte „Einleitende Uebersicht. A. Zu den Versuchen. B. Zur Theorie". Im Abschnitt B. wird der Frage näher getreten: „Was ist nun aber, genau gesprochen, die Faraday-Maxwell'sche Theorie?" Hier werden vier Standpunkte von einander unterschieden, unter denen im Laufe der Zeit die Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus betrachtet worden sind; interessant ist vor allem, aus so berufenem Munde Erörterungen zu vernehmen über die Poisson-Mosotti-Helmholtz'sche Theorie im Gegensatz zur Maxwell'schen.

Des Verständnisses wegen ist die Abhandlung des Hrn. W. von Bezold: „Untersuchungen über die elektrische Entladung. Vorläufige Mitteilung" zum grösseren Teile hinzugefügt worden. „Nachträgliche Anmerkungen" S. 286-295 über die sämtlichen Abhandlungen beschliessen das Werk. Hier bespricht Hertz auch den von Hrn. Poincaré bemerkten Rechenfehler (vergl. das Referat auf Seite 1042 oben) und zeigt, dass derselbe für das Ergebnis seiner Untersuchung ohne Belang ist. Hae.

O. Heaviside. Electrical papers. 2 Volumes. London. Macmillan and Co. XX + 560, XVI + 587 S.

Diese Schriften sind zu wichtig, als dass man sie unerwähnt lassen könnte. Sie bilden das Werk eines höchst originellen Geistes und bieten eine Fülle geistvoller Bemerkungen und Theorien. Einige der Abhandlungen haben wir sorgfältig gelesen; doch

müssen wir offen bekennen, dass wir nicht eine genügende Anzahl derselben studirt haben, um eine gerechte Würdigung der besonderen in ihnen benutzten analytischen Methoden zu wagen, und daher verzichten wir auf eine eingehende Kritik des Werkes. Doch wollen wir betonen, dass die Bände durchaus die Aufmerksamkeit aller am Studium der Elektricität Interessirten verdienen.

Gbs. (Lp.)

---

M. Möller. Das räumliche Wirken und Wesen der Elektricität und des Magnetismus. Hannover-Linden. Manz und Lange. X + 73 S. Mit 3 Fig.-Taf. 8°.

Wie ein schneller Wechsel im Luftdruck sich als Schallwelle fortpflanzt, so ist ein Wechsel im Aetherdruck gleichbedeutend mit der Naturkraft: Elektricität. Dieser dient als Beförderungsmittel die Bewegung der kleinsten Teile des Aethers, des Aetherkornes, vom Verfasser „Commotion“ genannt. Im Umkreis eines elektrisirten Körpers ist also der Aether elektrisch erregt, und zwar umgeben den galvanischen Leitungsdraht eilende Aetherwellen, den isolirten Conductor stehende Wellen. Indem der Verfasser seine durch Beobachtung von Wasserwellen gewonnenen Vorstellungen auf die Elektricität anwendet, kommt er zu der Ueberzeugung, dass das Aetherkorn wie das Wasserteilchen Drehschwingungen vollführt. Irgend ein Ergebnis dieser seiner Naturphilosophie der Rechnung zu unterwerfen, davon steht der Verfasser, wie er ausdrücklich in der Einleitung sagt, ab. Das Vorstehende ist im wesentlichen das, was dem Referenten allgemein verständlich erscheint; der grösste Teil des Buches jedoch besteht in dem Aneinanderreihen von Hypothesen, welche nach Art von Dogmen vorgetragen werden, ohne dass den Verfasser die innere Wahrscheinlichkeit derselben überhaupt oder ihr Verhältnis unter einander kümmert. Zur Charakterisirung der Schrift dient es vielleicht, wenn die folgenden Sätze genannt werden:

„Das Mass, um welches der statische Aetherdruck abgenommen hat, entspricht dem negativen Potential des Ortes.“

„In der Elektricitätslehre nennt man die Differenzen des statischen Aetherdrucks das Potential.“

„Ein negatives Potential, d. h. ein kleiner statischer Aetherdruck, entsteht dort, wo der Wellendruck von einem Punkte oder einer Fläche aus nach allen oder zwei einander entgegengesetzten Richtungen auseinander strahlt, z. B. im Umkreis eines mit elektrischen Wellen geladenen Körpers.“

„Magnetismus ist der Gegensatz in einer örtlichen Verteilung des ätherischen Gesamtdrucks, welcher sich aus dem statischen Aetherdruck und dem Druck der Wellen zusammensetzt.“

„Der innere ätherische Druck der Atome ist gleich dem äusseren Aetherdruck, vermehrt um einen latenten inneren Aetherdruck; letzterer dürfte 15 Tausend Billionen Atmosphären überschreiten.“

„Warum die Drehschwingungen (des Aetherkorns) in harten Stahlmagneten sich erhalten können, ist eine Materialfrage, die sich als solche nur in Anlehnung an die Experimentalforschung beantworten lässt.“

„Unter Aether ist hier nur der Licht- und Elektricitätsäther gemeint;“ aber

„Wie anders sind die Lichtwellen und Wärmewellen, die kehren nicht um, wie die sich ausbreitenden elektrischen Wellen solches thun, sofern am Ausgangspunkt der Wellen die Quelle der Wellenerregung versiegt, sondern sie dringen unaufhaltsam in den Raum hinein.“ U. s. w. Hae.

---

Ruoss. Ein Widerspruch in Edlund's Theorie der Elektricität. Schlömilch Z. XXXVII. 125-127.

Auf eine kleine, vernickelte, ebene Metallplatte wurde eine Planconvexlinse aufgelegt, und diese beiden wurden von oben und von unten durch grosse Glasplatten zusammengedrückt. Die entstehenden Newton'schen Farbenringe wurden mit einem Mikroskop von 130-facher Linearvergrösserung beobachtet. Nun wurde die Metallplatte mittels einer Influenzmaschine so stark als möglich geladen, für möglichste Isolation gesorgt, das Mikroskop aber zur Erde abgeleitet. Wäre nun Edlund's Theorie richtig, nach welcher sich die elektrischen Erscheinungen mit Hülfe eines einzigen Fluidums erklären lassen, das aller Wahrscheinlichkeit nach nichts anderes als der Aether ist, so müsste die zugeführte Elektricität eine Ver-

mehrung des Aethers zur Folge haben, die Dichtigkeit desselben in der Nähe des innersten Newton'schen Ringes müsste zunehmen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes also abnehmen, und damit der Brechungscoefficient sich vergrössern. Nun ergaben aber die Beobachtungen trotz der stärksten Ladungen keine Veränderung der Ringe. Die Rechnung, welche angestellt wird, ergiebt jedoch, dass eine Veränderung des Brechungscoefficienten um $\frac{1}{4000}$ mit dem vorhandenen Mikroskop noch sehr gut hätte beobachtet werden müssen, da derselben eine Vergrösserung des Radius des Ringes um $\frac{1}{1300}$ mm bei einer Vergrösserung von 130 entspricht.

Hae.

---

G. Albrecht. Ueber die Berechtigung und die Verwendung des elektrischen Potentials und einiger verwandten Begriffe im Mittelschulunterricht. Jahresbericht des K. K. Gymnasiums in Brünn. 1892. 8°.

Der Verf. macht auf den Uebelstand aufmerksam, dass auf den Mittelschulen die Elektricitätslehre noch durchaus nach den älteren Anschauungen vorgetragen wird, die später auf der Universität denselben Schülern als veraltet hingestellt werden.

Um diesen Widerspruch zu beseitigen, wäre es nach Ansicht des Verf. von grossem Vorteile, die Schüler schon auf der Schule mit den neueren Grundbegriffen (Potential, Capacität, Kraftlinien u. s. w.) vertraut zu machen. Es folgt dann noch eine kurze populäre Darstellung der Elektricitätslehre auf dieser Grundlage. Es dürfte aber doch schwierig sein, besonders den Begriff des Potentials ohne Verwendung der höheren Mathematik völlig klar zu legen. Ein grundlegender Begriff, der dem Schüler nicht vollständig verständlich wird, dürfte seine Vorstellungen von der Elektricität doch mehr verwirren als aufklären. Hau.

---

L. de la Rive. Application de la théorie des lignes de force à la démonstration d'un théorème d'électrostatique. C. R. CXIV. 740-742.

Indem der Verf. sich auf die Theorie der Kraftröhren eines

elektrischen Feldes stützt, wird ein directer analytischer Beweis des Satzes gegeben: „Wenn im elektrischen Felde an die Stelle eines Systems von elektrisirten Leitern eine oder mehrere Niveauflächen gesetzt werden, die erstens die wirkenden Massen umgeben und zweitens eine Oberflächendichte $= -\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dn}$ besitzen, so bleibt das Feld ausserhalb dieser Flächen dasselbe; hingegen ist das Potential im Innern constant und zwar gleich demjenigen Werte, den es im Felde auf diesen Flächen selbst hat". Als Einleitung werden zwei andere, von Chasles und von Lord Kelvin herrührende Beweise kurz charakterisirt; der neue von de la Rive schliesst sich mehr an den letzteren an. Hae.

---

J. Stefan. Ueber das Gleichgewicht der Elektricität auf einer Scheibe und einem Ellipsoid. Wien. Ber. CI. 1583-1588.

Statt die Verteilung einer elektrischen Ladung auf einer unendlich dünnen, kreisförmigen Scheibe aus jener auf einem abgeplatteten Rotationsellipsoide abzuleiten, kann man sie auch einfacher aus jener auf einer Kugelfläche bestimmen. Dazu genügt der einfache Satz, dass zwei Massen $m_1$ und $m_2$, die auf einen in ihrer Verbindungslinie zwischen ihnen liegenden Punkt gleich grosse Kräfte ausüben, dies auch dann noch thun, wenn ihre Distanzen von dem Punkte in gleichem Verhältnisse verändert werden und ihre Orte mit dem zwischen ihnen gelegenen Punkte in einer geraden Linie bleiben. Die gleichförmige Verteilung einer Masse, welche auf einer Kugelfläche sich im Gleichgewichte befindet, hat bekanntlich die Eigenschaft, dass ein Doppelkegel von unendlich kleiner Oeffnung, den man durch einen Punkt im Innern der Kugelfläche als Spitze legt, auf der Kugelfläche Massen ausschneidet, deren Kräfte sich in dem angenommenen Punkte für sich das Gleichgewicht halten. Die Kräfte dieser Massen werden sich in diesem Punkte auch das Gleichgewicht halten, wenn man diese Massen auf eine durch den Punkt und durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Ebene projicirt, weil dadurch die Distanzen in

demselben Verhältnisse verkleinert werden. Projicirt man also die ganze auf der Kugelfläche befindliche elektrische Belegung in der angegebenen Weise auf die besagte Diametralebene, ist $h$ der Radius der Kugel, $\sigma$ die Dichte der Elektricität in einem beliebigen Punkte der Scheibe, dessen Entfernung vom Mittelpunkt derselben gleich $r$ ist, $E$ die gesamte Ladung auf der Kugel, so ergiebt sich durch ganz elementare Betrachtungen

$$\sigma = \frac{E}{4\pi h\sqrt{h^2 - r^2}},$$

und die Capacität der Scheibe wird $\frac{2h}{\pi}$.

Eine Kugel lässt sich durch drei auf einander senkrechte ungleiche Dilatationen des von ihr umschlossenen Raumes in ein Ellipsoid verwandeln. Ist die Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = h^2,$$

und ändert man die Coordinaten $x$, $y$, $z$ in $\xi$, $\eta$, $\zeta$ nach dem Gesetze um:

$$h\xi = \alpha x, \quad h\eta = \beta y, \quad h\zeta = \gamma z,$$

so entsteht das Ellipsoid:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 1.$$

Wird die Verteilung der Ladung auf einem Ellipsoide so getroffen, dass die auf ein Flächenelement der Kugel entfallende Masse jenes Flächenelement des Ellipsoides bedeckt, das bei der Transformation des Raumes aus dem ersteren Elemente entstanden ist, so kann man den obigen Satz von dem Doppelkegel von unendlich kleiner Oeffnung anwenden, und durch ganz einfache Rechnungen die gesuchte Dichte

$$\sigma = \frac{E \cdot p}{4\pi\alpha\beta\gamma}$$

ableiten, wo $p$ das Lot ist, gefällt vom Mittelpunkt des Ellipsoides auf diejenige Tangentialebene, die sich im Punkte mit der Dichtigkeit $\sigma$ legen lässt.

Die Verteilung einer Ladung, welche auf einer elliptisch begrenzten Scheibe im Gleichgewicht sich befindet, kann aus jener

auf einem Ellipsoide abgeleitet werden, wenn man die auf diesem befindlichen Massen auf eine seiner Hauptebenen projicirt, oder aber aus der Verteilung derselben Ladung auf einer kreisförmigen Scheibe, wenn man diese durch zwei ungleiche orthogonale Dilatationen in eine elliptische Scheibe verwandelt. Es ergiebt sich die Dichte im Punkte $\xi$, $\eta$ auf der einen Seite der elliptischen Platte:

$$\sigma' = \frac{E}{4\pi\alpha\beta\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}}}.$$

Hae.

---

K. Baer. Die Verteilung der Elektricität auf der Fusspunktfläche einer Kugel. Pr. (No. 104) Oberschule Frankfurt a. O. 44 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Der Verf. hat mit seiner Arbeit dieses Mal einen weniger glücklichen Griff gethan, wenigstens in Rücksicht auf die Priorität der Ergebnisse seiner Untersuchung. Dieselbe deckt sich in ihren einzelnen Teilen mit den Entwickelungen der Arbeiten von: 1) Wilhelm Walte: Das Problem des stationären Temperaturzustandes für einen Rotationskörper, dessen Meridian eine gewisse Curve vierter Ordnung ist. B. G. Teubner, Leipzig 1880, 26. S. 4°. Diss. 2) E. Riedel. Ueber die elektrische Verteilung auf der Reciprocitätsfläche eines Rotationsellipsoides. Pr. (Nr. 536) Nicolaigymn. Leipzig 1891. 20 S. 4°. (vgl. F. d. M. XXIII. 1891. 1128-1130.) 3) Theodor Arendt. Theorie der Elektricitätsverteilung auf dem Rotationshyperboloide. Diss. Halle 1884. 32 S. 8°.

Offenbar hat der Verf. bei der Abfassung seiner Arbeit keine Kenntnis von der Existenz der drei genannten Untersuchungen gehabt. Neu ist in seinen Resultaten der Schluss, der den Grenzfall, nämlich einen durch Rotation einer Kardioide entstehenden Conductor, behandelt. Hae.

---

G. Adler. Ueber die Capacität von Condensatoren. Wiedemann Ann. XLVI. 500-502.

Vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 1141. Der dort angegebene

Satz wird hier noch einmal behandelt und bewiesen. Die Beispiele fehlen (vergl. F. d. M. XXI. 1889. 1140). Hae.

---

E. Riecke und W. Voigt. Die piezoelektrischen Constanten des Quarzes und Turmalines. Wiedemann Ann. XLV. 523-552.

Herr Voigt hat vor einiger Zeit eine Theorie der piezo- und pyroelektrischen Erscheinungen an Krystallen publicirt (Ges. d. Wiss. zu Göttingen, XXXVI, 1890), welche auf der Hypothese beruht, dass die beiden Phänomene eine gemeinsame Ursache haben; dieselbe ist in den Deformationen zu suchen, die an den Krystallen teils durch Wärme, teils durch mechanischen Druck hervorgebracht werden. Hr. Voigt nimmt ausserdem an, dass die drei elektrischen Hauptmomente $a$, $b$, $c$ lineare Functionen der sechs Hauptdeformationen sind, welche er durch $x_x$, $y_y$, $z_z$, $y_z$, $z_x$ und $x_y$ bezeichnet; also

$$a = \sum_i \varepsilon_{1i}\xi_i,\quad b = \sum_i \varepsilon_{2i}\xi_i,\quad c = \sum_i \varepsilon_{3i}\xi_i;$$

es ist $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und $\xi_i$ der Reihe nach eine der sechs so eben genannten Hauptdeformationen. Die 18 piezoelektrischen Constanten $\varepsilon_{ki}$ lassen sich auf eine kleine Anzahl von einander verschiedener Constanten reduciren, je nach dem Grade und der Art der Symmetrie des piezoelektrischen Krystalls.

Man hat ebenso in Functionen der Druckcomponenten $X_x$, $Y_y$, $Z_z$, $Y_z$, $Z_x$ und $X_y$ die linearen Formeln:

$$a = \sum_i \delta_{1i}\Xi_i,\quad b = \sum_i \delta_{2i}\Xi_i,\quad c = \sum_i \delta_{3i}\Xi_i,$$

wo $i = 1, 2, \dots, 6$ und $\Xi_i$ der Reihe nach die sechs so eben genannten Grössen darstellen. Diese Gleichungen enthalten die 18 piezoelektrischen Moduln $\delta_{ki}$, welche Functionen der 18 piezoelektrischen Constanten $\varepsilon_{ki}$ sind.

Bei dem Quarz giebt es nur $\varepsilon_{11}$ und $\varepsilon_{14}$, denen $\delta_{11}$ und $\delta_{14}$ entsprechen. Bei dem Turmalin giebt es vier piezoelektrische Constanten: $\varepsilon_{22}$, $\varepsilon_{15}$, $\varepsilon_{31}$, $\varepsilon_{33}$ und entsprechend: $\delta_{22}$, $\delta_{15}$, $\delta_{31}$, $\delta_{33}$. Riecke und Voigt bestimmen die $\delta_{ki}$ mit Hülfe von rechtwinkligen Prismen, die passend nach den krystallographischen Axen orientirt

sind. Sie bestimmen für diese die elektrischen Momente, die durch mechanischen Druck in bestimmter Weise hervorgebracht worden sind. Sie haben dabei Werte gefunden, welche eine genügende Uebereinstimmung zwischen Versuch und Berechnung ergeben. Daraus schliessen die Verfasser auf die Exactheit der von Voigt aufgestellten Fundamentalhypothesen. Hae.

C. Somigliana. Ricerche sulla deformazione ed i fenomeni piezoelettrici in un cilindro cristallino. Annali di Mat. (2) XX. 61-99.

Nachdem im ersten Teile auf Grund der Abhandlung von W. Voigt: Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle (Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, XXXIV, 1887) diejenigen eines Cylinders untersucht worden sind, auf dessen Mantel Druckkräfte wirken, während die Basen frei von Druck sind, wird dies im zweiten Teile unter Benutzung der im vorigen Referat erwähnten Voigt'schen Abhandlung und Hypothesen angewandt auf die piezoelektrischen Verhältnisse eines krystallinischen Cylinders, der irgend einem der sechs Krystallsysteme angehört, und es werden die elektrischen Momente $a$, $b$, $c$ als Functionen der Druckcomponenten dargestellt. Hae.

E. Warburg. Ueber die elektrische Kraft an den Elektroden und die Elektrisirung des Gases bei der Glimmentladung. Wiedemann Ann. XLV. 1-27.

Ist $\mathfrak{R}$ dem absoluten Werte nach die elektrische Kraft, welche an den Elektroden stattfindet, und zwar elektrostatisch gemessen, $R'$ dieselbe, und zwar elektromagnetisch gemessen, ist $v = 30.10^9$cm die Lichtgeschwindigkeit, so bestehen, wenn $s$ die Grösse der Elektrodenfläche, $F$ die beobachtete elektrostatische Anziehung bedeuten, die den einen Flächenteil $s$ der Elektrode gegen den anderen hintreibt, die Gleichungen:

$$\frac{F.g}{s} = \frac{\mathfrak{R}^2}{8\pi}; \quad \mathfrak{R} = \frac{R'}{v}, \quad R = \frac{R'}{10^8},$$

daher

$$R = 300\sqrt{\frac{8\pi g F}{s}};$$

die Dielektricitätsconstante des Gases ist = 1 gesetzt worden.

Hae.

---

E. Cohn. Ueber die Gordon-Winkelmann'sche Methode zur Messung von Dielektricitätsconstanten. Wiedemann Ann. XLVI. 135-138.

A. Winkelmann. Ueber die Verwendung und Wirkungsweise des Telephons bei elektrischen Nullmethoden. Wiedemann Ann. XLVI. 666-680.

E. Cohn. Zu Herrn Winkelmann's Abhandlung: „Ueber die Verwendung und Wirkungsweise des Telephons bei elektrischen Nullmethoden". Wiedemann Ann. XLVII. 752-755.

Verbindet man ein Telephon mit den beiden Condensatorplatten $P_1$ und $P_2$, welche die Elektricitätsmengen $e_1$ und $e_2$ und das Potential $U$ besitzen; befindet sich weiter zwischen denselben eine Platte $Q$ vom Potential $V$ und parallel zu $P_2$ eine Platte $P_3$ vom Potential $V_0$, so bestehen die Gleichungen:

$$e_1 = c_1(U-V)+\gamma_1(U-V_0),$$
$$e_2 = c_2(U-V)+\gamma_2(U-V_0),$$

die $c$ und $\gamma$ sind positive Coefficienten. Die Bedingung für das Verstummen des Telephons ist

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Um dieses von Hrn. Cohn erhaltene Resultat handelt es sich im wesentlichen in der beiderseitigen Discussion. Hae.

---

A. Vaschy. Sur les réseaux de conducteurs électriques. Propriété réciproque de deux branches. C. R. CXV. 1280-1283.

Bei der Wheatstone'schen Brücke macht man Anwendung von

folgendem, in den Handbüchern bewiesenen Satze: „Wenn in einem Netz von elektrischen Leitern eine elektromotorische Kraft $E$, die sich in einem Zweige $A$ dieses Netzes befindet, in einem anderen Zweige $B$ einen Strom von der Intensität $i$ hervorruft, so erzeugt umgekehrt dieselbe Kraft $E$ im Zweige $B$ einen Strom von gleicher Intensität in $A$.“ Dieser Satz lässt sich auf ein beliebiges System von Netzen ausdehnen, die unter sich keinerlei metallische Verbindung haben und sich nur gegenseitig durch Induction beeinflussen, das ausserdem Condensatoren enthalten kann und dessen E. M. K. sich mit der Zeit ändert. „Es seien ein oder mehrere Leiternetze gegeben, die sogar in verschiedenen Zweigen Condensatoren enthalten können. Wenn alsdann $E = f(t)$ im Zweige $A$ einen Strom $i = \varphi(t)$ im Zweige $B$ hervorruft, so wird umgekehrt $E = f(t)$ in $B$ einen Strom in $A$ erzeugen, dessen Intensität nach dem Gesetz $i = \varphi(t)$ variirt.“ Der Beweis dieses Satzes wird gegeben für den Fall, dass die Netze keine Condensatoren enthalten. Hae.

---

S. Kalischer. Zur Theorie und Berechnung der Stromverzweigung in linearen Leitern. Wiedemann Ann. XLVI. 113-118.

Das Princip der Superposition elektrischer Ströme, dessen Geltung für ein beliebiges Leitersystem von beliebiger Anordnung durch v. Helmholtz in aller Strenge bewiesen worden ist, verdient bei Lösung von Problemen der Stromverzweigung in linearen Leitern vor den Kirchhoff'schen Sätzen namentlich dann den Vorzug, wenn sämtliche Zweige der Leiter in zwei Punkten zusammenstossen. Dies wird an drei Beispielen gezeigt: 1) an einem dreifach verzweigten System, für welches die Stromstärken in jedem der vier Zweige berechnet werden; 2) an der Wheatstone'schen Brücke; 3) an einem von v. Helmholtz behandelten Falle, wo in einem Kreise mit Selbstinduction ein Nebenschluss vorhanden ist.

Hae.

---

Th. W. Engelmann. Le principe du conducteur commun. Arch. Néerl. XXVI. 423-435.

Wenn mehrere durchströmte lineare geschlossene Leiter einen einzigen gemeinsamen Punkt haben, so ist der Strom in jedem bekanntlich derselbe, als wenn gar kein Contact stattfände. Die theoretische Notwendigkeit, dass nur ein einziger Contactpunkt bestehe, kann praktisch dadurch ersetzt werden, dass sämtlichen Leitern ein Teil gemeinsam ist, dessen Widerstand im Verhältnis zu demjenigen jedes einzelnen Leiters sehr gering ist. Unterbricht man die Contactstelle $AB$, so dass die Punkte $A$ und $B$ einzeln Berührungspunkte für die Leiter bleiben, so entstehen in den verschiedenen Teilen Ströme, deren Intensität von der ursprünglich vorhandenen abweicht. Dieser Unterschied wird die Variation der Stromstärke in jedem Teile genannt. Nähere Betrachtung einiger Fälle, die für die Physiologie ein specielles Interesse bieten. Mo.

---

J. Bosscha. Sur un problème relatif à la variation simultanée de courants électriques dans un système de conducteurs linéaires. Arch. Néerl. XXVI. 459-469.

Anschliessend an die vorhergehende Abhandlung, wird die nachstehende allgemeinere Aufgabe gelöst: Ein System von $n$ linearen Leitern zu construiren, worin die Widerstände und die elektromotorischen Kräfte derart verteilt sind, dass das Zustandekommen oder das Unterbrechen eines Contactes in einem dieser Leiter die Ströme in den übrigen $n-1$ Leitern zwischen zwei für jeden derselben vorgeschriebenen Werten variiren lässt. Mo.

---

J. Klemenčič. Zur Bestimmung des Selbstinductions-Coefficienten einer Drahtrolle. Wiedemann Ann. XLVI. 315-318.

Enthält Vorschläge zu Abänderungen der Maxwell'schen Methode der Bestimmung jenes Coefficienten. Die Grundlage des Verfahrens bildet die Wheatstone'sche Brücke unter Benutzung a) eines bifilar gewickelten Magnetinductors, b) eines gewöhnlichen Magnetinductors, c) eines Erdinductors; die Berechnung wird jedes Mal hinzugefügt. Hae.

---

O. TROJE. Zur Bestimmung des Coefficienten der Selbstinduction mit Hülfe des Elektrodynamometers. Wiedemann Ann. XLVII. 501-512.

Das Instrument ist zu dem angegebenen Zweck bereits früher von Hrn. A. Oberbeck verwandt worden. Dasselbe hat die Eigenschaft, wenn es mit seiner festen Rolle in den Hauptzweig, und mit seiner beweglichen in den Brückenzweig einer von sinusartigen Wechselströmen gespeisten Wheatstone'schen Drahtcombination geschaltet wird, keinen Ausschlag zu geben, sobald die diese beiden Rollen durchfliessenden Wechselströme eine Phasendifferenz von $\frac{\pi}{2}$ haben. Unter der Annahme, dass nur ein Zweig der Combination eine Inductionsspirale enthält, ergiebt sich eine einfache Formel für den Selbstinductionscoefficienten. Der Verf. legt sich nun die Frage vor, ob nicht auch der Selbstinductionscoefficient der losen stromdurchflossenen Rolle von Einfluss ist, und ob nicht die von Hrn. Oberbeck gegebene Theorie in diesem Punkte zu ergänzen ist (praktisch kam dies bei Hrn. Oberbeck kaum in Frage, da er ein Fröhlich'sches Instrument mit Eisenkern benutzt hat).

In der Wheatstone'schen Brücke enthalte der Hauptzweig einen Sinusströme liefernden Inductionsapparat und die feste Rolle des Elektrodynamometers, der Zweig 0 die lose Rolle desselben mit dem Selbstinductionscoefficienten $L_0$ ($=0$ bei Hrn. Oberbeck). In Zweig 1 befinde sich die auf ihren Coefficienten $L_1$ zu untersuchende Inductionsspirale; die Zweige 2, 3 und 4 seien inductionslos. Capacitäten seien nirgends vorhanden. Nach Kirchhoff gelten dann zu jeder beliebigen Zeit die Gleichungen:

$$i_1 w_1 + i_0 w_0 - i_3 w_3 = -L_0 \frac{di_0}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt}, \qquad I = i_1 + i_3 = i_2 + i_4,$$

$$i_0 w_0 + i_4 w_4 - i_2 w_2 = -L_0 \frac{di_0}{dt}, \qquad i_1 = i_0 + i_2.$$

Daraus wird nun, wenn die Rolle durch die Sinusströme keine Ablenkung erfahren soll, die Gleichung abgeleitet:

$$L_1^2 + \frac{w_2 + w_4}{w_4} \cdot \frac{w_3 + w_4}{w_0 + w_2 + w_4} L_0 L_1$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2} \left( \frac{w_3 w_2}{w_4} - w_1 \right) (w' + w_1 + w_3),$$

wo

$$w' = \frac{w_0(w_2+w_4)}{w_0+w_2+w_4},$$

$n =$ Anzahl der Stromwechsel in einer Secunde.

Die Gleichung vereinfacht sich, wenn man $w_2 = w_4$ setzt. Bei grösseren Werten von $w_1$, wo dann auch $w_2$ und $w_4$ grösser gewählt werden müssen, genügt die Formel:

$$L_1 = \frac{1}{\pi n}\sqrt{(w_2-w_1)(w'+w_1+w_3)} - \frac{(w_2+w_4)L_0}{w_0+w_2+w_4}.$$

Hae.

---

P. Janet. Détermination des coefficients de self-induction au moyen des oscillations électriques. C. R. CXV. 1286-1289.

Es ist vorgeschlagen worden, den Coefficienten $L$ der Selbstinduction aus der Formel

$$T = 2\pi\sqrt{C.L}$$

zu bestimmen, indem man die Dauer $T$ einer elektrischen Schwingung misst. Diese Methode unterliegt mancherlei principiellen Bedenken, namentlich in Hinsicht auf die Capacität $C$. Der Verf. schlägt folgenden Weg vor zur Bestimmung von $L$ vermittelst Schwingungen von kleiner Periode. $AB$ sei eine Spule, von der man $L$ messen will. Hinter dieselbe ist ein Widerstand $BC$ ohne Selbstinduction geschaltet. $AB$ und $BC$ haben denselben Widerstand $r$. Sind alsdann $y_1$ und $y_2$ die Ausschläge eines ballistischen Galvanometers, wenn durch $ABC$ eine elektrische Schwingung geht und zwischen $A$ und $B$ die Potentialdifferenz $e_1$, zwischen $B$ und $C$ die Potentialdifferenz $e_2$ existirt, so gelten die Gleichungen:

$$ky_1 = e_1, \qquad ky_2 = e_2;$$
$$e_1 = ri + L\frac{di}{dt}, \qquad e_2 = ri,$$

aus denen sich ergiebt:

$$L = r\frac{y_2 - y_1}{\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}};$$

$\frac{dx}{dt} = a$ ist eine Constante, die leicht bestimmt werden kann. Es wird weiter gezeigt, dass es genügt, nur den Maximalwert, sowohl von $y_2 - y_1$, als von $\frac{dy_2}{dx}$ zu beobachten, da das Verhältnis dieser beiden Grössen im allgemeinen eine Constante ist. Also ist:

$$L = r\,\frac{(y_2 - y_1)_{\max}}{a\left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{\max}},$$

welche Formel die Capacität des angewandten Condensators nicht enthält, sich vielmehr nur auf die Definition des Coefficienten der Selbstinduction stützt. Vorgenommene Messungen unter Anwendung dieser Methode liefern genau dasselbe Ergebnis, als wenn man nach der Lord Rayleigh'schen Methode verfährt.

Hae.

H. M. Macdonald. The self-induction of two parallel conductors. Cambr. Trans. XV. 303-312, Cambr. Proc. VII. 259-261. (Abstract.)

Für die Selbstinduction zweier unendlichen parallelen Cylinder von gegebenen Radien hat Maxwell (Electricity and Magnetism, II § 685) eine Formel angegeben, die aber, wie Lord Rayleigh (Phil. Mag. Mai 1886) gezeigt hat, nur richtig ist, wenn die magnetische Permeabilität der Cylinder und des umgebenden Mediums dieselbe ist. Für den Fall, dass diese Permeabilität für jeden der Cylinder und für das Medium verschieden ist, giebt der Verfasser in der vorliegenden Abhandlung eine Lösung, die u. a. als Specialfall die Maxwell'sche Formel enthält, womit die Richtigkeit der Bemerkung des Lord Rayleigh von anderer Seite erhellt.

Gz.

A. Vaschy. Sur les considérations d'homogénéité en physique. C. R. CXIV. 1416-1419.

C. Clavenad. Sur les considérations d'homogénéité en physique et sur une relation entre la vitesse de propagation d'un courant, la capacité et le coefficient de self-induction de la ligne. C. R. CXV. 470-472.

A. Vaschy. Sur les considérations d'homogénéité en physique. Réponse à une Note de M. Clavenad.
C. R. CXV. 597-599.

Durch Betrachtungen über Homogeneität ist man im Stande, gewisse Formeln in der Physik und Mechanik herzuleiten bis auf einen Zahlencoefficienten. Dabei muss man sich auf folgenden allgemeinen Satz stützen, dessen Beweis jedoch Hr. Vaschy in den Annales télégraphiques publicirt hat; er lautet: „Wenn zwischen $n$ Parametern $a_1, a_2, \dots, a_n$, von denen die $p$ ersten auf die verschiedenen fundamentalen Einheiten (wie Länge, Masse, Zeit) bezogen sind und die $(n-p)$ übrigen auf abgeleitete Einheiten, eine Relation besteht:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

die unabhängig ist von den Grössen, welche man den fundamentalen Einheiten erteilen kann, alsdann genügen diese $n$ Parameter in gleicher Weise einer Gleichung

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-p}) = 0,$$

die nur $(n-p)$ Parameter enthält, welche eindeutige Functionen von $a_1, a_2, \dots, a_n$ sind $(x_k = a_1^\alpha a_2^\beta \dots a_n)$". Dieser Grundsatz wird namentlich auf die Vorgänge im Telegraphendrahte angewandt. Ist nämlich $v$ die Geschwindigkeit des elektrischen Stromes in einer Leitung, in welcher $\gamma$ die Capacität, $\lambda$ der Coefficient der Selbstinduction für die Längeneinheit, $\varrho$ der Widerstand und $E$ die elektromotorische Kraft ist, so existirt die Gleichung

$$f(v, E, \varrho, \gamma, \lambda) = 0,$$

welche in die andere

$$\varphi(v, E, \varrho, \gamma, v\sqrt{\gamma\lambda}) = 0$$

übergeführt werden kann. Von der letzteren lässt sich zeigen, dass sie sich reducirt auf $\varphi(v\sqrt{\gamma\lambda}) = 0$; aus dieser folgt $v\sqrt{\gamma\lambda} = A = \text{const.}$, also $v = \frac{A}{\sqrt{\gamma\lambda}}$. An diese Formel knüpft Herr Clavenad an, indem er bestreitet, dass die Grösse $v\sqrt{\gamma\lambda}$, deren Dimension Null ist, notwendig in die Function $\varphi$ eintreten müsse. Man könne statt dessen auch $v\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$ setzen, dessen Dimension auch Null ist; im übrigen seien $\gamma$ und

$\varrho$ nicht Grössen, deren Dimensionen von einander unabhängig sind, und die obige Formel von Vaschy ist durch die andere $v = A\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$ zu ersetzen. Herr Vaschy constatirt dagegen in seiner Antwort, dass $v\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$ nicht die Dimension Null hat, es sei denn, dass man eine willkürliche Annahme macht, nämlich die, das elektrostatische System der Einheiten zu adoptiren. Ferner seien $\gamma$ und $\varrho$ ebenso unabhängig von einander wie die Dimensionen Länge und Masse, endlich sei seine Formel $v = \frac{A}{\sqrt{\gamma\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}$ schon längst durch andere Betrachtungen ganz streng aus der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma\varrho\frac{\partial V}{\partial t} + \gamma\lambda\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

welche für die Fortpflanzung des Stromes gilt, abgeleitet worden.

Hae.

A. Vaschy. Examen de la possibilité d'une action réciproque entre un corps électrisé et un aimant. C. R. CXIV. 1474-1476.

Lautet das Coulomb'sche Gesetz $f = k\frac{qq'}{r^2}$ für die Elektrostatik und $f = k'\frac{\mu\mu'}{r^2}$ für den Magnetismus, so würde ein neues zwischen Elektricität und Magnetismus bestehendes Gesetz seinen Ausdruck finden in $f = \sqrt{kk'}\frac{q\mu}{r^2}$, vorausgesetzt, dass die gegenseitige Einwirkung dieser beiden Agentien nur insofern von der Natur des umgebenden Mediums abhängig ist, als $k$ und $k'$ in dieselbe eingehen. Da nun eine derartige Einwirkung niemals beobachtet worden ist, so existirt sie entweder nicht, oder sie hängt von einem neuen Parameter ab, der eine neue physikalische Eigenschaft des Mediums zur Grundlage hat. Bei der Ableitung des obigen Gesetzes stützt sich der Verf. hauptsächlich auf den an der Spitze des vorhergehenden Referates angeführten Satz. Hae.

A. Gray. The theory and practice of absolute measurements in electricity and magnetism. 2 Volumes. London. Macmillan and Co. I: XXXIII + 518 S., $II_1$: XXIII + 346 S., $II_2$: XX + 347-868 S.

Der erste Band ist 1888 erschienen, und die beiden Teile des zweiten Bandes vervollständigen nun das Werk. Dasselbe giebt eine recht vollständige Behandlung des Gegenstandes, über den es handelt, und die Beschreibungen der experimentellen Forschungen sind gewöhnlich klar und eingehend genug, um dem Leser zu wirklichem Nutzen zu gereichen; sie befähigen ihn, das gewählte Verfahren zu verstehen, ebenso die eintretenden Schwierigkeiten, die Methode zu ihrer Ueberwindung und das praktische Ergebnis. Da ja der endgültige Wert eines Buches dieser Art an der Weise zu prüfen ist, in der es den Bedürfnissen des Experimentators entgegenkommt, so muss man bekennen, dass der Verfasser durchweg mit den neuesten Entwickelungen der elektrischen und magnetischen Wissenschaft in Berührung ist und eine Menge theoretischer und experimenteller Einzelheiten zusammengetragen hat, die sich jedem Arbeiter in dem Felde der Elektricität und des Magnetismus von bleibendem Vorteil erweisen werden. Doch scheint es für das Jahrbuch nicht recht passend, in eine weitere Prüfung des Inhaltes einzugehen, und wir schliessen mit einer warmen Empfehlung des Werkes eines Verfassers, der auf dem von ihm bearbeiteten Gebiete ein sachkundiger Gewährsmann ist. Gbs. (Lp.)

---

O. J. Lodge, O. Heaviside. The position of $4\pi$ in electromagnetic units. Nature XLVI. 292-293.

Erörterungen über die Frage, auf welche Weise das Vorkommen des Factors $4\pi$ in den elektrischen Einheiten zu beseitigen sei; beide Gelehrte erklären es für irrationell, diesen Factor bei Festsetzung der elektrischen Einheiten eingeführt zu haben.

Lp.

---

S. P. Thompson. On modes of representing electromotive forces and currents in diagrams. Nature XLV. 478-479.

Vorschläge zur graphischen Bezeichnung der betreffenden Grössen in Abbildungen; ein Vortrag in der Londoner Physikalischen Gesellschaft, nach welchem eine Discussion stattfand unter Beteiligung der Herren Blakesley, Swinburne, Perry, Ayrton.

Lp.

---

H. von Helmholtz. Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. Berl. Ber. 1892. 459-475, Wiedemann Ann. XLVII. 1-26.

Aus dem Minimalprincip werden die Maxwell'schen Gleichungen, so wie sie Hertz abgeleitet hat, entwickelt. Die zweite Abhandlung ist mehrfach durch Zusätze erweitert. Hae.

---

C. Neumann. Analogien zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik. Leipz. Ber. XLIV. 86-105.

Der Aufsatz handelt von jenen merkwürdigen, von Kirchhoff im Jahre 1869 entdeckten Analogien (Bewegung zweier Ringe in einer Flüssigkeit), die später von Boltzmann und Riecke von neuem in Betracht gezogen sind. Der Verf. gelangt durch seine Untersuchungen zu der Ansicht, dass diese Analogien keine tieferen Gründe haben, dass sie nicht etwa für einen noch weiter zu erforschenden gemeinschaftlichen Boden jener beiden Disciplinen (der Hydrodynamik und der Elektrodynamik) sprechen. Das Hauptargument des Verf. für diese seine Ansicht besteht darin, dass man ganz willkürlich gegebene Kräfte (falls nur dieselben stetig sind) elektrodynamisch darzustellen vermag, d. h., dass man stets gewisse teils elektrische, teils magnetische Ursachen zu construiren vermag, welche auf den sollicitirten Punkt $(x, y, z)$, falls derselbe als ein Magnetpol gedacht wird, genau in derselben Weise einwirken würden wie jene ganz willkürlich gegebenen Kräfte. Der betreffende Satz des Verf. lautet, falls man die Componenten jener willkürlich gegebenen Kräfte mit $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ bezeichnet, folgendermassen:

Es sei $\mathfrak{R}$ ein endlicher Raum, begrenzt von einer äusseren und beliebig vielen inneren Oberflächen. Ferner seien $u$, $v$, $w$

drei willkürlich gegebene Functionen von $x$, $y$, $z$, die jedoch samt ihren Ableitungen im Raume $\mathfrak{R}$ stetig sein sollen.

Sind nun $u_1$, $v_1$, $w_1$ die Werte von $u$, $v$, $w$ in irgend einem innerhalb $\mathfrak{R}$ gelegenen Punkte $(x_1, y_1, z_1)$, so wird man die Producte $4\pi u_1$, $4\pi v_1$, $4\pi w_1$ stets auffassen können als die rechtwinkligen Componenten derjenigen Gesamtwirkung, welche von gewissen, teils magnetischen, teils elektrischen Ursachen auf den Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ ausgeübt werden würde, falls derselbe ein Magnetpol von der magnetischen Masse Eins wäre. Und zwar bestehen jene Ursachen:

erstens aus einer magnetischen Materie, die teils über die Oberflächen des Raumes $\mathfrak{R}$, teils über diesen Raum selbst ausgebreitet zu denken ist, resp. mit den Dichtigkeiten:

$$(1) \qquad \mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w \text{ (Flächendichtigkeit)},$$

und:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \text{ (räumliche Dichtigkeit)},$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Richtungscosinus der in dem betreffenden Oberflächenpunkte errichteten, in den Raum $\mathfrak{R}$ hinein laufenden Normale vorstellen;

und zweitens aus einem stationären elektrischen Stromsystem, welches teils über die Oberflächen des Raumes $\mathfrak{R}$, teils über diesen Raum selbst ausgebreitet zu denken ist, resp. mit den Strömungscomponenten:

$$(3) \qquad \mathfrak{B}w - \mathfrak{C}v, \quad \mathfrak{C}u - \mathfrak{A}w, \quad \mathfrak{A}v - \mathfrak{B}u,$$

und:

$$(4) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die schon genannten Bedeutungen haben.

Die Ausdrücke (3) bedürfen wohl noch einer weiteren Erläuterung. Sie beziehen sich auf jene flächenhaften Strömungen, die unmittelbar auf den Oberflächen selbst zu denken sind. Man construire auf einer solchen Oberfläche an beliebiger Stelle ein Linienelement $ds$, senkrecht gegen die dortige elektrische Strömungscurve, und bezeichne die in der Zeiteinheit durch $ds$ hindurchgehende Elektricitätsmenge mit $jds$. Alsdann repräsentirt der Factor $j$ die sogenannte Strömungsstärke an jener Stelle. Gleich-

zeitig aber mag unter $j$ auch die Richtung dieser Strömung (d. i. die Richtung jener Strömungscurve, gegen welche $ds$ senkrecht steht) verstanden werden. Alsdann wird diese Strömung $j$ geometrisch darstellbar sein als eine Linie von bestimmter Länge und Richtung. Und die rechtwinkligen Componenten dieser Linie oder Strömung $j$ sind es, welche jene in (3) angegebenen Werte besitzen sollen.

Die Ausdrücke (4), welche sich auf die in irgend einem Punkte $(x, y, z)$ des Raumes $\mathfrak{R}$ anzunehmende räumliche Strömung beziehen, sind von analoger Bedeutung. Um ihre Bedeutung näher darzulegen, würde man in jenem Punkte $(x, y, z)$ ein Flächenelement $do$ zu construiren haben, senkrecht gegen die durch jenen Punkt gehende Strömungscurve, u. s. w.

Es sei noch bemerkt, dass der Verf. in seinem Aufsatz den so eben besprochenen Satz, so wie auch mehrere andere Sätze, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann, nur historisch angegeben hat, ohne Angabe der Beweise. N.

---

R. L. Heppisley. On current curves. Lond. R. S. Proc. LI. 255-266, Nature XLVI. 187-188.

Auszug aus einer Abhandlung, die wahrscheinlich in den Phil. Trans. erscheinen wird. Der Gegenstand betrifft den Nachweis, wie Ausdrücke zu bestimmen sind für die Ströme in Kreisen, die eiserne Windungen haben, ähnlich den wohlbekannten für Stromkreise ohne Eisen; mit Hülfe derselben soll es ermöglicht werden, die Stromcurven durch Rechnung vorauszubestimmen und zu entwerfen, unabhängig von dem Experimente. Cly. (Lp.)

---

E. Beltrami. Considerazioni sulla teoria matematica dell' elettromagnetismo. Bologna Mem. (5) II. 313-378.

Darstellung der Maxwell'schen Theorie (Teil IV des Treatise) und Discussion einiger sich daran knüpfenden Fragen.

Hae.

A. McAulay. On the mathematical theory of electromagnetism. Lond. R. S. Phil. Trans. CLXXXIII. 685-779.

Der Auszug des Verfassers aus dieser ausführlichen Schrift befindet sich in Lond. R. S. Proc. LI. 400-404.

Cly. (Lp.)

---

Robert Lang. Das Ohm'sche Gesetz als Grundgesetz des Elektromagnetismus. Pr. (Nr. 584) Karlsgymn. Heilbronn. 30 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Es handelt sich um ein dem Ohm'schen Gesetz ähnliches über die Verteilung der magnetischen Kraftlinien.

Führt man in die Inductionsgleichung

$$(1) \qquad B = \mu H$$

an Stelle von $H$ das Linienintegral

$$\Omega = \int H dl$$

der localen magnetischen Kraft oder die magnetomotorische Kraft ein, so entsteht

$$(1a) \qquad B = \mu' \Omega,$$

wo

$$\mu' = \frac{\mu}{l}.$$

Diese Gleichung (1a) entspricht genau dem Ohm'schen Gesetz:

$$(2) \qquad K = C.E.$$

Ist $N$ die magnetische Stromstärke, so ist

$$N = \frac{\Omega}{w},$$

wo $w$ der magnetische Widerstand ist.

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen und Voraussetzungen, so z. B. dass $H$ sich ausschliesslich oberhalb des kritischen Wertes bewegt, wird gezeigt, dass für irgend einen magnetischen Kreis die Gleichung gilt:

$$N = \frac{\Omega}{a + b\Omega}, \text{ bez. } B = \frac{\Omega}{m + n\Omega};$$

dies ist die allgemeine Form des magnetischen Ohm'schen Gesetzes.

Der Verfasser berechnet nun den magnetischen Luftwiderstand von geraden, cylindrischen Elektromagneten, und zwar sowohl den der seitlichen als den der ebenen Endflächen, vorausgesetzt dass die Länge der Stäbe die Dicke derselben 2,2- bis 31-mal übertrifft.

Von dem Dub'schen Durchmessersatz: „Die Momente von cylindrischen Stäben, welche gleichen magnetisirenden Kräften ausgesetzt werden, sind den Quadratwurzeln ihrer Durchmesser proportional“, und dem Dub'schen Längensatz: „Bei geraden Elektromagneten und Festhaltung der schwachen magnetomotorischen Kraft ist das Moment der $\frac{3}{2}$ten Potenz der Länge proportional“, wird gezeigt, dass beide Sätze auf allgemeine Gültigkeit keinen Anspruch erheben können, der erstere z. B. nur richtig ist, wenn die Länge das 17-fache des Durchmessers ist, in welchen Grenzen auch der zweite gilt. Zum Schluss wird die gefundene Ohm'sche Formel auf die Lösung zweier von v. Waltenhofen zuerst in Angriff genommenen praktischen Aufgaben angewandt; das Resultat ist angenähert dasselbe, welches v. Waltenhofen aus einer empirischen Formel abgeleitet hat. Hae.

---

E. Garnault. Note relative à l'action d'un courant sur une aiguille aimantée. Almeida J. (3) I. 245-251.

Es handelt sich um die beiden Sätze: 1. Wenn ein Strom durch eine frei aufgehängte magnetisirte Nadel geht, die sich in einer Horizontalebene im Kreise drehen kann, so verlässt die Nadel nicht den magnetischen Meridian. 2. Wenn ein geradliniger unendlich langer Strom im magnetischen Meridian einer horizontalen Magnetnadel sich nähert, indem er zu sich selbst parallel bleibt, so weicht die Nadel nach den Ampère'schen Gesetzen ab; aber die Ablenkung, welche Null ist bei der Berührung mit der Nadel oder bei grossem Abstande, erreicht einen grössten Wert für eine bestimmte Entfernung, die mit dem Magnetismus der Nadel und der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus variabel ist. Beide Sätze werden experimentell und rechnerisch geprüft. Lp.

---

Franz Neumann. Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme (1847). Hrsg. von C. Neumann. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 36.) Leipzig. W. Engelmann. 96 S. 8°. Mit 10 Fig. im Text.

Auf den ersten 71 Seiten ist die obige Abhandlung aus den

Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1848 wieder abgedruckt; es folgt der am so eben genannten Orte ebenfalls vorhandene Anhang: „Ueber den Wert des Potentials zweier geschlossenen elektrischen Ströme in Bezug auf einander" auf S. 72-78, dem nun die von Herrn C. Neumann verfassten Anmerkungen auf S. 79-96 sich anschliessen. Diese letzteren zerfallen in fünf Abteilungen. Was erstens das Ampère'sche Gesetz betrifft, so verweist der Herausgeber auf seine Erörterung desselben auf S. 91-93 der Anmerkungen zu der ersten F. Neumann'schen Abhandlung über inducirte elektrische Ströme (Nr. 10 von Ostwald's Klassikern. Vergl. F. d. M. XXII. 1890. 1154). Die zweite Note handelt über das F. Neumann'sche Potentialgesetz; die im Anhang des Originals gegebene Ableitung wird vereinfacht, indem Hr. C. Neumann gleichzeitig das Gesetz verallgemeinert, so dass es auch dann noch gilt, wenn die beiden Stromringe Gleitstellen besitzen. Die dritte kurze Notiz giebt den Wortlaut des Ohm'schen Gesetzes. Die vierte Note macht darauf aufmerksam, dass das F. Neumann'sche Elementargesetz der inducirten Ströme an verschiedenen Stellen der beiden Abhandlungen (Klassiker Nr. 10 u. 36), aber an jeder solchen Stelle nur teilweise angegeben ist. Dieses Elementargesetz lautet vollständig:

$$\eta d\sigma ds dt = -\varepsilon j d\sigma ds\left(4\,\frac{d^2\sqrt{r}}{d\sigma ds}\,\frac{d\sqrt{r}}{dt}\right)dt - \varepsilon\,\frac{d\sigma ds}{2}\,\psi\,\frac{dj}{dt}\,dt,$$

wo

$$\psi = \frac{\cos(d\sigma ds)}{r}$$

oder

$$\psi = \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta'}{r},$$

ohne dass F. Neumann eine bestimmte Entscheidung zu Gunsten des einen oder des anderen Wertes gegeben hätte. An diesen vollständigen Ausdruck des Elementargesetzes knüpft die fünfte Abteilung an, indem sie eine kürzere Ableitung des F. Neumann'schen Principes giebt, das ja den Hauptgegenstand des Buches bildet, und namentlich auf die Verschiedenheit hinweist, je nachdem der Inducent frei von Gleitstellen ist oder solche besitzt.

Im Zusammenhang hiermit wird ein F. Neumann'sches Experiment besprochen. Bemerkungen über die Bezeichnung beschliessen die Anmerkungen. Hae.

---

C. NEUMANN. Einfacher Beweis eines F. Neumann'schen Satzes. Deutsche Math. Ver. I. 26-32.

In F. Neumann's Vorlesungen über elektrische Ströme, Leipzig 1884, S. 178-179, findet sich eine recht mühsame Lösung der Aufgabe vor: „Einen gegebenen magnetischen Körper in seiner Einwirkung auf äussere Magnetpole durch ein System elektrischer Ströme, die sich im Innern und an der Oberfläche des Magneten befinden, zu ersetzen." C. Neumann giebt eine einfachere Ableitung derselben. Vorausgeschickt wird eine Umgestaltung des Biot-Savart'schen Gesetzes. Gehört nämlich das Element $Ids$ $(x, y, z)$ einem geschlossenen Strome an, so wird das Potential dieses Elementes auf einen Magnetpol $(x_1, y_1, z_1)$ von der magnetischen Masse $A$ den Wert haben: $p_1 = AI(fdx+gdy+hdz)$, wo $dx$, $dy$, $dz$ die Componenten von $ds$ darstellen. Dabei sind unter $f$, $g$, $h$ Ausdrücke zu verstehen, die von den drei Argumenten $\xi = x-x_1$, $\eta = y-y_1$, $\zeta = z-z_1$ abhängen und ausserdem den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}$$

Genüge leisten, wo

$$r^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2.$$

Derartige Functionen $f$, $g$, $h$ existiren unendlich viele, so z. B. folgende:

$$f=0, \qquad g=-\frac{\xi\zeta}{(\eta^2+\zeta^2)r}, \qquad h=\frac{\xi\eta}{(\eta^2+\zeta^2)r};$$
$$f=\frac{\eta\zeta}{(\zeta^2+\xi^2)r}, \qquad g=0, \qquad h=-\frac{\eta\xi}{(\zeta^2+\xi^2)r};$$
$$f=-\frac{\zeta\eta}{(\xi^2+\eta^2)r}, \qquad g=\frac{\zeta\xi}{(\xi^2+\eta^2)r}, \qquad h=0.$$

Nimmt man statt des bisher betrachteten linearen Stromelementes irgend ein körperliches vom Volumen $d\tau$ und mit den Strömungscomponenten $u$, $v$, $w$, so ist $p_1=A(fu+gv+hw)d\tau$. Aehnlich ergiebt sich für ein flächenhaftes Stromelement von der Grösse $d\sigma$ und den Flächenströmungen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$: $p_1=A(f\bar{u}+g\bar{v}+h\bar{w})d\sigma$.

Nach diesen Vorbereitungen wird das Potential des gegebenen Magneten auf einen äusseren Magnetpol $(x_1, y_1, z_1)$ berechnet. Dasselbe ist gegeben durch

$$(1) \qquad \Omega=\int\left(a\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+b\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumenelemente $d\tau$ des Magneten; $a$, $b$, $c$ sind gegebene Functionen von $x$, $y$, $z$ und stellen die magnetischen Momente im Punkte $x$, $y$, $z$ vor, wo $d\tau$ sich befindet. Bedeuten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Richtungscosinus der auf $d\sigma$ errichteten inneren Normale, führt man ferner sechs neue Functionen ein:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} A\bar{u}=c\beta-b\gamma, & Au=\dfrac{\partial c}{\partial y}-\dfrac{\partial b}{\partial z}, \\ A\bar{v}=a\gamma-c\alpha, & Av=\dfrac{\partial a}{\partial z}-\dfrac{\partial c}{\partial x}, \\ A\bar{w}=b\alpha-a\beta, & Aw=\dfrac{\partial b}{\partial x}-\dfrac{\partial a}{\partial y}, \end{cases}$$

so lässt sich (1) überführen in

$$(2) \qquad \Omega=A\int(f\bar{u}+g\bar{v}+h\bar{w})d\sigma+A\int(fu+gv+hw)d\tau.$$

Der Verf. zeigt nun, dass die Gleichungen (I) dasjenige Stromsystem repräsentiren, welches den gegebenen Magneten, was seine Einwirkung auf äussere Magnetpole betrifft, zu ersetzen im Stande ist. — Einem Einwande, der auf Grund des Ampère'schen Gesetzes gegen die Lösung erhoben werden könnte, wonach die von einem

Stromelement auf einen Magnetpol oder Solenoïdpol ausgeübte Kraft nicht bloss die aus (2) sich ergebenden Componenten $X$, $Y$, $Z$, sondern noch zweitens ein den Pol erfassendes Drehungsmoment $\Delta$ besitzt, begegnet Hr. C. Neumann dadurch, dass er die vom Stromsystem $u$, $v$, $w$, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ auf jenen Pol ausgeübten Drehungsmomente berechnet und dann zeigt, dass dieselben zusammengenommen ein Drehungsmoment ergeben, das gleich Null ist. Hae.

---

L. Boltzmann. Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Elektromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen. Teil I. Münch. Ber. XXII. 279-301.

Mit „Aether“ werde ein feiner, mit Masse und Trägheit, aber nicht mit Gewicht, begabter Stoff bezeichnet, der alle Körper, auch das Vacuum, durchdringt. Er sei ein Continuum, ganz wie G. Kirchhoff die ponderable Materie auffasst; vorläufig herrsche auch in ihm Isotropie. Dort, wo keine elektromotorischen Kräfte thätig sind, soll er wie eine incompressible Flüssigkeit strömen, wozu aber noch zwei Eigenschaften hinzukommen: 1) er erfahre überall, auch im Vacuum, einen Widerstand, proportional der Geschwindigkeit an dieser Stelle und der letzteren entgegengesetzt gerichtet; die dabei geleistete Arbeit soll in Joule'sche Wärme verwandelt werden; 2) es soll im W. Thomson'schen Sinne an jeder Stelle ein Drehmoment auf das daselbst befindliche Volumenelement des Aethers wirken, welches der gesamten Verdrehung desselben proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Setzen wir nun voraus, dass die ponderable Materie ruhe, und bezeichnen wir mit $F$, $G$, $H$ die Verschiebungen, mit $\varphi$, $\chi$, $\psi$ die Geschwindigkeitscomponenten irgend eines Aetherteilchens mit den Coordinaten $x$, $y$, $z$ zur Zeit $t$ in Richtung der Coordinatenaxen, so sind die doppelten Drehungen eines daselbst befindlichen Volumenelements $d\tau$, auf welches beliebige Kräfte mit den Componenten $Xd\tau$, $Yd\tau$, $Zd\tau$ wirken können:

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Um die Bewegungsgleichungen des Aethers zu erhalten, wird die Gleichung für die lebendige Kraft aufgestellt, aus der sich die bekannten Maxwell'schen Gleichungen:

$$4\pi u = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{\mu}\right),$$
$$4\pi v = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\mu}\right),$$
$$4\pi w = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{\mu}\right)$$

ergeben. Es sei angemerkt, dass die Definitionsgleichungen (10) der Abhandlung lauten müssen:

$$p = -C\frac{dF}{dt} - X, \quad q = -C\frac{dG}{dt} - Y, \quad r = -C\frac{dH}{dt} - Z;$$

die $X$, $Y$, $Z$ sind dort nämlich fortgelassen.

Weiter wird gezeigt, dass dasselbe Resultat auch direct nach einer schon von W. Thomson angewandten Methode gewonnen werden kann, indem der Ausdruck für die Energie des Aethers aufgestellt wird. Dabei werden freilich dem Aether, der anfangs als incompressible Flüssigkeit vorausgesetzt war, neue Eigenschaften beigelegt, nämlich die einer festen Substanz; er müsste sich also gewissen Kräften gegenüber wie ein fester, gegen andere wie ein flüssiger Körper verhalten. Analogien dafür sind vorhanden, man denke im besonderen an Tresca's Versuche über den Ausfluss fester Körper, die mit grossem Drucke durch Oeffnungen gepresst werden. Aber es fragt sich, ob diese Hypothese nicht in quantitativer Beziehung auf Widersprüche stösst. Eine eingehende Untersuchung lehrt, dass dies nicht der Fall ist, freilich nur unter gewissen Einschränkungen. Zum Schluss wird die Aetherbewegung in einem unendlich langen geraden Kreiscylinder betrachtet, der von einem positiven elektrischen Strome seiner Länge nach durchflossen wird. Hae.

---

L. Boltzmann. Ueber ein mechanisches Modell zur Versinnlichung der Anwendung der Lagrange'schen Bewegungsgleichungen in der Wärme- und Elektricitätslehre. Deutsche Math. Ver. I. 53-55.

Kurzer Auszug aus einem Vortrage zur Erläuterung eines vom Mechaniker Gasteiger in Graz nach den Angaben des Verfassers verfertigten Modelles. Bezüglich weiterer Einzelheiten wird am Schlusse verwiesen auf: Boltzmann, „Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes“ (F. d. M. XXIII. 1891. 1110). Lp.

---

G. Helm. Die Fortpflanzung der Energie durch den Aether. Wiedemann Ann. XLVII. 743-751.

Der Verfasser zeigt, dass an Stelle der Hertz'schen Gleichungen die Bewegungsgleichungen eines isotropen elastischen Mediums treten können, falls auf dasselbe folgende äussere Kräfte wirken: 1) an vereinzelten Stellen die den elektromotorischen Kräften proportionalen $X_0$, $Y_0$, $Z_0$; 2) in allen Volumenelementen die wesentlich vom elektrostatischen Potential abhängigen Kräfte $X_1$, $Y_1$, $Z_1$; 3) in allen als Leiter bezeichneten Raumgebieten noch reibungsartige Kräfte $-k\frac{\partial u}{\partial t}$, $-k\frac{\partial v}{\partial t}$, $-k\frac{\partial w}{\partial t}$. Nach Einführung dieser Kräfte nehmen die elastischen Gleichungen folgende Form an:

$$\varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varkappa c^2 \Delta u + \varkappa(C^2-c^2)\frac{\partial\sigma}{\partial x} - k\frac{\partial u}{\partial t} + X_0 + X_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$\sigma$ bezeichnet die räumliche Dilatation.

Führt man nun neue Vectoren $L$, $M$, $N$, $X$, $Y$, $Z$ durch die Gleichungen ein:

$$a\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = A\mu\left(L + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b\frac{\partial u}{\partial t} = A\varepsilon\left(X + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$b\frac{1}{\varkappa}X_0 = 4\pi\lambda A X',$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{k}{\varkappa}\varepsilon = 4\pi\lambda,$$

und trifft man über die $\varphi$, $\psi$ zweckmässige Verfügungen, so erhält man für $L$, $M$, $N$, $X$, $Y$, $Z$ genau die Hertz'schen Gleichungen. Hiernach können die als elektrische und magnetische Kraft bezeichneten Vectoren bezw. durch Geschwindigkeit und Verwindung ersetzt werden, womit die Auffassung elektrischer und magnetischer Vorgänge wesentlich vereinfacht wird.

Aus den Grundgleichungen werden dann noch als Beispiel der Anwendung der neuen Auffassung die Gleichungen der elektrischen Induction abgeleitet. Sodann folgen Erörterungen über die absorbirenden Kräfte $-k\frac{\partial u}{\partial t}+X_0+X_1$, welche der Wechselwirkung zwischen den ponderablen Molekeln und dem elastischen Mittel zugeschrieben werden.

Der Verfasser bemerkt selbst, dass die von ihm gegebene Umdeutung der elektrischen und magnetischen Vectoren in Geschwindigkeits- und Verschiebungsgrössen eines den Raum stetig erfüllenden Mittels nicht die einzig mögliche ist. Wn.

---

A. Sommerfeld. Mechanische Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern.
Wiedemann Ann. XLVI. 139-151.

Der Verfasser geht in seiner Darstellung von der W. Thomson'schen Hypothese des quasi-elastischen Mediums aus, bei dem nicht die Dilatationen, sondern die Drehungscomponenten für die Druckcomponenten des Mediums bestimmend sind. Der Aether sei also ein incompressibler Stoff, welcher Quasi-Starrheit besitzt, d. h. zur Rotation eines Volumenelementes des Aethers ist eine Kraft erforderlich, welche dem Drehungswinkel proportional ist. Sonstigen Bewegungen und Formveränderungen gegenüber verhält sich der Aether wie eine reibungslose Flüssigkeit. Während nun Lord Kelvin die Drehungscomponenten den magnetischen Kräften zuordnet, setzt sie der Verf. der elektrischen Kraft proportional. Ausser den Rotations- werden auch Translationsbewegungen des Aethers betrachtet. Dadurch gelangt man zu einem Systeme von

Gleichungen, das mit dem von Hertz für die elektromagnetischen Erscheinungen in Nichtleitern aufgestellten übereinstimmt.

Die Hypothese von Sir W. Thomson wird weiter gleichsam ergänzt durch die folgende. Der Aether bewegt sich wie eine incompressible Flüssigkeit, welche Quasi-Viscosität besitzt, d. h. der Rotation eines Volumenelementes wirkt eine Kraft entgegen, welche proportional der Drehungsgeschwindigkeit ist. Dies führt zu einem Gleichungssystem, das mit den Gleichungen von Hertz für einen vollkommenen, also dielektrisch nicht polarisirbaren Leiter identisch ist. Der Aether verhält sich also im Leiter ähnlich wie eine reibende Flüssigkeit, im Nichtleiter ähnlich wie ein fester Körper. Es folgen die Bewegungsgleichungen in Halbleitern, die als eine Vereinigung der Eigenschaften von Leiter und Nichtleiter erklärt werden; diese beiden Zustände des Aethers sollen aber unvermittelt in einander übergehen, auch soll die Dichtigkeit des Aethers überall dieselbe sein. — Es wird gezeigt, dass die Gleichungen den Bedingungen: „Wahren Magnetismus kann es nicht geben“, und „Wahre Elektricität tritt nur als Flächenbelegung auf“ (Hertz), genügen. Zum Schluss sei noch hervorgehoben, dass den elektrischen Verschiebungen Maxwell's bei Hrn. Sommerfeld diejenige Drehung entspricht, um welche ein Aetherteilchen aus seiner Ruhelage herausbewegt wird. Die Geschwindigkeit, die in Leitern nach der gewöhnlichen Anschauung an Stelle der Verschiebung tritt, ist hier eine Winkelgeschwindigkeit. Fallen aber sonst Verrückung und Geschwindigkeit in die Richtung der Kraft, so stehen sie hier senkrecht zu dieser. Endlich bemerkt der Verf., dass seine Erklärung von der magnetischen Kraft nicht neu ist, sondern für den stationären Zustand im freien Aether bereits von L. Euler aufgestellt worden ist; der Aether befindet sich dann in dem Zustande einer vollkommenen Flüssigkeit bei Existenz eines Geschwindigkeitspotentials. Hae.

---

H. A. Rowland. Notes on the theory of the transformer. Phil. Mag. (5) XXXIV. 54-57.

Es ist notwendig, in der Theorie des Transformators sowohl

auf die Hysteresis als auf die Veränderlichkeit der magnetischen Permeabiliät des Eisens mit der Induction Rücksicht zu nehmen. Ist $p$ die Zahl der Kraftlinien eines Transformators, so wird dieselbe gewöhnlich als $p = Bny$ angenommen, wo $B$ eine Constante, $n$ die Windungszahl der Spirale im primären Kreise, $y$ die Stromstärke bedeuten. Richtiger wäre es:

$$p = Bny + C(ny)^3 + \delta(ny)^5 + \cdots$$

zu setzen, indem nur die ungeraden Potenzen auftreten dürfen, da eine Umkehr des Stromes eine negative Magnetisirung, gleich gross derjenigen bei der ersten Stromrichtung, hervorbringt. Will man noch die Hysteresis einführen, und ist der Strom ein Wechselstrom, so ist $y = c\sin(bt+e)$, wo $t$ die Zeit, $e$ die Phase angiebt, oder noch besser, wenn der Strom keine einfache Sinuscurve ist,

$$y = \sum_i a_i \sin(ibt + e_i)$$

zu setzen, während $p$ gegeben ist durch

$$p = A\cos(bt+e_1) + Bny + C(ny)^3 + \delta(ny)^5 + \cdots.$$

Drei Aufgaben über einen Transformator mit geöffnetem secundären Kreise dienen dazu, die so eben gegebenen Formeln zu erläutern, wobei es sich zeigt, dass die Ströme im Transformator nicht bloss die fundamentale Periode, sondern die höheren ungeraden Oberströme enthalten. Ist der secundäre Kreis geschlossen, so ist $ny$ durch $n_1y_1 + ny$ zu ersetzen, wo der erste Summand sich auf den genannten Strom bezieht. Die Stromgleichungen lauten alsdann:

$$E = Ry + n\frac{dp}{dt},$$

$$0 = R_1y_1 + n_1\frac{dp}{dt}.$$

$R$ = Widerstand, $E$ = E. M. K.

Im besonderen wird darauf hingewiesen, dass alle Formeln, in denen die Selbstinduction durch einen Condensator ausgeglichen wird, nur dann richtig sind, wenn sie auf einen Lufttransformator angewandt werden, nicht aber auf einen solchen von Eisen; also kann man zwei der letzteren mit verschiedener Permeabilität nicht mit einander vergleichen. Hae.

H. A. Rowland. Notes on the theory of the transformer. Johns Hopkins Univ. Circ. XI. 104-105.

Der Verf. skizzirt eine Theorie der magnetischen Induction im Eisen, die über die gewöhnliche Theorie insofern hinausgeht, als die magnetische Permeabilität nicht als constant angesehen wird, sondern als eine Function der magnetisirenden Kraft.

Infolge dessen stellt sich der Ausdruck des elektrischen Stromes nicht mehr als einfache Sinus-Reihe, sondern als eine allgemeine trigonometrische Reihe dar. Freilich wächst dadurch die Schwierigkeit der mathematischen Durchführung beträchtlich. My.

---

E. Carvallo. Sur une similitude dans les fonctions des machines. Almeida J. (3) I. 209-212.

Beweis des folgenden Satzes betreffs zweier Dynamomaschinen: Wenn die charakteristische Gleichung einer Function bei einem Typus von Maschinen nicht mehr als drei charakteristische Constanten enthält, so ergeben sich die Curven der verschiedenen Maschinen dieses Typus aus einander durch blosse Vertauschung des Massstabes der Coordinaten. Hierbei ist es nötig, dass die Masse der drei charakteristischen Constanten unter einander unabhängige Functionen der drei fundamentalen Einheiten sind.

Lp.

---

G. Grassi. Sulla resistenza magnetica delle derivazioni nell'aria e su di un metodo atto a misurarla nelle dinamo. Napoli Rend. (2) VI. 67-70.

Es soll gezeigt werden, wie man den magnetischen Widerstand des von der Luft eingenommenen Raumes als Function der Elemente einer Dynamomaschine bestimmen kann, ohne in die Rechnung alle übrigen magnetischen Widerstände einzuführen. Dieser Widerstand ist

$$R'' = \frac{4\pi n i N}{\beta a r},$$

wo $i$ die Stromstärke der Inductionsspirale, $n$ die Anzahl ihrer

Windungen, $\beta$ die ballistische Constante eines bei der Versuchsanordnung gebrauchten Galvanometers, $\alpha$ dessen beobachtete Ablenkung, $r$ dessen Widerstand, vermehrt um den einer eingeschalteten Inductionsspirale mit der Windungszahl $N$, bedeuten.

Hae.

---

D. Korda. Théorie d'un condensateur intercalé dans le circuit secondaire d'un transformateur. C. R. CXV. 331-334, 411-413.

Wenn man in den Stromkreis eines Wechselstromes einen Transformator einschaltet, dessen secundärer Kreis einen Condensator enthält, so stellen die folgenden Gleichungen die Vorgänge in dem System dar:

$$E_0 \sin\omega t - L\frac{di}{dt} - M\frac{di'}{dt} - Ri = 0,$$

$$M\frac{di}{dt} + l\frac{di'}{dt} + e + ri = 0,$$

$$k\frac{de}{dt} - i' = 0.$$

Aus diesen ergiebt sich für $i$ die Differentialgleichung:

$$(Ll - M^2)\frac{d^3 i}{dt^3} + (Rl + rL)\frac{d^2 i}{dt^2}$$

$$+ \left(Rr + \frac{L}{K}\right)\frac{di}{dt} + \frac{R}{K}i = E_0\left(r\omega\cos\omega t - \frac{Kl\omega^2 - 1}{K}\sin\omega t\right),$$

deren Integral von der Form ist:

$$i = ae^{-\delta_1 t} + be^{-\delta_2 t} + ce^{-\delta_3 t} + I,$$

wo $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$(Ll - M^2)\delta^3 - (Rl + rL)\delta^2 + \left(Rr + \frac{L}{K}\right)\delta - \frac{R}{K} = 0$$

sind. Die weiter entwickelten complicirten Formeln für $\varrho = \frac{E}{I}$ und $K$ können hier nicht niedergeschrieben werden. Hae.

---

H. Poincaré. Sur la propagation des oscillations hertziennes.
C. R. CXIV. 1046-1048.

H. Poincaré. Sur la propagation des oscillations électriques.
C. R. CXIV. 1229-1233.

Die Hertz'schen Schwingungen unterliegen bekanntlich einer sehr schnellen Dämpfung; infolge dessen genügt die von Hertz gegebene Theorie über die Fortpflanzung derselben längs eines Drahtes nicht den aus der Erfahrung gewonnenen Resultaten. Hr. Poincaré entwickelt in der ersten Note aus der Hertz'schen Function die magnetische Kraft und die beiden elektrischen Componenten senkrecht und parallel einem unendlich dünnen Leiter, findet aber, dass die Ausdrücke keine Auskunft geben über die Dämpfung der Schwingungen. Daher berücksichtigt er in der zweiten Note auch die Dicke des Drahtes, indem er sich denselben als einen unendlich langen Kreiscylinder vom Durchmesser $\varrho_0$ vorstellt. Es wird nun namentlich die totale Energie $E$ berechnet und gezeigt, dass dieselbe von $\log\varrho_0$ abhängig ist, also für ein unendlich kleines $\varrho_0$ eine unendlich grosse Zahl wird. Aber $\frac{dE}{dt}$ ist endlich, wenn $\varrho_0$ sehr klein ist. Damit nun das Gesetz von der Erhaltung der Energie statt hat, müsste $\frac{dE}{dt}=0$ sein. Da dies hier nicht der Fall ist, so müssen die Schwingungen nach und nach erlöschen. Die Schwierigkeit des Gegenstandes gestattet dem Verf. eine weitere Entwickelung der Ausdrücke nicht; er hofft, dass eine Experimentaluntersuchung in der Richtung, ob die Dämpfung von dem Durchmesser des Drahtes abhängig ist, die Consequenzen seiner Theorie bestätigen wird. Hae.

---

E. Salvioni. Sulla condizione che determina la posizione del primo nodo nelle onde elettriche studiate da Lecher.
Rom. Acc. L. Rend. (5) I₁. 206-214.

Indem Cohn und Heerwagen von den Fundamentalgleichungen der Elektrodynamik ausgingen, die schon Hertz für den Raum, der einen langen Draht umgiebt, aufgestellt hatte, gelang es ihnen,

für die Wellenlänge $\lambda$ in einer Lecher'schen Drahtcombination die Formel abzuleiten:

$$(1) \qquad 8\pi C \log \frac{b}{a} = \frac{\lambda}{\operatorname{tg} \frac{2\pi z'}{\lambda}};$$

darin ist $z'$ der Abstand zwischen dem letzten Knoten und dem Ende des Drahtes, $C$ die Capacität eines Condensators am Ende, $a$ der Radius der Drähte, $b$ der Abstand der beiden parallelen Drähte. Sie haben diese Formel experimentell geprüft und für den Anfang der Drahtcombination auch richtig gefunden. Aber diese Uebereinstimmung war nur eine zufällige, und ihre Annahme, dass die Condensatoren das Ende der Schwingung bilden, trifft nicht immer zu. Der Verf. untersucht daher noch einmal die Lecher'sche Combination. Sei $z$ der Abstand des Knotens, bez. der Brücke von den secundären Scheiben der beiden Condensatoren, $x$ der Abstand zwischen dem Primärfunken und den primären Scheiben der Condensatoren, so leitet er die Formel ab:

$$(2) \qquad 8\pi C \log \frac{b}{a} = \lambda \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left[\frac{\pi(z-x)}{\lambda}\right]}{\operatorname{tg} \frac{\pi(z+x)}{\lambda}},$$

die, wenn man $C$ bei Cohn und Heerwagen gleich $C'$ setzt, auch so geschrieben werden kann:

$$(3) \qquad C = C' \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi(z-x)}{\lambda}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi(z+x)}{\lambda}}.$$

Das $C$, das sich so ergiebt, ist in ziemlicher Uebereinstimmung mit der elektrostatischen Capacität, die sich aus der Kirchhoff'schen Formel (Ges. Abhandl. S. 112) ergiebt. Hae.

---

E. Salvioni. Come, per l'aggiunta di una capacità, si spostino i nodi delle onde elettriche stazionarie, nei fili conduttori. Rom. Acc. L. Rend. (5) $I_1$. 250-253.

Es handelt sich darum, den verschiedenen Einfluss zu studiren,

den eine bestimmte Capacität auf die Schwingungsdauer ausübt, und zwar je nach dem Orte, wo sie zwischen den beiden Drähten einer Lecher'schen Combination eingeschaltet wird. Am Ende der letzteren befinde sich ein Condensator, dessen Capacität bei fester Brücke so lange verändert wird, bis Resonanz eintritt. Jetzt wird zwischen Brücke und Endcondensator ein kleiner Condensator von der Capacität $C''$ eingeschaltet. Die Wirkung desselben ist um so grösser, je näher er sich dem Ende befindet. Es muss also, um wieder Resonanz herzustellen, die Endcapacität $C$ um $C'$ vermindert werden.

Indem man nun dieselben Betrachtungen anstellt, wie im vorhergehenden Referat, gelangt man zu der Gleichung:

$$8\pi\log\frac{b}{a}\left\{C''\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}+(C-C')\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}\right\}=\lambda\sin\frac{4\pi l}{\lambda},$$

wo $l$ die vom Knoten an gerechnete Länge des Drahtes bedeutet. Aus derselben wird gefolgert, dass bei constantem $\lambda$ auch

$$\frac{C'}{\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda}}=\text{constans}$$

ist. Sind daher $\gamma$ und $\gamma_1$ zwei Capacitäten und $x$ und $x_1$ die zugehörigen Entfernungen vom Knoten, so ist

$$\gamma\sin^2\frac{2\pi x_1}{\lambda}=\gamma_1\sin^2\frac{2\pi x}{\lambda},$$

und man hat daher in der Veränderung der Capacität des Endcondensators ein Mittel, die Beziehung $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ unter verschiedenen Bedingungen zu studiren. Hae.

---

A. Rosén. Sur la théorie des oscillations électriques.
Acta Univ. Lund. XXVIII. 42 S.

Die älteren Formeln für die Wirkungen elektrischer Ströme können durch die Annahme, dass die eingehenden Potentiale sich mit einer gewissen Geschwindigkeit fortpflanzen, so modificirt werden, dass sie mit den Formeln der Maxwell'schen Theorie übereinstimmen, wenigstens wenn man mit vollkommenen Leitern zu thun

hat, welche von einem einzigen vollkommenen Isolator umgeben sind. Nachdem der Verf. dies gezeigt hat (vergl. Lorenz, Poggendorf Ann. CXXXI. 1867), leitet er Ausdrücke her für die Dichtigkeit einer Elektricitätsschicht und für die Intensitäten in einem System von Strömen, welche, über eine geschlossene Fläche ausgebreitet, ausserhalb dieser Fläche dieselbe Wirkung ausüben, wie ein gegebenes, innerhalb der Fläche befindliches System von Elektricität und von Strömen, welche aber innerhalb der Fläche keine Wirkung haben. Nachher werden die Ströme bestimmt, welche ein veränderlicher Strom in einer ebenen, leitenden Scheibe von unendlicher Ausdehnung inducirt, sowie auch die Ströme, welche auf einem leitenden Kreiscylinder von unendlicher Länge inducirt werden, wenn er mit verschiedenen Lagen in einem von elektrischen Wellen durchzogenen Felde sich befindet, und die entsprechenden Veränderungen in diesem Felde selbst. Bdn.

---

E. Cohn. Zur Elektrodynamik der Leiter. Wiedemann Ann. XLV. 55-61.

D. A. Goldhammer. Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn E. Cohn „Zur Elektrodynamik der Leiter“. Wiedemann Ann. XLVI. 99-104.

Hr. Cohn findet auf Grund einer Vergleichung der Maxwell'schen Lichttheorie mit den Versuchsergebnissen, dass die Maxwell'schen Gleichungen sich bewährt haben für Nichtleiter, für stationäre Zustände der Leiter, wie Ohm'sches Gesetz, Stromverzweigung, magnetische Wirkungen stationärer Ströme, für quasi-stationäre Zustände, wie es die Inductionserscheinungen sind, aber auch endlich für die viel schnelleren Hertz'schen Schwingungen. Die Maxwell'schen Gleichungen versagen aber, wenn es sich um die Erklärung der Durchstrahlung der Leiter handelt. Ob damit nun auch das Fundament, auf dem die Maxwell'schen Gleichungen ruhen, erschüttert ist? fragt Hr. Cohn. Nach Hrn. Goldhammer sind die Widersprüche der Theorie mit der Erfahrung nicht so tiefgehend und für die Grundlagen der Maxwell'schen Lichttheorie bedenklich, wie es für den ersten Augenblick den Anschein hat.

Hr. G. weist darauf hin, dass die Dielektricitätsconstante $D$ und der specifische Widerstand $k$ eines isotropen Körpers einen physikalischen Sinn nur für diejenigen Erscheinungen haben, die sich auf einen stationären Zustand des Mediums beziehen. Im allgemeinen ist $D = f(T)$ und $k = \varphi(T)$, wenn $T$ die Periode der Zustandsänderung ist; im besonderen stehen für $T = \infty$, bezw. $T$ sehr gross die Maxwell'schen Gleichungen mit den Erscheinungen im Einklang. Hr. G. entwickelt nun zwei Bedingungen, denen jede richtige Dispersionstheorie Genüge leisten muss (die einzig vorhandene von Herrn Koláček thut es nicht), und diese lauten, wenn $N$ den Brechungs- und $K$ den Absorptionscoefficienten bedeuten:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{T=\infty} \left( \frac{NK}{T} \right) = \frac{1}{k}_{\text{für } T=\infty} \quad \text{für die Leiter,}$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{T=\infty} \left( \frac{NK}{T} \right) = 0 \quad \text{für die Nichtleiter.}$$

Hae.

H. A. Lorentz. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. Arch. Néerl. XXV. 363-551.

Maxwell hat bekanntlich die Bewegungsgleichungen der Elektricität in ruhenden Leitern durch Anwendung der gewöhnlichen Gesetze der Mechanik auf die elektrischen Erscheinungen hergeleitet. In Wiedemann's Annalen hat dagegen Hertz jene Gleichungen auch für sich bewegende Leiter, auf rein physische Betrachtungen sich stützend, entwickelt. Dabei wird jedoch die Voraussetzung eingeführt, dass die bewegenden Körper den in denselben enthaltenen Aether mitführen, eine Annahme, welche nach den Erscheinungen der Optik nicht stets zutrifft. Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, indem jene Voraussetzung fallen gelassen wird, mit Verallgemeinerung der Maxwell'schen Anschauungen die Gleichungen für sich bewegende Körper aufzustellen. Der leitende Gedanke stimmt somit mit dem in Herrn Boltzmann's „Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität des Lichtes“ niedergelegten überein, doch weichen die Methode und die betrachteten Probleme manchmal ab.

Die sehr umfangreiche Abhandlung ist in sieben Abschnitte eingeteilt. Zuvor wird in einer Einleitung die Form angegeben, in der das d'Alembert'sche Princip zur Anwendung gebracht wird. Der erste Abschnitt behandelt die Elektricitätsbewegung in ruhenden Leitern. Die virtuelle Verrückung des Systems wird bestimmt durch die Elektricitätsmengen $e_x$, $e_y$, $e_z$, welche während einer kurzen Zeit durch Einheitsebenen senkrecht zu den Coordinatenaxen strömen. Wenn nun eine Erweiterung der Maxwell'schen Hypothese eingeführt wird, dass nämlich die Lage jedes Punktes des Systems bestimmt ist durch die Elektricitätsmengen $e_x$, $e_y$, $e_z$, welche von einem festen Augenblicke an durch drei unter sich rechtwinklige, daselbst befindliche Flächenelemente geflossen sind, so verschwindet die Variation der kinetischen Energie, und die von den äusseren Kräften während der virtuellen Verrückung geleistete Arbeit hat die Form:

$$-\int (Xe_x + Ye_y + Ze_z)\, d\tau.$$

$X$, $Y$, $Z$ sind für die Dielektrica lineare Functionen der Componenten der dielektrischen Polarisation, für Leiter in gleicher Weise von den Stromcomponenten $u$, $v$, $w$ abhängig. Hiermit werden nun die Bewegungsgleichungen aufgestellt.

Diese Resultate werden sodann betrachtet im Lichte einer Theorie eines elektrischen Fluidums analog der von Hrn. Poincaré in „Électricité et optique" angewandten Vorstellung, nach welcher alle Körper, auch der Aether, von einer incompressiblen Flüssigkeit durchsetzt sind, in deren Verrückungen die Ursache der elektrischen Erscheinungen gesucht werden soll. Mit Ausführlichkeit wird diese Theorie entwickelt.

Im zweiten Abschnitt werden elektromagnetische Erscheinungen in sich bewegenden Körpern, welche den Aether mit sich führen, mathematisch beschrieben. Sind $p_1$, $p_2$, ... allgemeine Coordinaten, welche die Lage eines Punktes des betrachteten Stoffes bestimmen, so wird in dem Falle, wo elektrische Bewegungen stattfinden, für die Geschwindigkeit jenes Punktes gesetzt

$$Q_1\dot{p}_1 + Q_2\dot{p}_2 + \cdots + \Sigma(Au + Bv + Cw),$$

wo die Summe über alle Elemente des betrachteten Raumes aus-

zudehnen ist. Die kinetische Energie besteht dabei aus drei Teilen; der erste, nur die Grössen $\dot{p}$ enthaltende, bleibt für die elektrischen Erscheinungen ausser Betracht, und der Teil, welcher $\dot{p}$ und $u$, $v$, $w$ enthält, wird in Uebereinstimmung mit Maxwell der Null gleich gesetzt. Die hierbei erhaltenen Bewegungsgleichungen stimmen mit denen im zweiten Teile der Hertz'schen Abhandlung überein.

Im dritten Abschnitt wird die zuvor erwähnte verallgemeinerte Maxwell'sche Hypothese näher betrachtet und gezeigt, dass in der gewöhnlichen Mechanik eine derartige Hypothese im allgemeinen zu unrichtigen Resultaten führen würde. Doch ist dieselbe bei den elektrischen Erscheinungen, wie dargethan wird, zulässig.

Der vierte Abschnitt behandelt die Theorie eines Systems geladener Teilchen, welche sich durch den Aether bewegen können, ohne demselben die geringste Bewegung mitzuteilen. Es wird gezeigt, dass die elektrischen Erscheinungen mittels solcher Teilchen beschrieben werden können, indem bei dielektrischen Medien dieselben um eine Gleichgewichtslage sich bewegen, während bei Leitern ein wirklicher Strom jener Teilchen zu Stande kommt. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass dieselben kugelförmig sind und nur Translationsbewegungen ausführen. Der Aether, welcher auf die Teilchen Kräfte ausübt, gerät durch die Bewegung der Teilchen in einen polarisirten Zustand.

Das nächste Capitel enthält Anwendungen der erhaltenen Gleichungen auf die Elektrostatik, die elektrodynamische Kraft, welche auf ein Element eines linearen Elementes wirkt, und die Induction in einem geschlossenen Kreis. Zuletzt wird der Einfluss der ponderablen Dielektrica auf die elektrostatischen Erscheinungen erörtert.

Die Ausbreitung des Lichtes in einem ruhenden ponderablen Dielektricum, die oscillatorischen Bewegungen der geladenen Teilchen in den Molekeln eines solchen Mediums, welche von periodischen Aenderungen in dem Zustande des Aethers begleitet sind, bilden den Gegenstand des sechsten Abschnittes. Eine ziemlich

complicirte Formel für die Geschwindigkeit der Ausbreitung der transversalen Schwingungen wird erhalten, welche die Maxwell'schen und die Lorenz'schen Formeln unter speciellen Annahmen enthält. Das Schlusscapitel behandelt die Fortpflanzung des Lichtes in einem ponderablen sich bewegenden Dielektricum. Es tritt bei dieser Untersuchung aus den erhaltenen Gleichungen die Erscheinung der Mitführung der Lichtwellen durch die ponderable Masse zu Tage. Für den Mitführungscoefficienten ergiebt sich der nämliche Factor, welchen Fresnel in seiner Aberrationstheorie genötigt war anzunehmen, nämlich $1-\frac{1}{\nu^2}$, wo $\nu$ den Refractionscoefficienten bedeutet.

In einem Anhang wird noch gezeigt, dass die Resultate, welche bei der Annahme erhalten sind, dass die Amplituden der Schwingungen kleiner sind als der Diameter der Teilchen, im grossen und ganzen auch gültig bleiben, wenn die Abweichungen grösser sind. Mo.

---

O. Heaviside. On the forces, stresses, and fluxes of energy in the electromagnetic field. Lond. R. S. Phil. Trans. CLXXXIII. 423-480.

Der Verf. bemerkt, dass die hervorragende experimentelle Arbeit der letzten Jahre eine neue Aera in der Entwickelung der Faraday-Maxwell'schen Theorie des Aethers herbeigeführt hat, wenn man ihn als das primäre Medium ansieht, das bei den elektrischen, magnetischen und elektromagnetischen Erscheinungen in Betracht kommt. Die Realität der elektromagnetischen Wellen ist durch die Versuche von Hertz augenfällig bewiesen worden, sowie durch die von Lodge, Fitzgerald und Troughton, J. J. Thomson und anderen, und es scheint zu folgen, dass, obschon Maxwell's Theorie vielleicht nicht völlig correct ist, dennoch die wahre Theorie eine von demselben Gepräge sein muss, und dass sie wahrscheinlich nur eine erweiterte Form der Maxwell'schen sein dürfte. Demnach bedarf es keiner Entschuldigung für Forschungen, welche auf die Darlegung und Beleuchtung oder Erweiterung dieser Theorie abzielen, selbst wenn sie einen äusserst abstracten Charakter haben sollten. Cly. (Lp.)

---

J. Duclout. Estudio sobre las hipotesis mecánicas que sirven de base à la teoria electromagnetica de la lur Maxwell. Anales de la Sociedad cientifica argentina XXXIV.

Der Verf. übersetzt zuerst ins Spanische den ersten Vortrag Boltzmann's über die Maxwell'sche elektromagnetische Lichttheorie und geht dann auf die allgemeinen dynamischen Gleichungen von Lagrange ein, deren man sich in dieser Theorie bedient.

Tx. (Lp.)

---

G. F. Fitzgerald. On the driving of electromagnetic vibrations by electromagnetic and electrostatic engines. Nature XLV. 358-359.

Vortrag vor der Londoner Physikalischen Gesellschaft; Ueberlegungen, wie continuirliche elektromagnetische Schwingungen erhalten werden könnten, nebst einem Vorschlage zur Verwirklichung.

Lp.

---

L. Boltzmann. Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher elektrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten. Münch. Ber. XXII. 53-70.

Unter Bezugnahme auf die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen werden die elektrischen Verschiebungen für eine elektrische Planwelle bestimmt, die senkrecht auf eine Metallplatte auftrifft und entweder nur eine einmalige Reflexion erleidet, oder aber an beiden Metalloberflächen reflectirt wird. Hae.

---

D. A. Goldhammer. Die Dispersion und Absorption des Lichtes nach der elektrischen Lichttheorie. Wiedemann Ann. XLVII. 93-106.

D. A. Goldhammer. Studien über die elektrische Lichttheorie. (Aus Kasan Phys. Math. Ges. 1891.) Wiedemann Ann. XLVII. 265-298.

Sind $f$, $g$, $h$ die Componenten des dielektrischen Momentes,

$p$, $q$, $r$ diejenigen des Ohm'schen Stromes, $P$, $Q$, $R$ die der gesamten elektromotorischen Kraft im Punkte $x$, $y$, $z$, so gelten nach der Maxwell'schen Lichttheorie die folgenden Gleichungen:

$$(1) \qquad f = \frac{D}{4\pi} P, \quad g = \frac{D}{4\pi} Q, \quad h = \frac{D}{4\pi} R,$$

$$(2) \qquad p = \frac{P}{\varkappa}, \qquad q = \frac{Q}{\varkappa}, \qquad r = \frac{R}{\varkappa},$$

wo $D$ die Dielektricitätsconstante, $\varkappa$ der spec. Widerstand des Mediums sind; alle Grössen sind elektrostatisch in C. G. S. gemessen. Die Componenten des Gesamtstromes $u$, $v$, $w$ sind gegeben durch

$$(3) \qquad u = \frac{\partial f}{\partial t} + p, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t} + q, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + r.$$

Diese werden für einen isotropen Körper dargestellt durch:

$$(4) \qquad u = \frac{D}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P}{\varkappa}, \quad v = \frac{D}{4\pi}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{\varkappa}, \quad w = \frac{D}{4\pi}\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{\varkappa},$$

worin nun aber nach den Entwickelungen des Verf. $D$ und $\varkappa$ nicht mehr die so eben angegebene Bedeutung haben, sondern als Functionen von $q = \frac{2\pi}{T}$ erscheinen; nämlich

$$D = 1 + \Sigma \frac{(\delta_n - 1)\{\alpha_n(1 - c_n q^2) + b_n \beta_n q^2\} + \frac{4\pi}{\varkappa_n}\{\beta_n(1 - c_n q^2) - \alpha_n b_n\}}{(1 - c_n q^2)^2 + b_n^2 q^2},$$

$$\frac{1}{\varkappa} = \Sigma \frac{\frac{1}{\varkappa_n}\{\alpha_n(1 - c_n q^2) + b_n \beta_n q^2\} - \frac{\delta_n - 1}{4\pi} q^2 \{\beta^2(1 - c_n q^2) - \alpha_n b_n\}}{(1 - c_n q^2)^2 + b_n^2 q^2}.$$

Der Verf. zeigt, dass diese Functionen von $T$ für $T = \infty$ mit den im vorigen Referat geforderten Bedingungen im Einklang stehen. Im besonderen lassen sich diese Dispersionsformeln durch vereinfachende Annahmen in die von Hrn. v. Lommel und v. Helmholtz entwickelten überführen, nicht aber stimmen sie mit der Ketteler'schen Theorie.

Die zweite Abhandlung geht von den v. Helmholtz'schen Gleichungen der Elektrodynamik aus und entwickelt aus denselben

die Lichttheorie sowohl für isotrope als für krystallinische Körper; zu einem kurzen Auszuge eignet sich die Arbeit nicht. Hac.

---

P. DRUDE. Ueber magnetooptische Erscheinungen. Wiedemann Ann. XLVI. 353-422.

R. REIFF. Zur mathematischen Theorie der Kerr'schen Versuche. Böklen Mitt. V. 61-84.

D. A. GOLDHAMMER. Das Kerr'sche magnetooptische Phänomen und die magnetische Circularpolarisation nach der elektrischen Lichttheorie. Wiedemann Ann. XLVI. 71-98.

D. A. GOLDHAMMER. Zur elektrischen Theorie der magnetooptischen Erscheinungen. Wiedemann Ann. XLVII. 345-348.

Bezeichnen $L$, $M$, $N$ die Componenten der magnetischen, $X$, $Y$, $Z$ die der elektrischen Kraft, $\varepsilon$ die Dielektricitätsconstante, $\lambda$ die specifische Leitungsfähigkeit eines Körpers, gemessen in elektrischem Mass, $A$ den reciproken Wert der Lichtgeschwindigkeit im freien Aether, so gelten für ein nicht magnetisirtes Metall, falls man die Magnetisirungsconstante aller Medien gleich Eins setzt, die Gleichungen:

$$A\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\quad A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t}+4\pi\lambda X\right)=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},$$

$$A\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\quad A\left(\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t}+4\pi\lambda Y\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},$$

$$A\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y},\quad A\left(\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t}+4\pi\lambda Z\right)=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen führen zu einer Beschreibung vieler besonderen optischen Eigenschaften der Körper, wenn man das erste Tripel unverändert lässt, dagegen das zweite durch Zusatzglieder erweitert. Einen dahin gehenden Vorschlag hat Rowland gemacht; Hr. Reiff folgt demselben und entwickelt die Theorie des Hall-Effectes und der Kerr'schen Phänomene. Hr. Drude macht nun darauf aufmerksam, dass dadurch diese beiden Erscheinungen derselben Ursache zugeschrieben würden, was nach den neueren Untersuchungen

von Righi, Kundt und ihm selbst recht unwahrscheinlich ist. Er fügt daher dem ersten Tripel der obigen Gleichungen Zusatzglieder bei und lässt das zweite unverändert; dabei will es Hrn. Drude als ein Vorteil erscheinen, dass er mit einer reellen magnetooptischen Constante ausreicht. Anders Hr. Goldhammer, der in seiner Theorie einer complexen Grösse, d. h. zweier magnetooptischen Constanten bedarf, nämlich

$$b = \mu \frac{D + i\frac{2T}{k}}{4\pi}.$$

Da Hr. Drude aber von Differenzen zwischen den Berechnungen Goldhammer's und den Beobachtungen spricht, so verwahrt sich Hr. Goldhammer in der oben zuletzt angeführten Note dagegen und zeigt, dass Hrn. Drude's Theorie offenbar nur einen speciellen Fall der seinigen darstellt, die aber eine willkürlich angenommene Beziehung zwischen zwei Grössen $\delta$ und $o$ enthält, definirt durch:

$$\mu = pJe^{-i\delta}, \quad D + i\frac{2T}{k} = F^2 e^{2io}.$$

Diese Beziehung lautet $2o - \delta \equiv 0 \pmod{\pi}$; ob diese Beziehung besteht, müssen weitere Beobachtungen ergeben; für Eisen jedoch besteht sie nicht. Hr. Goldhammer verwirft deshalb alle Theorien mit nur einer magnetooptischen Constante. Hae.

---

D. Goldhammer. Théorie électromagnétique de la polarisation rotatoire naturelle des corps transparents. Almeida J. (3) I. 205-209, 345-350.

Da die elektromagnetische Theorie der im Titel bezeichneten Erscheinung bei Gibbs (Amer. J. of Science XXIII. 1882) nach Ansicht des Verfassers mit dessen Theorie der Dispersion des Lichtes eng verknüpft ist und sich nur auf unbegrenzte Medien bezieht, und da die Basset'sche Theorie (F. d. M. XXII. 1890. 1143) eher die Erscheinungen der magnetischen als der natürlichen Drehung der Polarisationsebene erklärt und ebenfalls sich auf einen unbegrenzten Körper bezieht, so hat der Verfasser in dem vorliegenden Aufsatze die vollständige Theorie des erwähnten Phäno-

mens aus den Maxwell'schen Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie abgeleitet. Lp.

H. E. J. G. du Bois. Zur magnetischen Theorie des Ferromagnetismus. Wiedemann Ann. XLVI. 485-499.

Die Theorie des Verfassers bewegt sich in den Ausdrücken der Quaternionen-Theorie, deren Sätze „über Vectorverteilungen im allgemeinen“ der Untersuchung vorangehen. In dem Abschnitt: „Magnetische Vectorverteilungen“ ist der Satz bemerkenswert: Zwischen zwei beliebigen Punkten der Grenzfläche ist der Anteil des magnetischen Potentialzuwachses im Interferricum numerisch gleich dem Linienintegral der selbstentmagnetisirenden Intensität im Ferromagneticum; und weiter der andere: Ein Körper sei so gestaltet, dass in einer gegebenen Richtung eine gleichförmige Magnetisirung eine gleichförmige, ihr entgegengerichtete, entmagnetisirende Intensität erzeugen würde; dann inducirt ein äusseres, jener Richtung paralleles, gleichförmiges Feld eine derartige Magnetisirung. Hae.

G. Adler. Ueber den magnetischen Arbeitswert des Eisens. Wiedemann Ann. XLVI. 503-512.

Abgedruckt aus Wien. Ber. C. 469-492; vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 1161. Hae.

G. Adler. Ueber die an Eisenkörpern im Magnetfelde wirksamen Oberflächenspannungen. Wien. Ber. CI. 1537-1547, Wien. Anz. XXI. 216-217.

Untersucht man, was in den einzelnen Raumpunkten eines magnetischen Feldes bei einer virtuellen Verschiebung vorgeht, dann wird als Sitz der wesentlichen Energieänderung und damit als der der wirksamen mechanischen Kräfte die Oberfläche des Körpers sich ergeben. v. Helmholtz (Wied. Ann. XIII. 385-406) und Kirchhoff (Wied. Ann. XXIV. 66) haben gezeigt, dass, wenn für einen magnetisch polarisirten Körper die Magnetisirungszahl $k$

desselben in seiner ganzen Ausdehnung einen und denselben Wert hat, die Gesamtheit der denselben im Magnetfelde translatorisch angreifenden mechanischen Kräfte ersetzt werden kann durch Druckkräfte, die lediglich an seiner Oberfläche thätig sind. Ist hingegen die Magnetisirungszahl in verschiedenen Punkten der magnetischen Substanz von verschiedenem Werte, dann treten zu jenen Oberflächendrucken noch Kräfte hinzu, welche die einzelnen im Innern gelegenen Körperelemente angreifen. Der Verfasser weist nun nach, dass in dem besonderen Falle, wo, wie beim Eisen, die Verschiedenheit der Magnetisirungszahl an verschiedenen Stellen des homogenen Körpers sich als Function der an den einzelnen Feldstellen variirenden Magnetkraft darstellt, die eine derartige magnetische Substanz translatorisch angreifenden Kräfte ersetzbar sind durch lediglich an seiner Oberfläche thätige Druckkräfte. Adler geht bei der Berechnung der Oberflächenspannung aus von dem Arbeitswerte des weichen Eisens im Magnetfelde:

$$W = W_1 + W_2 = -\int \tfrac{1}{2}(A_1 E_1 + B_1 F_1 + C_1 G_1)\,dv - \int\int_0^{J_1} J\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ\,dv,$$

wo die Integration nach $v$ über alle Volumenelemente des Eisenkörpers zu erstrecken, bei derjenigen nach $J$ die Magnetisirungszahl $k$ als Function des magnetischen Moments $J$ aufzufassen ist. (Vergl. F. d. M. XXIII. 1891. 1161). Das erste Integral $W_1$ wird nach dem Vorgange von Kirchhoff und v. Helmholtz auf die Normalform gebracht, wodurch sich ergiebt:

$$W = W_1 + W_2 = -\int_\infty \left(\frac{1}{8\pi} R_1^2 + \frac{1}{4\pi} V\Delta\Phi\right) d\tau - \int \frac{k_1}{2} R_1^2 dv - \int\int_0^{J_1} J\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ\,dv,$$

wo $\Phi$ das Potential der ursprünglich, $R_1$ dasjenige der schliesslich im Felde herrschenden Magnetkraft ist. $V = \Phi + \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{B}$ das Potential der durch die Polarisirung der magnetischen Substanzen auftretenden freien Magnetismen ist. Es können jetzt die Spannungskräfte berechnet werden, welche man in den einzelnen Oberflächen-

elementen des Eisens und nur an diesen nach Richtung der positiven $X$-Axe in jeder Flächeneinheit anbringen muss; dabei soll die Annahme gemacht werden, dass in der Grenzschicht ein allmählicher Uebergang der Magnetisirungszahl vom Werte $k_1$, der an ihrer im Eiseninnern gelegenen Seite herrscht, bis zum Werte Null, welcher der Luft zukommt, sich vollziehe. Jener Wert ist:

$$X_n = \left[\frac{k_1}{2} R_1^2 + 2\pi J_1^2 \cos^2(n, J_1) + \int_0^{J_1} J\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ\right] \cos(n, x)$$

und analog $Y_n$ und $Z_n$.

Die resultirende magnetische Oberflächenspannung, welche die translatorische Zugkraft vollkommen zu ersetzen im Stande ist, hat demnach in allen Oberflächenelementen die Richtung der nach aussen gezogenen Normale und ist pro 1 cm²:

$$N_n = \left[\frac{k_1}{2} R_1^2 + 2\pi J_1^2 \cos^2(n, J_1) + \int^{J_1} J\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k}\right) dJ\right].$$

Für $k = k_1$ kommt man auf den Kirchhoff'schen Wert:

$$N_n' = \frac{k_1^2}{2} R_1^2 + 2\pi J_1^2 \cos^2(n, J_1).$$

Endlich kann man $N_n$ wegen $J_1 = k_1 R_1$ auch in die Form bringen:

$$N_n = J_1 R_1 + 2\pi J_1^2 \cos^2(n, J_1) - \int^{J_1} \frac{J}{k} dJ.$$

Hae.

---

L. Pinto. Sull' azione reciproca fra due elementi magnetici e sul modo con cui dovrebbero variare con la latitudine la inclinazione e la intensità magnetica terrestre nella ipotesi di Gilbert e nelle altre che analiticamente le equivalgono. Napoli Rend. (2) VI. 37-39.

Die Wirkung, welche ein Element einer sehr kleinen Magnetnadel vom Momente $m$ auf einen Pol von der Intensität $+1$ ausübt, der in der Entfernung $r$ auf einer Geraden liegt, die mit dem Elemente den Winkel $\theta$ bildet, ist gegeben durch

$$R = \frac{m}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta};$$

der kleinste Wert von $R$ ist bestimmt durch $\frac{m}{r^3}$, der grösste durch $\frac{2m}{r^3}$. Die Tangentialcomponente der mittleren Wirkung ist also $T = \frac{m}{r^3} \sin\theta$. Macht $R$ mit der Tangentialcomponente den Winkel $i$, so ist $i$ bestimmt durch

$$\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{ctg} \theta.$$

Setzt man $\frac{\pi}{2} - \lambda$ statt $\theta$, wo $\lambda$ der geographischen Breite entspricht, und $R_e$ statt $\frac{m}{r^3}$, wo $R_e$ die dem Aequator entsprechende Wirkung ist, so erhält man

$$R = R_e \sqrt{1+3\sin^2\theta} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \lambda.$$

Man pflegt hiervon in den Lehrbüchern gewöhnlich eine Anwendung auf die Hypothese von Gilbert über den Erdmagnetismus zu machen, indem man sagt, dieselbe sei gleichwertig der Annahme zweier magnetischen Massen, der Grösse nach gleich und entgegengesetzt, und in einer sehr kleinen Entfernung in Beziehung auf den Erdradius um den Mittelpunkt der Erde gelegen. Ist dann $i$ die magnetische Inklination und $\lambda$ die Breite, so ist $\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \lambda$. Ist ferner $F_e$ die Intensität des Erdmagnetismus am Aequator, $F_\lambda$ diejenige in der Breite $\lambda$, so ist

$$F_\lambda = F_e \sqrt{1+3\sin^2\lambda}.$$

Diese Ausdehnung der Wirkung eines Poles auf zwei benachbarte, irgend wo gelegene, erscheint dem Verf. weder genau, noch einleuchtend. Eine tiefere Untersuchung hat ihm das Resultat gebracht:

$$\operatorname{tg} i = 2 \operatorname{tg} \lambda; \quad \text{und} \quad F_\lambda = F_e \sqrt{1+3\sin^2\lambda + \frac{\sin^2\lambda\cos^2\lambda}{1+3\sin^2\lambda}}.$$

Der Unterschied zwischen beiden Ergebnissen wird in einer Tabelle rechnungsmässig verfolgt. Hae.

C. G. Knott. Experimental introduction to the study of magnetism. Edinb. M. S. Proc. X. 50-59.

Eine Kritik der üblichen Methoden im elementaren Unterrichte und eine Andeutung eines Lehrganges, welcher nach Ansicht des Verfassers zu einer wissenschaftlicheren Erfassung der Grundlagen der Wissenschaft führt. Gbs. (Lp.)

M. Couette. Sur la constante de l'équivalent électrochimique. Almeida J. (3) I. 350-352.

Theoretische Begründung des Satzes, dass die Zahl *a* von Aequivalenten, welche durch den Durchgang der elektrischen Masseneinheit in einem gegebenen Elektrolyten verrückt werden, nicht von der Temperatur abhängt. Lp.

---

### Weitere Litteratur.

H. Abraham. Sur une nouvelle détermination du rapport *v* entre les unités électromagnétiques et électrostatiques. Thèse d'analyse. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 93 S. 4°.

E. Beltrami. Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo. Nuovo Cimento. (3) XXXI. 5-17, 209-220; XXXII. 50-58, 113-120. Abdruck aus Bol. Mem. (5) I. 409-453. Fortsetzung und Schluss.

P. Duhem. Leçons sur l'électricité et le magnétisme. Tome I. Conducteurs à l'état permanent (1891). Tome II. Les aimants et les corps diélectriques (1892). Tome III. Les courants linéaires (1892). Paris. Gauthier-Villars et Fils.

J. A. Ewing. Magnetic induction in iron and other metals. London. Electrician office. XVIII + 355 S. [Nature XLVII. 460-461.]

K. Exler. Ueber elektrische Kraftübertragung (mit besonderer Berücksichtigung des Wechsel- und Drehstromes). Mitt. üb. Art. u. Gen. XXIII. 531-570, 635-650.

R. Ferrini. Recenti progressi nelle applicazioni dell'elettricità. Parte prima: delle dinamo. Milano. Ulrico Hoepli. [Nature XLVI. 296-298.]

J. A. Fleming. The alternate current transformer. Vol. II. London. Electrician office. XII + 594 S.

John Gray. Les machines électriques à influence. Exposé complet de leur histoire et de leur théorie, suivi d'instructions pratiques sur la manière de les construire. Traduit de l'anglais et annoté par Georges Pélissier. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

H. Hertz. Sulle equazioni fondamentali dell' elettrodinamica pei corpi in moto. Nuovo Cimento. (3) XXXI. 97-124. Uebersetzt aus Wiedemann Ann. XLI. 369-399. (F. d. M. XXII. 1890. 1110-1115.)

J. Larmor. On the theory of electrodynamics as affected by the nature of the mechanical stresses in excited dielectrics. Lond. R. S. Proc. LI. 55-66.

J. Munro and A. Jamieson. A pocket-book of electrical rules and tables. Eighth edition, revised and enlarged. London. Griffin and Co. [Nature XLVI. 486.]

Perry. On choking coils. Nature XLV. 524-525.

Kurzer Auszug aus einem theoretischen Vortrage in der Londoner Physikalischen Gesellschaft. Lp.

J. J. Thomson. Notes on recent researches in electricity and magnetism: intended as a sequel to Professor Clerk-Maxwell's Treatise on electricity and magnetism. Oxford. Clarendon Press. XVI + 578 S. [Nature XLIX. 357-359.]

# Capitel 4.
# Wärmelehre.

## A. Mechanische Wärmetheorie.

J. Clerk Maxwell. Theory of heat. Tenth edition, with corrections and additions by Lord Rayleigh. London. Longmans, Green and Co.

Maxwell's „Theorie der Wärme" ist längst als eines der besten Bücher seiner Gattung anerkannt worden, elementar und doch von der höchsten wissenschaftlichen Auszeichnung, inhaltlich weit über die üblichen „elementaren" Werke hinausreichend. In der gegenwärtigen Ausgabe hat Lord Rayleigh manche wertvolle Noten über die Theorie unvollkommener Gase und Flüssigkeiten, sowie über die Capillarität hinzugefügt. Gbs. (Lp.)

---

P. Alexander. A treatise on thermodynamics. London. Longmans, Green and Co. XII + 203 S.

Es ist etwas schwierig, den wahren Wert dieses Buches als eines Beitrages zur Kenntnis der thermodynamischen Principien zu beurteilen. Die Zahl der Formeln, welche von rein mathematischem Interesse sind, ist ungemein gross und die Terminologie überladen. Gleichzeitig aber ist das Buch das Erzeugnis selbständigen Denkens und enthält manche scharfe Kritik von Resultaten, die sonst vielleicht zu leicht von gewöhnlichen Studirenden entgegengenommen werden. Gbs. (Lp.)

J. W. Gibbs. Thermodynamische Studien. Unter Mitwirkung des Verfassers aus dem Englischen übersetzt von W. Ostwald. Leipzig. W. Engelmann. XV + 409 S. 8°.

Der vorliegende Band enthält drei Abhandlungen von Gibbs, von denen die beiden ersten: „Graphische Methoden in der Thermodynamik der Flüssigkeiten" und „Eine Methode geometrischer Dar-

stellung der thermodynamischen Eigenschaften der Stoffe mittelst Flächen“ 1873, die dritte, grosse Abhandlung „Ueber das Gleichgewicht heterogener Stoffe“ 1876-78 in den Transactions of the Connecticut Academy erschienen sind. Da der Inhalt dieser Abhandlungen nicht nur historisches Interesse hat, sondern noch jetzt für die Fortentwickelung der Wissenschaft von unmittelbarer Bedeutung ist, so muss die Uebersetzung dieser bisher schwer zugänglichen Schriften als ein verdienstliches Werk mit Freuden begrüsst werden. Sbt.

---

H. Poincaré. Thermodynamique. Leçons professées. Paris. G. Carré. XIX + 432 S.

H. Poincaré, P. G. Tait. Poincaré's Thermodynamics. Nature XLV. 245-246, 414-415, 439, 485, 532; XLVI. 76.

An die Anzeige der Thermodynamique durch Hrn. Tait, der das Werk scharf angreift, schliesst sich eine Reihe von Entgegnungen und Erwiderungen. Lp.

---

P. Duhem. Commentaire aux principes de la thermodynamique. Journ. de Math. (4) VIII. 269-330.

Eine mehr philosophische als mathematische Untersuchung, in der auf Grund gewisser Definitionen und Hypothesen in logischer Folge die Principien der Thermodynamik entwickelt werden.

Sbt.

---

P. Duhem. Sur le déplacement de l'équilibre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) IX. 375-379.

Der Verf. beweist folgendes Theorem, das eine Verallgemeinerung des 1884 von Le Chatelier gegebenen Satzes darstellt:

Wenn ein System bei gegebener Temperatur unter der Wirkung gewisser äusserer Kräfte im stabilen Gleichgewichte ist und zu diesen Kräften bei unveränderter Temperatur neue, unendlich kleine Kräfte hinzugefügt werden, so dass ein neuer Gleichgewichtszustand sich herstellt, dann ist die beim Uebergang aus dem alten in den neuen Gleichgewichtszustand von den störenden Kräften geleistete Arbeit immer positiv. Sbt.

---

W. Peddie. Deduction of the thermodynamical relations. Edinb. M. S. Proc. X. 41-43.

Ein einfacher Beweis, der sich auf die Theorie der Vertauschung der unabhängigen Variabeln stützt, wenn $u$, $v$, $x$, $y$ vier Veränderliche sind, von denen zwei beliebige als unabhängig angenommen werden können. Gbs. (Lp.)

W. Peddie. Note on the law of transformation of energy and its applications. Edinb. Proc. XIX. 253-259.

---

W. Ostwald. Studien zur Energetik. II. Grundlinien der allgemeinen Energetik. Leipz. Ber. XLIV. 211-237.

Man vergleiche den Bericht über den Teil I in F. d. M. XXIII. 1891. 1175.

Nachdem die Bedeutung der beiden Hauptsätze der Energetik, nämlich: 1) „Die Gesamtmenge der Energie ist constant“, 2) „Zwei Gebilde, die einzeln mit einem dritten im Energiegleichgewicht sind, sind auch unter einander im Gleichgewicht“, dargelegt ist, wird die Zerlegung der Energie in einen Capacitäts- und einen Intensitätsfactor erörtert. Die Intensität ist eine Grösse, die ab- oder zunimmt, wenn Energie von einem Gebilde zu einem anderen übergeht. Bei der Wärme z. B. ist der Intensitätsfactor die Temperatur, der Capacitätsfactor die Wärmecapacität oder aber die Entropie. Es werden dann die Arten der Energie zugleich mit ihrer Factorenzerlegung angegeben (dabei die Einteilung der Raumenergie in Distanz-, Flächen- und Volumenenergie betont), und es wird die Ermittelung der Energiefactoren besprochen. Die Factoren der verschiedenen Energiearten stehen in Beziehungen, unter denen die Proportionalität die wichtigste ist. Diejenigen Factoren, die unter einander und insbesondere dem Capacitätsfactor der Bewegungsenergie, der Masse, proportional sind, werden als Grundeigenschaften der Materie, die anderen, wie z. B. die Geschwindigkeit, Temperatur, das elektrische Potential, als vorübergehende Eigenschaften oder Zustände der Materie bezeichnet; die Materie selbst ist nichts weiter als eine räumlich unterscheidbare, zusammenhängende Summe von Energiegrössen.

Vorrichtungen, die eine willkürliche Verbindung von Energiefactoren bewerkstelligen, heissen Maschinen.

In einem Gebilde, in dem zwei Energiearten an einander grenzen, herrscht Gleichgewicht, wenn bei einer virtuellen Aenderung der correlativen Factoren ebenso viel Energie der ersten Art verschwindet, als solche der zweiten Art entsteht. Da die Maschinengleichung, die die Aenderungen zweier Energiearten verknüpft, erfahrungsgemäss nur den Capacitätsfactor $c$ betrifft, so hat sie die Form $c_1 = K.c_2$, und daraus ergiebt sich $K.di_1 = -di_2$, d. h. „es findet zwischen zwei Energien Gleichgewicht statt, wenn die Intensität der einen der „reducirten Intensität“ der anderen entgegengesetzt gleich ist.“

Nachdem gezeigt ist, wie für die Wärme die vollständigen Werte der Energiefactoren experimentell bestimmt werden können, folgt eine Betrachtung über die „bewegliche Energie“, d. i. dasjenige Energiequantum, das einem im Gleichgewicht befindlichen, aus verschiedenen Energiearten zusammengesetzten Gebilde hinzugefügt wird und aus einer in jede andere Art verwandelt werden kann; es ergiebt sich, dass in einem isolirten Gebilde die Menge der beweglichen Energie constant sein muss. Dies gilt indessen nur so lange, als nicht strahlende Energie, die an keine Materie gebunden ist, in Frage kommt. Auf deren Eigenschaften beruhen die Dissipationserscheinungen der Energie, und deren Bedeutung liegt darin, dass durch sie den meisten natürlichen Vorgängen eine bestimmte Richtung auf die Verminderung der beweglichen Energie gegeben wird. Sbt.

---

C. Neumann. Das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes. Leipz. Ber. XLIV. 184-187.

---

B. Galitzine. Ueber strahlende Energie. Wiedemann Ann. XLVII. 479-495.

Es wird zunächst gezeigt, dass die Art, in der Bartoli den von einem Lichtstrahl in der Richtung seiner Fortpflanzung ausgeübten Druck berechnete, nicht zulässig ist. Sodann wird für

diesen Lichtdruck die Formel aufgestellt: $P = T\cdot\int_0^T \frac{1}{T}\cdot\frac{de}{dT}dT - e$,

wo $P$ den auf die Grundfläche eines Cylinders ausgeübten Druck, $T$ die absolute Temperatur und $e$ die in der Volumeneinheit enthaltene Energie bedeutet. Für diese Formel, die sich von der Boltzmann'schen durch einen constanten Factor unterscheidet, werden unter Anwendung der thermodynamischen Hauptsätze drei verschiedene Beweise gegeben. Es wird dann gezeigt, dass bei adiabatischen und umkehrbaren Vorgängen die Temperatur sich umgekehrt proportional der Kubikwurzel aus dem Volumen ändert. Die Untersuchung der Bedeutung der absoluten Temperatur führt zu dem Satze: Die vierte Potenz der absoluten Temperatur ist der Summe der Quadrate aller elektrischen Verschiebungen direct proportional. — Das Clausius'sche Emissionsgesetz ergiebt sich als eine notwendige Folge der Grundanschauungen Maxwell's. — Die Uebertragung von Energie auf eine neue Aethermasse ist bei umkehrbaren Vorgängen von Arbeitsleistung begleitet. — Bei adiabatischen und umkehrbaren Vorgängen ist der Vorrat an verfügbarer Energie der Kubikwurzel aus dem Aethervolumen, über das diese Energie verteilt ist, umgekehrt proportional.

Sbt.

---

Sir William Thomson. The kinetic theory of the dissipation of energy. Phil. Mag. (5) XXXIII. 291-299.

Neudruck einer in Edinb. Proc. VIII erschienenen Abhandlung (vergl. F. d. M. VII. 1875. 122). Gbs. (Lp.)

---

W. Wien. Ueber den Begriff der Localisirung der Energie. Wiedemann Ann. XLV. 685-728.

Nachdem in neuester Zeit das Vertrauen zu der unvermittelten Fernwirkung von Kräften etwas erschüttert worden ist, fängt man an, auch der Energie nur eine stetige Ausbreitung von Ort zu Ort zuzuschreiben. Die vorliegende Arbeit behandelt diese stetige Ausbreitung der Energie in mathematischer Form. Es werden Formeln gegeben, aus denen man den Ort eines bestimmten Energie-

anteils für irgend eine Zeit ermitteln kann, wenn er für eine bestimmte Anfangszeit gegeben ist. Die Untersuchungen werden im besonderen durchgeführt für die Bewegungen von Flüssigkeiten, von elastischen festen Körpern und für magnetische und elektrische Vorgänge. Sbt.

N. N. Pirogow. Ueber das Virial der Kräfte. Schlömilch Z. XXXIII. 257-290.

Für ein System, dessen $N$ Teilchen nur von nahewirkenden interparticulären Kräften angegriffen werden, und auf das als äussere Kraft nur ein gleichmässiger, zur Grenzfläche des Systems normaler Druck $P$ wirkt, gilt, wenn das Volumen des Systems mit $V$, die constante mittlere kinetische Energie der Teilchen mit $K$ und das Virial der interparticulären Kräfte mit $B$ bezeichnet wird, die Virialgleichung:

$$\tfrac{3}{2}\cdot P.V+B=N.K.$$

Für ein ideales Gas, d. h. ein System, das aus einer sehr grossen Anzahl von bewegten, nur in unendlich kleiner Entfernung auf einander wirkenden materiellen Punkten besteht, nimmt die Gleichung die bekannte Form an: $P.V=R.T.$

Für ein vollkommenes Gas, d. h. ein System, das aus einer sehr grossen Anzahl von bewegten, vollkommen harten, elastischen Kugeln besteht, wird die Gleichung: $P.V=R.T.e^{vb(V-b)}$.

Dabei ist $b$ der kleinste Raum, den das Gas für $K=0$ oder $P=\infty$ annehmen würde, und $v$ bedeutet eine Constante, deren Zahlenwert 6,03814 ist.

Für Systeme, auf dessen $N$ Teilchen (materielle Punkte) nur Abstossungskräfte wirken, und zwar nach dem Gesetz

$$\varphi(r)=-\frac{n\mu}{r^{n+1}},$$

wo $\mu>0$ und $n>1$, beide sonst aber beliebig sind, Systeme, die allerdings kein praktisches Interesse darbieten, wird die Zustandsgleichung:

$$P.V-\frac{a}{V^{n/3}}=R.T.$$

Besteht das System aus $N$ vollkommen harten, elastischen Kugeln,

die einander nach dem Gesetz $\varphi(r) = \frac{n\mu}{r^{n+1}}$ anziehen, so heisst die Gleichung:

$$P.V + \frac{a}{V^{\frac{n}{3}}} = R.T.e^{\frac{\nu b}{V-b}}.$$

Wird $P$ nach Atmosphären, $T$ nach Centesimalgraden gemessen und als Volumeneinheit das sogenannte Normalvolumen angenommen, d. i. das Volumen des idealen Gases, das aus ebenso viel Teilen besteht wie das betrachtete System, für $P = 1$ und $T = 273^{\circ}$, so wird $R = \frac{1}{273}$, gleich dem Ausdehnungscoefficienten des idealen Gases. Giebt man dann den Constanten $n$, $a$, $b$ die Zahlenwerte $n = 3$, $a = 0{,}002818$, $b = 0{,}000351$, so stimmen die nach der vorstehenden Formel berechneten Werte von $P$ mit den Beobachtungsergebnissen für den Stickstoff überein. Allerdings ist der Stickstoff ein mehratomiges Gas, aber für ein solches hat, wie der Verf. im Verlauf der Untersuchung zeigte, die Virialgleichung dieselbe Gestalt wie für einatomige, und die Werte $n$, $a$, $b$ dürften auch für mehratomige Gase innerhalb weiter Grenzen constant sein.

Sbt.

---

M. Planck. Bemerkungen über das Carnot-Clausius'sche Princip. Wiedemann Ann. XLVI. 162-166.

Diese Bemerkungen bezeichnen die Grenzen der Anwendbarkeit des in Rede stehenden Princips und heben die Vorzüge der ausgezeichneten Form hervor, in der es als Princip der Vermehrung der Entropie erscheint.

Sbt.

---

Th. Gross. Ueber den Satz von der Entropie. Wiedemann Ann. XLVI. 339-345, 517-521.

Verfasser erhebt gegen den Clausius'schen Beweis der Sätze, dass für umkehrbare Kreisprocesse $\int \frac{dQ}{\vartheta} = 0$, für beliebige Kreisprocesse $\int \frac{dQ}{\vartheta} \leqq 0$ sei, den Einwand, dass die Verwandlungswerte $\frac{dQ}{\vartheta}$ und $dQ_1 \left(\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1}\right)$ nicht ohne weiteres als vollständige

Differentiale vorausgesetzt werden dürften, und erklärt den Beweis des Satzes von der Entropie als Zirkelschluss. Er verwirft auch die Beweise, die Zeuner und C. Neumann für die Clausius'sche Ungleichung geben.

Demnächst stellt er auf Grund der Erörterung der Zustandsänderungen, die ein Körper erfahren kann, folgenden Satz auf: Wenn ein Körper unter Einwirkung äusserer Kräfte aus einem ersten in einen zweiten Gleichgewichtszustand übergeht, so ist die Entropie dieses Vorganges stets durch seine beiden Grenzzustände vollkommen bestimmt; sie ist also unabhängig vom Wege des Ueberganges und zwischen gegebenen Grenzen constant.

Sbt.

---

E. Budde. Ueber integrirende Divisoren und Temperatur.
Wiedemann Ann. XLV. 751-758.

Die Zeuner'sche Definition der Temperatur, wonach diese „der" integrirende Divisor des Wärmedifferentials sei, ist zu beanstanden. Es giebt unendlich viele solcher integrirenden Divisoren, und die Temperatur müsste als ein besonderer unter ihnen bestimmt charakterisirt werden. Das Resultat der vorliegenden Untersuchung ist die Definition: „Temperatur heisst derjenige integrirende Divisor des bei umkehrbaren Schritten verbrauchten Wärmedifferentials, der eine blosse Function der thermometrischen Scalenhöhe ist."

Sbt.

---

Lord Rayleigh. On the theory of surface forces. II. Compressible fluids. III. Effect of slight contaminations.
Phil. Mag. (5) XXXIII. 209-220, 468-471.

Diese Artikel bilden Fortsetzungen zu dem in F. d. M. XXII. 1890. 1027 angezeigten. In dem ersten wird die Theorie auf compressible Flüssigkeiten ausgedehnt und besonders auf den Fall einer mit dem eigenen Dampfe in Berührung befindlichen Flüssigkeit unter Beibehaltung der Annahme äusserster Homogeneität. Bezüglich dieser Annahme wird gezeigt, die Erscheinung der Zustandsänderung aus Dampf in Flüssigkeit sei so bedeutsam, dass sie es verdiene, alles Licht zu erhalten, das auf sie geworfen werden kann,

und man könne nach der Ansicht des Verfs. eine genügende Vorstellung von ihr geben, ohne die Betrachtung der Molekeln einzuführen. In dem anderen Artikel (III) wird gezeigt, dass gemäss den Principien von Young und Laplace die von einer sehr dünnen Oberflächenschicht herrührende Verringerung der Spannung nicht der Dicke, sondern dem Quadrate der Dicke der Schicht proportional sein dürfte. Gbs. (Lp.)

---

W. C. Röntgen. Ueber die Constitution des flüssigen Wassers. Wiedemann Ann. XLV. 91-97.

Der Verfasser geht von der Hypothese aus, dass das Wasser aus einer Lösung von Eismolekeln in Wassermolekeln bestehe. Die Ueberführung der Molekeln erster Art in die zweiter Art soll mit Ausdehnung und Arbeitsleistung verbunden sein. Mit der Anzahl der gelösten Eismolekeln soll die Reibung wachsen. Auf Grund dieser Annahmen werden die bis jetzt beobachteten Anomalien im Verhalten des Wassers qualitativ erklärt. Diese Anomalien sind: Unregelmässige thermische Ausdehnung, Abnahme der Compressibilität mit steigender Temperatur, Zunahme des Ausdehnungscoefficienten mit dem Druck, Abnahme der Viscosität mit zunehmendem Druck. Der Verfasser ist geneigt, die Annahme der Lösung einer Molekelsorte in einer andern auf alle Flüssigkeiten und selbst auf Gase und feste Körper auszudehnen. Br.

---

C. Raveau. Sur les adiabatiques d'un système de liquide et de vapeur. Almeida J. (3) I. 461-470.

P. Duhem. Sur la détente des vapeurs. Almeida J. (3) I. 470-474.

In dem ersten Artikel erforscht Hr. Raveau die calorimetrischen Eigenschaften der Materie in der Nähe des kritischen Punktes und giebt dann allgemeine Sätze über die Gestalt und Veranlagung der adiabatischen Curven innerhalb und in der Nähe der Sättigungscurve. Die Sätze lauten: Die specifische Wärme $\gamma_2$ der gesättigten Flüssigkeit ist positiv und unendlich beim kritischen Punkte. Die

specifische Wärme $\gamma_1$ des gesättigten Dampfes ist negativ und unendlich beim kritischen Punkte. Im kritischen Punkte hat das Verhältnis $\gamma_1/\gamma_2$ den Wert $-1$. — Innerhalb der Sättigungscurve nimmt der Abstand der adiabatischen Linien, auf einer Parallelen zur Axe der $v$ gemessen, in dem Masse zu, wie die Temperatur sinkt. Beim Eindringen in das Innere der Sättigungscurve brechen sich die adiabatischen Curven, und ihre Richtung nähert sich derjenigen der Axe der $v$. Vom kritischen Punkt aus trennt eine adiabatische und unendlich geringe Druckverminderung Mengen von Flüssigkeit und von Dampf, deren Verhältnis sich von der Einheit um ein Unendlichkleines von der Ordnung der Druckverminderung unterscheidet. Hr. Duhem klärt in dem zweiten Artikel einige Widersprüche auf, welche zwischen den Sätzen des Hrn. Raveau und den Ergebnissen seiner Arbeit „Sur la continuité entre l'état gazeux et sur la théorie générale des vapeurs“ vorhanden sind, die in den Travaux et Mémoires des Facultés de Lille I, 1891 erschienen ist.

Lp.

H. Pellat. De la définition et de la détermination du point critique. Almeida J. (3) I. 225-231.

Der Artikel will den Namen des kritischen Punktes nicht auf die Temperatur $t_c$ bei dem Versuch von Cagniard-Latour angewandt wissen, wo der Meniskus der Flüssigkeit verschwindet, sondern auf den Punkt $C$ bei der Temperatur $T_c$ beschränken, wo nach den Andrews'schen Versuchen und den ihnen nachgebildeten die Isotherme einen Wendepunkt mit horizontaler Wendetangente aufweist.

Lp.

B. Galitzine. Note relative à la température critique. Almeida J. (3) I. 474-478.

Gegenüber den Ausführungen des Hrn. Pellat in dem eben besprochenen Artikel weist der Verf. auf den geringen Betrag von $T_c - t_c$ hin, schlägt eine Versuchsmethode zur genaueren Ermittelung dieser Differenz vor und stellt theoretische Betrachtungen über eine Besonderheit der Materie im kritischen Zustand an.

Lp.

P. de Heen. Variabilité de la température critique. Belg. Bull. (3) XXIV. 96-101.

Die kritische Temperatur nach der Anschauung von Andrews ist eine obere Grenze der kritischen Temperatur nach der Anschauung von Cagniard-Latour, welche letztere veränderlich und nicht constant ist. Mn. (Lp.)

---

D. J. Korteweg. On Van der Waals's isothermal equation. Nature XLV. 277.

Diese Note sowie ein früherer Artikel des Verf. dienen zur Verteidigung der Arbeiten des Hrn. Van der Waals gegen Angriffe von Seiten des Hrn. Tait. Lp.

---

J. D. van der Waals. La valeur de la pression dans les phases coexistantes de mélanges, notamment des solutions salines. Arch. Néerl. XXVI. 91-125.

J. D. van der Waals. La formule de la dissociation électrolytique. Arch. Néerl. XXVI. 126-136.

Uebersetzungen der Abhandlungen, welche in den Amst. Versl. en Meded. (3) VIII. 409-447 und 448-459 veröffentlicht sind. Ein Referat findet sich im vorigen Jahrgange dieses Jahrbuches, S. 1183ff. Mo.

---

P. de Heen. Sur un état de la matière caractérisé par l'indépendance de la pression et du volume spécifique. Belg. Bull. (3) XXIV. 267-285.

Einer bestimmten Temperatur entsprechen unendlich viele gesättigte Dämpfe, welche verschiedene Dichtigkeiten haben. Andere besondere Ergebnisse bezüglich der Dämpfe. Mn. (Lp.)

---

Ch. Antoine. Sur l'équation caractéristique de la vapeur d'eau. C. R. CXIV. 162-163.

Das Gewicht $w$ von einem Kubikmeter Wasserdampf bei der

Temperatur $t$ und dem Druck $H$ wird, wenn $\theta$ die Temperatur des beim Drucke $H$ gesättigten Dampfes bedeutet, durch die Formel dargestellt:

$$w = \frac{19{,}9\,H}{278 - 0{,}365\,\theta + t}.$$

Sbt.

---

Lord RAYLEIGH, J. MACFARLANE GRAY, J. H. COTTERILL, G. H. BAILEY, J. GAMGEE. Superheated steam. Nature XLV. 375-376, 413-414, 438-439, 486.

Lord Rayleigh kritisirt in der ersten Note die Stelle in dem Buche des Herrn Cotterill über die Dampfmaschine: „Wenn ein Ueberheizer benutzt wird, so ist die höhere Temperatur natürlich die des Ueberheizers, die dann nicht dem Drucke im Sieder entspricht“. An diese Kritik wird der Vorschlag geknüpft, das reine Wasser des Dampfkessels durch Salzlösungen zu ersetzen. Die hierauf erfolgenden Antworten schliessen sich der erwähnten Kritik an, bekämpfen aber jenen Vorschlag als durch die Erfahrung und durch die Theorie widerlegt. Lp.

---

G. JÄGER. Die Zustandsgleichung der Gase in ihrer Beziehung zu den Lösungen. Wien. Ber. CI. 553-561.

Auf Grund der Annahme, dass sich die osmotischen Kräfte in eine nach umgekehrten Potenzen der Entfernung fortschreitende Reihe entwickeln lassen, leitet der Verfasser eine Gleichung zwischen Druck und Volumen von Lösungen ab. Die successiven Näherungen dieser Gleichung ergeben der Reihe nach: 1) Das Mariotte'sche Gesetz, 2) die Recknagel'sche Modification, 3) die Gleichung von van der Waals und 4) die von Clausius für Kohlensäure aufgestellte Zustandsgleichung. Br.

---

G. JÄGER. Ueber die Temperaturfunction der Zustandsgleichung der Gase. Wien. Ber. CI. 1675-1684.

Der Verfasser stellt zuerst eine Zustandsgleichung für disso-

ciirte Gase auf, von der er zeigt, dass sie alle Erscheinungen erklärt, da sie auf die in dem Aufsatz auf S. 553-561 derselben Ber. abgeleitete Gleichung hinaus kommt. Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der dabei auftretenden Temperaturfunction, für die der Verfasser eine neue Form aufstellt.

Br.

---

G. Jäger. Zur Theorie der Flüssigkeiten. Wien. Ber. CI. 920-934.

Eine Reihe von Betrachtungen über eine kinetische Theorie der Flüssigkeiten, über die sich schlecht referiren lässt. Im einzelnen wird der Satz abgeleitet, dass die mittlere Moleculargeschwindigkeit bei Flüssigkeiten viel geringer ist als bei Gasen. Ebenso wird für den Dampfdruck eine Formel aufgestellt, die ihn als Function der Temperatur giebt. Sie wird durch die Beobachtung bestätigt gefunden. Die Berechnung des Compressionscoefficienten aus den molecularen Grössen misslingt, weil die Methode der kinetischen Gastheorie in diesem Punkte bei den Flüssigkeiten versagt. Der Verfasser meint deshalb, dass es zweckmässig ist, bei einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten auf quantitative Uebereinstimmung von Theorie und Erfahrung einstweilen zu verzichten.

Br.

---

G. Jäger. Ueber die Art der Kräfte, welche Gasmolekeln auf einander ausüben. Wien. Ber. CI. 1520-1527.

Der Verfasser stellt einen Ausdruck für die Arbeit auf, die notwendig ist, um eine Molekel aus dem Innern einer Flüssigkeit in die Grenzfläche zu bringen. Er kommt dabei auf die gleichen Formeln wie in dem Aufsatz S. 553-561 derselben Ber. und findet die Arbeit negativ. Hieraus folgen für Gase und Flüssigkeiten intramoleculare Abstossungskräfte. Br.

---

G. Jäger. Zur Stöchiometrie der Lösungen. Wien. Ber. CI. 400-414.

Die Arbeit zerfällt in verschiedene Teile. Im ersten Teil

werden aus dem van't Hoff'schen Kreisprocess zwei Gleichungen für die Verdampfungswärme abgeleitet, deren theoretische Bedeutung verhältnismässig gering ist, die aber eine experimentelle Prüfung gestatten. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung wird als genügend gefunden. Der zweite Teil behandelt die Schmelzwärme, wie der erste die Verdampfungswärme. Hier wird der Satz aufgestellt: „Die Schmelzwärme der Lösung ist kleiner als die des Lösungsmittels, und zwar wächst die Verminderung proportional der Zahl der in der Volumeneinheit gelösten Molekeln." Durch diesen Satz wird für den van't Hoff'schen Kreisprocess für Schmelzwärme eine Berichtigung notwendig. Im dritten Teil wird eine Gleichung zwischen specifischer Wärme und Concentration aufgestellt, allerdings nur für den Fall, dass beim Uebergang von der einen Concentration zur anderen weder Wärmetönung noch Volumenänderung stattfindet. Auch diese Gleichung wird durch die Beobachtung bestätigt gefunden. Br.

---

C. Dieterici. Theorie der Lösungswärme und des osmotischen Drucks. — Nachtrag dazu. Wiedemann Ann. XLV. 207-237, 589-590.

Verf. benutzt zunächst Beobachtungen von R. Scholz über die Lösungswärmen einiger Salze, um das v. Babo'sche Gesetz zu prüfen, wonach das Verhältnis $p_w:p_s$ der Dampfspannung des reinen Wassers zu derjenigen einer wässerigen Lösung vom Salzgehalte $s$ unabhängig ist von der Temperatur. Er findet, dass zwischen den Temperaturgrenzen 0 und 100 dies mit einer Sicherheit von etwa 2°/$_0$ zutreffend ist. Mit dieser Annäherung kann man auch die Dampfspannungszunahme einer wässerigen Salzlösung und dadurch ihre Verdampfungswärme nach dem Babo'schen Gesetze berechnen; bei der Berechnung von Lösungswärmen aus der Differenz zweier Verdampfungswärmen oder zweier Dampfspannungszunahmen sind dagegen die Abweichungen von jenem Gesetz entscheidend.

Nachdem den Beobachtungen noch die Bemerkung abgewonnen ist, dass (mit Ausnahme von NaCl) die zur Lösung einer gleichen

Zahl von Molekeln in gleich viel Wasser aufzuwendende Wärme nahezu unabhängig ist von der Natur des Salzes, sucht der Verf. einen anderen Ausdruck für die Lösungswärme zu erhalten. Aus der Betrachtung eines van't Hoff'schen Kreisprocesses, wobei jedoch die beschränkende Annahme sehr verdünnter Lösung aufgegeben wird, folgt, dass, wenn zwei mischbare Flüssigkeiten verschiedener Dampfspannung in Diffusionsverbindung treten, ein Diffusionsdruck zwischen beiden stattfinden muss, dessen Grösse aus der Dampfspannungsdifferenz zu berechnen ist, wenn der Dampf der Mischung nur aus dem Dampfe einer Flüssigkeit besteht. Den hydrostatischen Druck, der diesem Diffusionsdruck gleich und entgegengesetzt ist, nennt Verf. mit van't Hoff den osmotischen Druck der Flüssigkeiten gegen einander. Bei grosser Verdünnung ist dieser der relativen Dampfspannungsverminderung proportional, für concentrirtere Lösungen sind die weiteren Glieder der Reihe für $\log\left(1-\frac{p_w-p_s}{p_w}\right)$ zu berücksichtigen. Der Satz: „Der osmotische Druck ist proportional der absoluten Temperatur", gilt nur für Temperaturen, bei denen für den Dampf des Lösungsmittels das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz gilt, und da auch nur mit dem Grade von Genauigkeit, mit dem das v. Babo'sche Gesetz richtig ist. Wenn demnach auch Analogie zwischen dem Zustande eines Gases und dem der gelösten Materie besteht, so darf dieser doch nicht das Bestehen des Gaszustandes zugeschrieben werden. — Beim Auflösen eines Salzes kann eine gewisse äussere Arbeit, die osmotische Arbeit, geleistet werden; bei dem gewöhnlichen Verfahren des Zusammenmischens von Salz und Lösungsmittel wird sie nicht geleistet, und deshalb ist der Lösungsvorgang irreversibel. Als die Kräfte, die osmotische Arbeit leisten, sind moleculare Druckkräfte kinetischen Ursprungs zwischen Salz und Lösungsmittel anzusehen. — Die Raoult'schen Dampfspannungsgesetze sind dem Verf. erklärbar durch Anschauungen, die der kinetischen Gastheorie entlehnt sind.

Zu den im Nachtrage enthaltenen Bemerkungen wird der Verf. durch die Einwände veranlasst, die L. Meyer gegen van't Hoff erhoben hat. Sbt.

Lothar Meyer. Ueber den sogenannten osmotischen Druck. Wiedemann Ann. XLVI. 167-168.

Veranlasst durch die Bemerkungen von Dieterici (Wiedemann Ann. XLV. 589) hebt der Verf. die Hauptgedanken seiner beiden Abhandlungen: Z. f. physik. Chemie (1890), V. 23 und Berl. Ber. 1891. 993 noch einmal kurz hervor. Sbt.

---

T. N. Thiele. Jagttagelsestheoretiske Regninger angaaende Bestemmelser af Prof. Dr. Jul. Thomsen af Varmefylde og Vaegtfylde for visse Stoffens vandige Oplösninger. Kjöb. Overs. 1892. 71-141.

Herr Thomsen in Kopenhagen hat in den Schriften der Gesellschaft der Wissenschaften und in seinen „Thermochemischen Untersuchungen“ eine grosse Reihe von Beobachtungen über die specifische Wärme und das specifische Gewicht von wässerigen Lösungen verschiedener Stoffe gegeben. Diese Beobachtungen werden jetzt von Herrn Thiele einer Ausgleichungsrechnung unterworfen.

Ausser dem Interesse, welches die Resultate für den Chemiker haben, ist die Abhandlung auch wichtig für den Mathematiker; für ihn sind die einleitenden Bemerkungen über den Zweck und die Ausführung der Rechnungen beachtenswert. Interessant sind auch die Betrachtungen über die Bedeutung der Resultate und die Anweisungen, welche der Verf. für die Ausführung weiterer Beobachtungen giebt, um die genauesten und besten Resultate zu erlangen. V.

---

W. Ostwald. Solutions. Translated by M. M. Pattison Muir. London. Longmans, Green, and Co. 316 S. [Nature XLV. 193-195.]

W. Ostwald, J. W. Rodger. The theory of solutions. Nature XLV. 293-294, 342-343, 415, 487, 606.

In Anknüpfung an die (übrigens anerkennend abgefasste) Recension der englischen Uebersetzung des Ostwald'schen Buches über Lösungen erfolgt ein Austausch von Meinungen über abweichende Ansichten. Lp.

---

H. le Chatelier. Sur le principe du travail maximum. C. R. CXV. 167-169.

„Wenn mehrere chemische Reactionen möglich sind, so entspricht diejenige, welche schliesslich danach drängt, sich geltend zu machen, der Erzeugung des Maximums an Arbeit.“ Bemerkungen über dieses Princip in Vergleich mit der Berthelot'schen Auffassung desselben. Lp.

W. Gef. Die Wärmequelle der Gestirne in mechanischem Mass, ein Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie. Heidelberg und Leipzig. 11 S. 8°. Sbt.

---

O. Lummer und F. Kurlbaum. Bolometrische Untersuchungen. Wiedemann Ann. XLVI. 204-224.

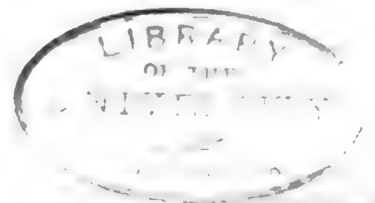
Mitteilung über die Herstellung und den Gebrauch eines von den Verfassern construirten Flächenbolometers. Sbt.

K. Fuchs. Ueber die Berechnung der Centrifugalregulatoren. Zeitschr. Oestr. Ing. u. Arch. XLIV. 428-432.

Sind die Elemente eines Regulators gegeben, so entspricht jeder Entfernung $r$ der schwingenden Masse eine bestimmte Höhe $h = f(r)$ des Gegengewichtes; soll der Regulator gewissen Bedingungen genügen, so muss bei voller Erfüllung derselben zwischen diesen Grössen ein anderer Zusammenhang $h' = \varphi(r)$ bestehen. Es kommt also darauf an, durch passende Wahl der Elemente des Regulators die erste Gleichung der zweiten möglichst anzupassen. Wie das für gewisse Fälle praktisch durchzuführen sei, wird in der vorliegenden Abhandlung gezeigt. F. K.

---

J. A. Longridge. L'artillerie de l'avenir et les nouvelles poudres. Étude sur l'application des nouvelles poudres aux canons à grande puissance. Traduit de l'anglais par G. Moch. Revue d'Art. XL. 352-368, 440-465; XLI. 48-65, 136-156.



Hr. Longridge kämpft seit dreissig Jahren für die Umwandlung der jetzt gebräuchlichen Geschützrohre in solche mit Drahtumwickelung (vergl. F. d. M. XX. 1888. 1089). Die Einführung der neuen Pulverarten, welche den Geschossen eine viel höhere Anfangsgeschwindigkeit erteilen, hat ihm jetzt die Veranlassung gegeben, sein Lieblingsthema unter diesem neuen Gesichtspunkte abermals zu behandeln. Einer Broschüre über das rauchlose Pulver und seinen Einfluss auf die Construction der Kanonen vom Jahre 1890 liess er 1891 die Schrift folgen „The artillery of the future and the new powders“. Von dieser hat Hr. Moch, welcher für die Verbreitung der Ideen des Verfassers in Frankreich seit Jahren thätig ist (vergl. F. d. M. XVIII. 1886. 981, XIX. 1887. 1063), eine freie Uebersetzung und teilweise Bearbeitung für die Leser der Revue d'Artillerie veranstaltet. Wir geben hier die Capitelüberschriften wieder: I. Vorbemerkungen. II. Ueber die Wirkung der „crushers“. III. 1. Ueber die Druckcurven. 2. Formel für den grössten Druck am Verschlussstück. 3. Formel für die entwickelte Energie. 4. Absoluter Druck des Nobel'schen Pulvers. 5. Bestätigung der Formeln. 6. Das Cordit. 7. Das Pulver BN. 8. Vergleich der drei Pulver. Nachtrag. Note A: Ueber den Wert des Exponenten $\gamma$. Note B: Einfluss der Entzündungsart der Ladung. IV. Bemerkungen über die vorangehenden Formeln und über die Druckcurven des Generals Wardell. Note C: Ueber die Dissociation. V. Wahrscheinliche Wirkung der neuen Pulverarten auf die Construction und den Schuss der Feuerrohre. VI. Folgerungen. Der Verfasser erblickt in allen seinen Betrachtungen neue Gründe für den von ihm befürworteten Uebergang zu Feuerrohren mit Drahtumwickelung. Lp.

---

## B. Gastheorie.

**A. Leray.** Mémoire sur la théorie cinétique des gaz.

Ann. de chim. et phys. (6) XXV. 89-118.

Der Verfasser findet die Begriffe der Temperatur und des

vollkommenen Gases zu dunkel, um sie zum Aufbau der kinetischen Gastheorie zu verwenden. Indem er daher von der Formel $p = \frac{1}{3}\delta u^2$ für den mittleren Druck auf die Oberflächeneinheit ausgeht, definirt er die Wärmemenge $q$ einer Molekel von der Masse $m$ durch die mittlere Energie ihrer Vibrationsbewegung, und dieser selbe Ausdruck stellt auch für ihn ihre absolute Temperatur $T$ dar, so dass $T = q = \frac{1}{2}mw^2$ ist. Der Uebergang von einer Molekel zu einer beliebigen Masse $M$ aus $N$ Elementen, jedes von der Masse $m$ und von individueller Vibration, wird durch Multiplication mit $N$ gemacht, also $Q = \frac{1}{2}Nmw^2 = \frac{1}{2}Mw^2$. Wenn die Elemente $m$ der Masse verschiedene Wärmemengen besitzen, so kann die Temperatur als Mittelwert angenommen werden. $T = \frac{1}{2}\Sigma mw^2/N = Q/N$. — Um den Begriff eines vollkommenen Gases aufzustellen, werden an einer Molekel zuerst drei Geschwindigkeiten $u$, $w$, $\omega$ der Translation, Vibration, Rotation unterschieden. Wenn das Gas ein festes Volumen hat, das durch äussere Umstände nicht gewandelt wird, so bewahren die kinetischen Energien der drei Bewegungen ein constantes Verhältnis, und man darf $u^2 = aw^2$, $\omega^2 = bw^2$ setzen, wo $a$ und $b$ constant sind. „Ein vollkommenes Gas ist für uns ein Gas, bei welchem die Anzahl der Molekeln constant ist und dessen Energien constante Verhältnisse haben“. Auf Grund dieser Begriffsbestimmungen werden die Hauptsätze der Gastheorie bewiesen: Angenäherte Gesetze der vollkommenen Gase, Gesetze von Mariotte, Gay-Lussac und Laplace, genauere Gesetze der vollkommenen Gase, das Carnot'sche Princip in den Gasmaschinen, Störungen wegen der Schwankungen von $N$, specifische Wärme der vollkommenen Gase, Gesetz der specifischen Wärmen, Bestätigung der kinetischen Gastheorie durch den Versuch.

Lp.

---

L. Boltzmann. III. Teil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft. Münch. Ber. XXII. 329-358.

Anknüpfend an Maxwell's Abhandlung „On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy“ (Cambr. Trans. XII, F. d. M. XI. 1879. 776), corrigirt der Verfasser ein Ver-

sehen, das dessen Beweisführung enthielt, und setzt an Stelle des Maxwell'schen Satzes, „dass die mittlere lebendige Kraft für jede Coordinate den gleichen Wert hat“, den anderen Satz: dass der Mittelwert der auf jedes Momentoid entfallenden lebendigen Kraft derselbe ist. Unter „Momentoiden“ ($\alpha$) versteht er dabei lineare Functionen der zu den generalisirten Coordinaten $b$ (Maxwell) gehörigen Momente $a$, so dass

$$\alpha_h = \sum_{k=1}^{k=n} c_{kh} . a_k .$$

Es bleibt dann auch der von Maxwell angeführte Satz richtig, dass die mittlere lebendige Kraft zweier gegebenen Teile des Systems sich so verhält wie die Zahl ihrer Beweglichkeitsgrade. Insbesondere gilt er für mehratomige Gasmolekeln, deren Zustand durch verallgemeinerte Coordinaten bestimmbar ist. Auch des Verfassers Beweis des zweiten Hauptsatzes (J. für Math. C. 201) bleibt richtig, wenn unter $q_h$ nicht die zu den Coordinaten $p_h$ gehörigen Momente, sondern die Momentoide verstanden werden.

Die allgemeinen Sätze werden durch Anwendung auf die von Lord Kelvin als Stichproben vorgeschlagenen speciellen Fälle ausführlich erläutert. Sbt.

---

A. H. LEAHY. On the law of distribution of velocities in a system of moving molecules. Cambr. Proc. VII. 322-327. (1892.)

Die Arbeit enthält einen neuen Beweis für das Maxwell'sche Gesetz über die Verteilung der Geschwindigkeiten, der sich von dem Boltzmann'schen Beweise und der von Burbury gegebenen Modification des letzteren (Phil. Mag. (5) XXX. 298-317, F. d. M. XXII. 1890. 1176) durch etwas grössere Kürze unterscheidet.

Gz.

---

S. H. BURBURY. On the collision of elastic bodies. Lond. R. S. Phil. Trans. CLXXXIII. 407-422.

Enthält allgemeine mathematische Forschungen im Zusammenhang mit der Maxwell-Boltzmann'schen Lehre betreffs der Vertei-

lung der Energie zwischen einer Anzahl von gegenseitig auf einander einwirkenden Körpern und Anwendungen der Theorie auf verschiedene Probefälle. Cly. (Lp.)

H. W. Watson. On the Boltzmann-Maxwell law of partition of kinetic energy. Nature XLV. 512-513.

W. Burnside, S. H. Burbury. Prof. Burnside's paper on the partition of energy, R. S. E., July 1887. Nature XLV. 533-534.

In dem Berichte, welchen die Herren Bryan und Larmor für die Section A der British Association über Thermodynamik verfasst haben, ist unter Berufung auf eine Arbeit des Hrn. Burnside (F. d. M. XIX. 1887. 1181) die Ansicht ausgesprochen, dass das Maxwell-Boltzmann'sche Gesetz der Verteilung der kinetischen Energie, wie zweifellos bewiesen sei, in dieser allgemeinen Form nicht gelte. Dem gegenüber weist Hr. Watson darauf hin, dass Hr. Burbury erst neuerdings in der Arbeit des Hrn. Burnside einen Fehler nachgewiesen habe, und dass nach Verbesserung desselben das dort behandelte Beispiel im Gegenteil das fragliche Gesetz bestätige. Der grössere Teil der ersten Note hat dann weiter den Zweck, den Vorwurf der Unklarheit zurückzuweisen, welcher von Hrn. Burnside gegen den Verfasser wegen seiner Verfolgung des Boltzmann'schen Gedankenganges erhoben worden war. In den beiden folgenden Noten wird zuerst von Hrn. Burnside sein Fehler eingestanden, dann von Hrn. Burbury genauer erläutert, worin derselbe bestehe. Lp.

Lord Rayleigh. Remarks on Maxwell's investigation respecting Boltzmann's theorem. Phil. Mag. (5) XXXIII. 356-359.

Die kritischen Betrachtungen von Sir W. Thomson (Lond. R. S. Proc. 1891) und von Hrn. G. H. Bryan (Brit. Assoc. 1891) werden kurz erörtert. Es wird darauf hingewiesen, dass Maxwell bei seinem Beweise dafür, dass die mittlere kinetische Energie, die jeder

Veränderlichen entspricht, die nämliche sei (Collected works II. 722), seine Aufmerksamkeit auf Systeme in einer gegebenen Configuration beschränkt, und dass keine Dynamik auf den reducirten Ausdruck für die kinetische Energie gegründet wird. Die Reduction kann auf unendlich viele Arten geschehen. Eine Erläuterung wird an dem Falle eines Billardballes gegeben; die grundlegende Annahme ist die, dass, abgesehen von Ausnahmefällen, das von einem gegebenen Punkt ausgehende Teilchen früher oder später durch jenen Punkt nach jeder Richtung laufen wird, und die auf diese Annahme sich gründende Schlussfolgerung geht dahin, dass in dem langen Laufe alle Richtungen durch den Punkt gleich günstig sind. Die Schwierigkeiten der Maxwell'schen Forschung scheinen dem Lord Rayleigh mehr in den Prämissen als in den Folgerungen zu liegen, und wenn die Vorführung besonderer Fälle, für welche die Hypothese ungültig wird, leicht ist, so dreht sich in Wahrheit die Frage darum, wie weit die von Maxwell angestellten Betrachtungen uns dazu berechtigen, diese Fälle als zwei Ausnahmefälle im Widerspruch mit dem allgemeinen Satze bei Seite zu schieben, der jedenfalls in seinen Anwendungen auf die Physik wesentlich die Wahrscheinlichkeit für sich hat. Am Schlusse der Note wird ein Beweis für die Maxwell'sche Formel angehängt:

$$dq'_1 \dots dq'_n . dp'_1 \dots dp'_n = dq_1 \dots dq_n . dp_1 \dots dp_n .$$

Gbs. (Lp.)

---

H. W. Watson. On a proposition in the kinetic theory of gases. Nature XLVI. 29-30.

Gegenüber der Kritik, welche Lord Rayleigh im Philos. Mag. an einem Maxwell'schen Beweise aus der kinetischen Gastheorie geübt hat, weist der Verf. darauf hin, dass Hr. Boltzmann schon 1882 einen ähnlichen Einwand erhoben hatte (Philos. Mag.), und setzt den Gedankengang des Hrn. Boltzmann bei einem zu diesem Zwecke ersonnenen Problem auseinander. Die directe Verwendung desselben für einen vom Verf. gemachten Vorschlag erweist sich dagegen als unausführbar. Lp.

Lord KELVIN. On a decisive test-case disproving the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of kinetic energy. Lond. R. S. Proc. LI. 397-399.

Das System wird als aus drei Körpern $A$, $B$, $C$ bestehend angenommen, die alle in einer geraden Linie $KHL$ beweglich sind; dasselbe liefert unter gewissen Bedingungen, wie der Verf. es sich vorstellt, einen Probefall für die Temperaturtheorie und entscheidet über die Annahme, dass die Temperatur eines festen oder flüssigen Körpers gleich seiner durchschnittlichen kinetischen Energie im Atom sei. Cly. (Lp.)

E. P. CULVERWELL. Lord Kelvin's test case on the Maxwell-Boltzmann law. Nature XLVI. 76.

H. W. WATSON, S. H. BURBURY. Maxwell's law of distribution of energy. Nature XLVI. 100-101.

Die Verf. bestreiten in ihren Noten die Bedeutung des von Lord Kelvin construirten Beispieles, als eines gegen das Maxwell-Boltzmann'sche Gesetz zeugenden Falles. „Wir werden zu dem Schlusse gedrängt, dass Maxwell's Gesetz in Wahrheit nur der Grenzfall ist, dem ein materielles System sich nähert, sobald wir die Anzahl seiner Freiheitsgrade ohne Beschränkung vergrössern. Auf alle Fälle tritt es klar zu Tage, dass in den Fällen, wo das Gesetz versagt, sein Versagen von der Einführung irgend welcher Beschränkungen über die Freiheit der Bewegung herrührt, besonders betreffs der Richtung ....“ Lp.

---

P. G. TAIT. On impact, II. Edinb. Trans. XXXVII. 381-397.

Fortsetzung früherer Untersuchungen über diesen Gegenstand. Cly. (Lp.)

---

H. PETRINI. Om gasers jämvigt under inverkan af gravitationen. Stockh. Öfv. XLIX. 559-569.

Ein Beitrag zur Theorie des Gleichgewichts der Gase unter Einfluss der Gravitation.

Die Gasmenge hat die Form einer sphärischen Hülle; Temperatur, Dichtigkeit und Druck sind Functionen nur von der Entfernung ($r$) vom Mittelpunkte. Ausserdem werden mehrere vereinfachende Annahmen gemacht.

Der Verf. beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Nachweise, dass gewisse, von W. Thomson bei der Behandlung desselben Problems gemachte Annahmen inbetreff der Temperatur nicht mit einander vereinbar sind, und behauptet im Gegensatz zu denselben, dass, wenn die Gasmasse endliche Ausdehnung hat, die Function $f(r)$, welche die Temperatur darstellt, für $r = 0$ unendlich wird, und umgekehrt. Bdn.

C. Puschl. Zur Elasticität der Gase. Wien. Ber. CI. 541-552.

Eine Reihe von allgemeinen Ueberlegungen über die functionelle Abhängigkeit von Compressibilität und $p.v$ von Druck und Temperatur, namentlich hinsichtlich der dabei auftretenden Maxima und Minima. Br.

H. A. Hazen. A question in physics. Nature XLVI. 55.

Erörterungen über die Frage, ob ein Gas zusammengedrückt werden kann, ohne dass es sich merklich erwärmt, ob es sich ausdehnen kann ohne merkliche Abkühlung. Lp.

## C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

J. Brill. A property of the equation of conduction of heat. Messenger (2) XXI. 137-139.

Es wird gezeigt, dass, wenn $f(x, y, z, t)$ eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

ist, dann auch der Ausdruck

$$t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}} f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, -\frac{1}{t}\right)$$

ebenfalls eine Lösung giebt. Glr. (Lp.)

---

A. Berget. Méthode optique pour déterminer la conductibilité thermique des barres métalliques. C. R. CXIV. 1350-1352.

Werden zwei Metallstäbe von gleicher Länge, gleichem Querschnitt und gleicher Oberflächenbeschaffenheit am einen Ende auf die gleiche Temperatur erwärmt, so gilt für ihre Verlängerungen $\Delta l$ und $\Delta_1 l$ die Beziehung $\frac{\Delta l}{\Delta_1 l} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \sqrt{\frac{k}{k_1}}$. Wird das Verhältnis $\frac{\Delta l}{\Delta_1 l}$ nach optischen Methoden experimentell bestimmt, und sind die linearen Ausdehnungscoefficienten $\lambda$ und $\lambda_1$ bekannt, so lässt sich das Verhältnis der Coefficienten der inneren Leitungsfähigkeit ermitteln. Sbt.

---

Ch. Soret. Sur la conductibilité thermique dans les corps cristallisés. C. R. CXIV. 535-537.

Bemerkungen über die Bestimmung der Coefficienten der Leitungsfähigkeit von Krystallen. Sbt.

---

A. Winkelmann. Zu den Bemerkungen des Hrn. Graetz: „Ueber die Wärmeleitung der Gase“. Wiedemann Ann. XLVI. 323-332.

Hr. Graetz war in seinen „Bemerkungen“ (Wiedemann Ann. XLV. 298-303) zu dem Resultat gekommen, dass die Abweichungen von seinen absoluten Zahlen, die andere Beobachter gefunden hätten, ent-

weder durch falsche Berechnung oder durch nicht einwurfsfreie Versuche hervorgerufen seien. Diese Bemerkungen waren gegen Hrn. Winkelmann und Hrn. Schleiermacher gerichtet. Verfasser hält dem gegenüber die Einwände, die er früher gegen die Graetz'schen Versuche erhoben hat, aufrecht und sucht seine Methode der Berechnung der absoluten Werte der Wärmeleitung zu rechtfertigen.

Sbt.

---

P. Appell. Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. Journ. de Math. (4) VIII. 187-216.

Bericht auf S. 373 dieses Bandes.

---

# Zwölfter Abschnitt.

## Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

### Capitel 1.

### Geodäsie.

N. Jadanza. Un nuovo apparato per misurare basi topografiche. Torino Atti XXVII. 911-922.

Beschreibung eines Basisapparates zur Messung topographischer Grundlinien, der sich im Princip eng an den bekannten Brunner'schen oder Ibañez'schen Apparat zur Messung genauer geodätischer Grundlinien anschliesst. Die vorgenommenen, durchgreifenden Vereinfachungen erscheinen nach den Ergebnissen einer Probemessung zweckentsprechend. Bö.

---

W. Jordan. Der Distanzstab. Jordan Z. f. V. XXI. 525-528.

Der Verfasser leitet eine praktische Formel für den Fall ab, dass eine Entfernung dadurch bestimmt werden soll, dass von dem einen Punkt aus die Winkel zwischen der über dem zweiten Punkt befindlichen Mitte und den beiden Enden eines sonst beliebig horizontal liegenden Massstabes gemessen sind. Es folgen noch einige Betrachtungen über die Genauigkeit dieses Verfahrens.

Bö.

---

J. Lederer. Algunas observaciones respecto a las constantes del elipsoide terrestre. Anales de la Sociedad cientifica argentina. XXXII.

Vortrag in dem argentinischen wissenschaftlichen Verein über die Methoden zur Bestimmung der Constanten des Erdellipsoids; Berechnung dieser Constanten und Vergleich der erzielten Ergebnisse mit einigen Meridianmessungen, die der Verfasser bei der Berechnung dieser Constanten nicht mit hinein gezogen hatte.

Tx. (Lp.)

---

G. Ciscato. Sulle formole fondamentali della trigonometria sferoidica date da G. H. Halphen. Ven. Ist. Atti (7) III. 1087-1109, 1333-1371.

Nach dem VII. Capitel des 2. Bandes von Halphen's „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications" werden die von Halphen gegebenen Formeln für die Uebertragung geographischer Coordinaten zum Teil auf besonderem Wege abgeleitet. Es zeigt sich indessen, dass diese Formeln in der vorliegenden Form die nötige Genauigkeit aus gewissen Gründen nicht besitzen. Der Verfasser leitet aus ihnen nun zunächst die von Winterberg und von Bachoven van Echt entwickelten Formelsysteme ab. Sodann entwickelt er aber aus dem Halphen'schen Formelsystem noch ein neues, das die Unzuträglichkeiten jenes durch Einführung eines neuen, dritten Hülfswinkels vermeidet. Es ist zwar ausgedehnter als die beiden andern oben erwähnten Systeme, führt aber immer zu sehr genauen Resultaten. Dies wird an dem Beispiel Moskau-St. Jago nachgewiesen. Bö.

---

F. Guarducci. Sulla determinazione degli azimut della geodetica che passa per due punti dell'ellissoide terrestre. Torino Atti. XXVII. 458-467.

Das Dalby'sche Theorem giebt die Meridianconvergenz der Normalschnitte zwischen zwei Punkten der Erdoberfläche bis auf Glieder fünfter Ordnung genau. Der Verfasser verbindet hiermit den von Weingarten gegebenen Ausdruck für den Unterschied der

Azimute der geodätischen Linie und des dazu gehörigen Verticalschnitts in den beiden Punkten und leitet hieraus folgende Formel für die Meridianconvergenz $z_2 - z_1$ der geodätischen Linie ab:

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1) = \log\left[\frac{\sin L_m}{\cos \frac{1}{2} \Delta L} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Delta \theta\right] + \frac{M}{12} \frac{e^2 s^2}{N_1^2} \cos^2 L_1 + \cdots,$$

wo $L_m = \dfrac{L_1 + L_2}{2}$ das arithmetische Mittel der geographischen Breiten ist, und wo $\Delta L$ und $\Delta\theta$ die Breiten- und Längenunterschiede sind, während die übrigen Buchstaben die üblichen Bedeutungen haben. Die Länge der geodätischen Linie braucht man hierbei nur ganz angenähert zu kennen. Die Azimute selbst erhält man sodann mit Hülfe der strengen Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z_2 + z_1) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(u_2 + u_1) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1),$$

wo $u_1$ und $u_2$ die reducirten Breiten bedeuten. Die so berechneten Azimute sind auch bis auf Glieder fünfter Ordnung genau. Zwei Beispiele erläutern schliesslich noch diese Methode. Bö.

---

Hatt. Des coordonnées rectangulaires en géodésie. C. R. CXIV. 1248-1250.

Soweit sich aus diesem Auszug aus einer grösseren Abhandlung des Verfassers schliessen lässt, handelt es sich nur um die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes nach vermittelnden Beobachtungen, wobei die Verbesserungen angenähert bekannter rechtwinkliger Coordinaten als Unbekannte auftreten. Dieses Verfahren ist indessen schon längst bis in seine letzten Consequenzen entwickelt und auch bereits vielfach in grösserem Umfange praktisch angewandt worden. Bö.

---

Hatt. Application d'un système conventionnel de coordonnées rectangulaires à la triangulation des côtes de Corse. C. R. CXV. 459-461.

Es wird vorgeschlagen, die gewöhnlichen rechtwinkligen, sphärischen Coordinaten unter gewissen Voraussetzungen und Vorsichtsmassregeln auch für ausgedehntere Vermessungen anzuwenden.

Bö.

---

Nell. Geometrische Aufgabe. Jordan Z. f. V. XXI. 497-503.

Ausführliche Behandlung einer ganz speciellen Aufgabe über die Teilung eines Vierecks. Bö.

---

W. Veltmann. Zur Theorie der Beobachtungsfehler. Astr. Nachr. CXXXI. 1-15.

Es wird bemerkt, dass der Uebergang von einer endlichen Zahl zu einer unendlichen Zahl von Elementarfehlern und damit zu einem Fehlergesetz bei Hagen und Encke verfehlt ist. Deshalb wird hier eine mathematisch strenge Herleitung gegeben. Ist $2.2n$ die Anzahl der Elementarfehler, $\varepsilon$ die absolute Grösse eines solchen, so muss man, um zum Gauss'schen Fehlergesetz zu gelangen, das Product

$$n\varepsilon^2$$

einer festen Grenze $=\frac{1}{4h^2}$ sich nähern lassen. Unerfindlich ist, weshalb der Verfasser diese Grenze zuerst als Function des wirklichen Fehlers in die Betrachtung einführt, da doch von vorn herein $n$ und $\varepsilon$, so lange sie endlich sein sollen, als constant angesehen werden müssen, um über die Wahrscheinlichkeit irgend etwas auszumachen. Dz.

---

N. Herz. Zur Auflösung der Normalgleichungen. Astr. Nachr. CXXIX. 353-356.

Diese Notiz enthält die unbestimmte Auflösung von $r$ Normalgleichungen (mit der Beschränkung auf $r \leqq 8$) mit Hülfe der Determinanten in allbekannter Form. Zur Berechnung der Determinanten wird die $(r-4)$-malige Anwendung des Gauss'schen Algorithmus empfohlen. Referent kann einen Vorteil bei Anwendung dieses Verfahrens gegenüber dem allgemein üblichen nicht erblicken. Bö.

---

F. J. van den Berg. Over een vraagstuk, dat in de geodesie van dienst kan zijn. Nieuw Archief XIX. 151-187.

Wenn man die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes, worin Rich-

tungen gemessen sind, zu vereinfachen versucht, indem man die Ausgleichung in zwei Teile zerlegt nach der von Schleiermacher für den Fall, wo Winkel gemessen sind, angegebenen Methode, so gerät man auf die nachstehende Aufgabe: Für jedes der Dreiecke eines beliebigen Dreiecksnetzes eine Zahl zu finden, derart dass jedesmal die Summe der Ueberschüsse dieser Zahl über diejenige der drei anschliessenden Dreiecke einen gegebenen Wert hat, wobei für den Fall, dass ein Dreieck an weniger als drei andere sich anschliesst, als Wert jener Zahl für jedes der fehlenden Dreiecke die Null angenommen werde.

Unter einigen einfachen Annahmen wird eine Lösung dieses Problems mitgeteilt, die in dem speciellen Falle einer einzigen Dreieckskette fast ganz mit der von Hrn. P. Simon in den „Gewichtsbestimmungen für Seitenverhältnisse in schematischen Dreiecksnetzen“ veröffentlichten übereinstimmt. Bei einem in bestimmtem Sinne durchlaufenen Netze, wo jedes Dreieck nur an ein vorhergehendes und ein nachfolgendes sich anschliesst, wird eine Beziehung zwischen den drei gesuchten Zahlen für drei beliebig daraus gewählte Dreiecke hergeleitet. Denkt man sich die Dreiecke der Reihe nach mit Indices versehen, und wählt man aus dem Netze diejenigen mit den Indices $p-q$, $p$ und $p+q'$; bezeichnet man weiter die zu diesen Dreiecken gehörigen gesuchten Zahlen mit mit $x_{p-q}$, $x_p$ und $x_{p+q'}$, die gegebenen Werte der Summe der Ueberschüsse mit $a_{p-q}$, $a_p$, $a_{p+q'}$, so besteht die Identität:

$$3x_{p-q+k} - x_{p-q+k+1} - x_{p-q+k-1} = a_{p-q+k},$$

wenn $k=1, 2, \ldots, q+q'-1$. Wählt man hieraus die zu $k=1, 2, \ldots, q$ gehörigen Gleichungen und multiplicirt dieselben der Reihe nach mit $z^k$, wo $z$ eine beliebige Grösse ist, so lässt die Summe dieser Producte durch die Annahme $1-3z+z^2=0$ sich bedeutend vereinfachen. Setzt man noch $\cos 2\alpha = \frac{3}{2}$, so sind $e^{\pm 2\alpha i}$ die beiden Wurzeln der Gleichung in $z$, und aus den beiden mit diesen Wurzeln correspondirenden Gleichungen kann nun $x_{p-q+1}$ eliminirt werden, wodurch sich ergiebt:

$$x_{p-q} \sin 2\alpha - x_p \sin 2(q+1)\alpha + x_{p+1} \sin 2q\alpha = -\sum_1^q {}_k\, a_{p-q+k} \sin 2k\alpha.$$

In gleicher Weise erhält man aus der Identität

$$3x_{p+q'-k} - x_{p+q'-k-1} - x_{p+q'-k+1} = a_{p+q'-k}$$

für $k = 1, 2, \ldots, q'-1$ die Relation

$$x_{p+q'} \sin 2\alpha - x_{p+1} \sin 2q'\alpha + x_p \sin 2(q'-1)\alpha = -\sum_1^{q'-1} a_{p+q'-k} \sin 2k\alpha,$$

und in Verbindung mit dem vorigen Resultat kann nun $x_{p+1}$ eliminirt werden, so dass eine Beziehung zwischen $x_{p-q}$, $x_q$, $x_{p+q'}$ übrig bleibt.

Diese Formel wird nun zunächst auf eine einfache Dreieckskette und einen Dreiecksring angewandt. Erweiterung der Resultate für den Fall, wo sich ausserdem Querdreiecke anschliessen, welche nicht unter einander oder mit anderen Dreiecken zusammenhängen. Voller Dreiecksring mit an die Aussenseite anschliessendem Ring. Ring von Dreiecksringen. Zwei Dreiecksketten neben einander. Mo.

J. Domke. Beiträge zur theoretischen und rechnerischen Behandlung der Ausgleichung periodischer Schraubenfehler. Berlin. J. Springer. III + 46 S. 8°.

Der Verfasser giebt zunächst eine Entwickelung der Bessel'schen Methode für die Ausgleichung periodischer Schraubenfehler im allgemeinen. Sodann werden verschiedene Näherungsmethoden behandelt und für sie Rechenvorschriften abgeleitet. Ausser Genauigkeitsuntersuchungen und Vorschlägen für die günstigste Anordnung der Beobachtungen und ausser einer Lösung der Aufgabe mit Hülfe der graphischen Interpolation wird auch noch ein vollständiges Beispiel nach den verschiedenen Methoden berechnet.

Bö.

F. Fuhrmann. Beitrag zur Ausgleichung nach der Coordinatenmethode. Jordan Z. f. V. XXI. 654-657.

Anstatt aus den Fehlergleichungen für die einzelnen Stationen die Nullpunktscorrectionen zu eliminiren, schlägt Verfasser vor, diese Fehlergleichungen ohne Nullpunktscorrection anzusetzen und dafür noch je eine neue Fehlergleichung von solcher Form hinzu-

zufügen, dass die aus diesem System abgleiteten Normalgleichungen richtig erhalten werden. Bö.

---

M. d'Ocagne. Ueber die Bestimmung des wahrscheinlichsten Punkts aus einer Anzahl zu seiner Ermittelung gegebener Geraden. Jordan Z. f. V. XXI. 618-619.

Vergl. das Referat über die Originalmitteilung in den C. R. auf S. 202-203 dieses Jahrgangs der F. d. M. Bö.

---

### Weitere Litteratur.

M. Bock. Die Photogrammetrie. (Terrainaufnahme auf photographischem Wege.) Mitt. üb. Art. u. Gen. XXIII. 13-39.

F. Croy. Die Tachymetrie und ihre Anwendung bei der Aufnahme von Waldungen. Mit Anhang: Karte und Beschreibung der tachymetrischen Aufnahme des Choltitzer Thiergartens. Für Studirende, technische, land- und forstwirtschaftliche Lehranstalten, sowie für praktische Ingenieure und Geometer. Wien. Perles. VII + 134 S. 8°.

F. G. Gauss. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst. 2. Aufl. 1. Teil: XIV + 620 S. 2. Teil: 96 S. Halle. Strien. 8°.

C. M. Goulier. Études théoriques et pratiques sur les levers topométriques et en particulier sur la tachéométrie. Paris. Gauthier-Villars et Fils.

J. H. Graf. Bibliographie der Landesvermessung und Karten der Schweiz, ihrer Landstriche und Kantone. Bern. XVII + 193 S.

H. Gross. Die einfacheren Operationen der praktischen Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten etc. 3. Aufl. Stuttgart. Wittwer's Verlag. VIII + 94 S. Mit 107 Holzschnitten. 8°.

F. HARTNER. Handbuch der niederen Geodäsie. In V., VI. u. VII. Aufl. bearbeitet und vermehrt von J. Wastler. 7. Aufl. Wien. Seidel & Sohn. XIV u. 800 S. Mit Fig. 8°.

Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geogr. Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten 2. Ordnung. Neudruck. Berlin. Mittler & Sohn. 24 S. schmal gr. 8°.

G. SCHRÖDER. Architektur- und Gelände-Aufnahme, unter Mitwirkung der Photographie, und die einschlägigen Instrumente. Arch. für Art. XCIX. 305-338.

G. SCHRÖDER. Die neuesten Messbild - Instrumente. Ibid. 449-475.

O. SEIFFERT. Logarithmische Hülfstafel zur Berechnung der Fehlergleichungs - Coefficienten beim Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate. Halle.

A. WÜST. Leichtfassliche Anleitung zum Feldmessen und Nivelliren. Für praktische Landwirte und landwirtschaftliche Lehranstalten bearbeitet. 3. Auflage. Berlin. Parey. VI u. 154 S. Mit 114 Abbild. 8°.

## Capitel 2.
## Astronomie.

R. WOLF. Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur. II. Band, 3. und 4. Halbband. Zürich. F. Schulthess. 658 S. gr. 8°.

Bei dem Berichte über den ersten Band (F. d. M. XXII. 1890. 54 und XXIII. 1891. 1212) haben wir bereits den Plan und die Anlage dieses inhaltreichen Werkes dargelegt. Das vorliegende dritte Buch (S. 1—320) trägt den Titel: „Theorie der Instrumente und Messungen“.

Es beginnt mit einer Geschichte und Theorie der älteren und neueren astronomischen Instrumente (Capitel XIII, S. 1-60). In dem folgenden Capitel (S. 61-121) werden die Methoden der Alten bei absoluten Messungen, sowie die neueren Methoden dargestellt, insofern sie die Zeitbestimmung, die Bestimmung des Azimuts und der Polhöhe, die Lotablenkung und die Bestimmung der Sterncoordinaten betreffen. Auch die Fehler der Instrumente und der Personalfehler werden eingehend erörtert. Hierauf folgen die relativen Messungen (Capitel XV, S. 122-145), d. h. die Bestimmung des Lagenunterschiedes gegen bereits bekannte Sterne. Hier ist besonders die Theorie der Mikrometer von Wichtigkeit. Die „Geodäsie“ im weiteren Sinne, d. h. die Theorie der Grösse und Gestalt der Erde, bildet den Gegenstand des Capitels XVI (S. 146-222). Ganz besonderes Interesse bietet hier die geschichtliche Entwickelung der Erdmessungen. Die neuesten Gradmessungen und deren Resultate sind mit grosser Ausführlichkeit behandelt. Eng daran schliesst sich das Capitel XVII (S. 223-279) über den Einfluss und die Bestimmung der Parallaxe und der Refraction. Es enthält das Wichtigste über den Zweck und die Resultate der Beobachtungen der Venusdurchgänge, ferner eine Vorgeschichte der Refraction seit Archimedes und eine Darstellung der Theorie der Refraction bis auf Bessel und seine Nachfolger. Mit der Theorie der Finsternisse und Bedeckungen (Capitel XVIII, S. 280-311) schliesst der dritte Halbband.

War das dritte Buch vorwiegend der praktischen Astronomie gewidmet, so treten in dem letzten Buche mehr die mathematischen und physikalischen Theorien der Astronomie in den Vordergrund, wie auch der Titel desselben: „Mechanik und Physik des Himmels“ erkennen lässt. Das XIX. Capitel (S. 325-403): „Das Gravitationsgesetz und seine Consequenzen“, geht aus von den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen, behandelt dann die Kepler'schen Gesetze, Kepler's Gleichung, die Zeitgleichung, die Bestimmung der Bahnelemente, die Euler'sche Formel, Lambert's Reihe, die Bestimmung der Kreis-, parabolischen und elliptischen Elemente und schliesst mit der Theorie der Störungen, der Präcession und Nutation. Das folgende Capitel XX (S. 404-441): „Die Sonne“, gehört grössten-

teils in das Gebiet der kosmischen Physik. Im nächsten (S. 442-483) interessirt besonders die historische Darstellung der Entdeckungen der Planeten, der Monde und der Ringe. „Die Sternschnuppen und Kometen“ bilden den Gegenstand des Capitels XXII (S. 484-531). Es werden zunächst die älteren Ansichten über dieselben dargestellt, dann die Verdienste Schiaparelli's eingehend gewürdigt, die späteren Arbeiten und die neueren Ansichten, sowie die auf die Kometenbeobachtungen sich gründenden neueren Anschauungen und die Ergebnisse der Spektroskopie erörtert. Der „Stellarastronomie“ ist Capitel XXIII (S. 532-575) gewidmet. Es beginnt mit den sogenannten Aichungen, behandelt dann die Zonenbeobachtungen, die galaktische Ebene, die Ergebnisse der Sternphotographie, die veränderlichen Sterne, den Einfluss der Nutation und Präcession und schliesst mit der sogenannten Centralsonne. Im letzten Capitel (S. 576-612): „Die Sternsysteme“, werden die vielfachen Sterne erörtert, die Rechnungsmethoden von Encke entwickelt und die verschiedenen Anschauungen über die Nebel dargelegt.

Von der Fülle des Materials, das der inzwischen leider verstorbene Verfasser in seinem Werke niedergelegt hat, giebt schon allein das „Generalregister“ (S. 625-658) eine Vorstellung, welches 100 Spalten umfasst. Auf die Reichhaltigkeit des Werkes an litterarischen Notizen haben wir schon in den früheren Berichten hingewiesen. M.

---

H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. Paris. Gauthier-Villars et Fils. 385 S. gr. 8°.

Nach einer Einleitung von 5 Seiten behandelt der Verf. in sieben Capiteln der Reihe nach: Allgemeines und die Jacobi'sche Methode, Integration durch Reihen, periodische Lösungen, charakteristische Exponenten, Nichtexistenz der eindeutigen Integrale, angenäherte Entwickelung der Störungsfunction, asymptotische Lösungen; wohlverstanden alles in Bezug auf das Dreikörperproblem, mit dem sich das Werk ausschliesslich beschäftigt, und für dessen erfolg-

reiche Bearbeitung in der Schrift „Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique“ der Verf. den schwedischen Preis erhalten hatte. Das in F. d. M. XXII. 1890. 907-914 gegebene ausführliche Referat über diese Arbeit giebt eine gute Vorstellung von den treibenden Gedanken des Hrn. Poincaré; wir vervollständigen hier jenes Bild nach den von ihm selber in der Einleitung angegebenen Gesichtspunkten.

Wesentlich für die Herstellung genauerer Formeln, als die bisher gebräuchlichen Annäherungsformeln geliefert haben, ist die Fortschaffung der säcularen Glieder, bei denen die Zeit ausserhalb der Sinus- und Cosinusglieder der Reihen auftritt. Diese Aufgabe wurde in der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts in Angriff genommen, zuerst von Delaunay, dann von Hill im American Journal I, mit endlichem Erfolge von Hrn. Gyldén durch eine von ihm ersonnene Methode, die in vielen Fällen durch eine bedeutend einfachere von Hrn. Lindstedt ersetzt werden kann.

Die meisten dieser neuen Entwickelungen sind jedoch nicht convergent, sondern geben nur in ihren ersten Gliedern sehr gute Annäherungen. „Das Ziel der Mechanik ist nicht erreicht, wenn man mehr oder weniger angenäherte Ephemeriden berechnet hat, ohne sich von dem Grade der erreichten Annäherung Rechenschaft abzulegen. Wenn man nämlich zwischen diesen Ephemeriden und den Beobachtungen eine Abweichung feststellt, so muss man erkennen können, ob das Newton'sche Gesetz versagt, oder ob alles sich durch Unvollkommenheiten der Theorie erklären lässt. Es ist also bedeutsam, eine obere Grenze des begangenen Fehlers zu bestimmen, womit man sich vielleicht bislang noch nicht genug abgemüht hat. Nun geben aber die Methoden, welche die Discussion der Convergenz ermöglichen, zugleich auch jene obere Grenze. Daher braucht man sich nicht über den Raum zu wundern, den ich ihnen in diesem Werke zugebilligt habe. ... Diese Strenge allein giebt meinen Sätzen über die periodischen, asymptotischen und doppelt asymptotischen Lösungen einigen Wert.“

In diesem ersten Bande hat sich der Verf. auf die Erforschung der periodischen Lösungen erster Art beschränkt, auf den Beweis der Nichtexistenz der eindeutigen Integrale, sowie auf die Dar-

stellung und Erörterung der Lindstedt'schen Methoden. Das Ganze soll „eine Art Synthese der meisten neueren, jüngst vorgeschlagenen Methoden" vorstellen. Lp.

---

H. Poincaré. Note accompagnant la présentation d'un ouvrage relatif aux méthodes nouvelles de la mécanique céleste. C. R. CXV. 905-907.

Begleitworte bei der Ueberreichung des ersten Heftes vom zweiten Bande des Werkes, über dessen ersten Band das vorangehende Referat handelt. Das Heft ist danach der Darstellung und Erweiterung der Methoden der Herren Newcomb und Lindstedt gemäss den Jacobi'schen Vorschriften in den Vorlesungen über Dynamik gewidmet. Lp.

---

H. J. Klein. Führer am Sternenhimmel für Freunde astronomischer Beobachtungen. Leipzig. E. H. Mayer. IV + 431 S. Mit 7 Fig.-Taf. 8°.

Nach einer kurzen Einleitung verbreitet sich der Verfasser über die Art, wie man Himmelsgloben und Sternkarten benutzen soll, und kommt dann zu den Beobachtungen mit bewaffnetem Auge. Hier werden viele vortreffliche Winke gegeben, die man in ähnlichen Büchern meist vergeblich suchen wird. Dann werden der Reihe nach die Sonne, die Planeten, das Zodiakallicht, die Kometen, Sternschnuppen und Feuerkugeln, der Fixsternhimmel, die veränderlichen, farbigen, mehrfachen Sterne, Sternhaufen und Nebelflecken behandelt. Den Schluss des Buches bildet die Beschreibung unseres Mondes, den der Verfasser seit Jahrzehnten besonders eingehend beobachtet hat.

Schöne scharfe Bilder finden sich zahlreich im Text und erhöhen den Wert des Buches. Dz.

---

H. Seeliger. Ueber allgemeine Probleme der Mechanik des Himmels (Rede). Beilage zu Münch. Abh. XVII. 29 S. 4°.

Diese zur Feier des 133sten Stiftungstages der Münchener

Akademie gehaltene Rede giebt eine Uebersicht über die als gültig anzusehenden Kenntnisse der Himmelsmechanik und über die vielen noch zu erledigenden Fragen. Lp.

---

A. SAPORETTI. Metodo analitico con discussione generale per la trasformazione delle coordinate sferiche celesti in luogo del metodo sintetico dei moderni astronomi (Brünnow 1869 e Gruey 1885). Bologna Mem. (5) II. 547-559.

Die trigonometrischen Formeln zur Umwandlung von Rectascension und Declination in Länge und Breite werden aufgestellt und dann durch Einführung von Hülfsgrössen zur logarithmischen Rechnung geschickt gemacht. Dz.

---

E. LAGRANGE et P. STROOBANT. Une nouvelle méthode astrophotométrique. Belg. Bull. (3) XXIII. 811-827.

F. TERBY. Rapport. Ibid. 734-738.

Die Verf. schlagen die Anwendung eines künstlichen Sternes vor, den eine kleine Kreisöffnung von veränderlichem Durchmesser mit dahinter stehender Glühlampe erzeugt, vor welche man eine mehr oder weniger dicke Glasschicht einschieben kann. Das Bild dieser Oeffnung wird mit Hülfe von Linsen reducirt und bildet sich im Brennpunkte der Linse vermöge der Einschaltung zweier total reflectirender Prismen. Die Registrirung der Potentialdifferenz ermöglicht die Berücksichtigung der kleinen Helligkeitsänderungen der Lampe, die eine Schwankung des Stromes herbeiführen könnte. Diese Methode vermittelt eine Bestimmung der Lichtmenge, welche wir von einem gegebenen Sterne erhalten. Dml. (Lp.)

---

E. MEISSEL. 1) Einige Entwickelungen, die Bessel'schen *J*-Functionen betreffend. Astr. Nachr. CXXVII. (No. 3046.) 359-362. 2) Beitrag zur Theorie der allgemeinen Bessel'schen Functionen. Astr. Nachr. CXXVIII. (No. 3056). 145-154; (No. 3072). 435-438.

E. Meissel. 3) Abgekürzte Tafel der Bessel'schen Functionen. Astr. Nachr. CXXVIII. (No. 3056). 154-156.

4) Neue Entwickelungen über die Bessel'schen Functionen. Astr. Nachr. CXXIX. (No. 3089). 280-284.

5) Weitere Entwickelungen über die Bessel'schen Functionen. Astr. Nachr. CXXX. (No. 3116). 363-368.

Die Abhandlungen enthalten zahlreiche Sätze über Bessel'sche Functionen, welche sich auf ihre Darstellbarkeit durch Reihen, durch Interpolationsformeln, durch bestimmte Integrale u. s. w. beziehen. Die meisten unter ihnen hat der Verfasser ohne Beweis mitgeteilt. Auch giebt er Formeln, um die Bessel'sche Function

$$J_k^{(h)} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos(hu - k.\sin u).du$$

für sehr grosse Werte der Zahl $h$ zu berechnen. Setzt man $h=k=n$, so gilt folgende Formel:

$$J_n^{(n)} = \frac{1}{\pi} \cdot \Sigma_m \varkappa_m \cdot \left(\frac{6}{n}\right)^{\frac{2m+1}{3}} \cdot \Pi\left(\frac{2m+1}{3}\right) \cdot \cos\frac{(2m+1)\pi}{3},$$

welche eine halb convergente Reihe darstellt. Die Coefficienten $\varkappa_m$ sind reine Zahlen, welche durch die Entwickelung einer Veränderlichen $u$ nach einer anderen $z$ in der Form:

$$u = z + \varkappa_1 z^3 + \varkappa_2 z^5 + \cdots$$

entstehen, wenn zwischen beiden die Gleichung

$$u - \sin u = \frac{z^3}{6}$$

angenommen wird. Die Nullwerte der Bessel'schen Functionen werden besonders erforscht. Tafeln dieser Functionen von $h=0$ bis $h=20$ und $k=0$ bis $k=20$ im dritten der oben genannten Aufsätze werden gewiss manchem Rechner willkommen sein. Dz.

---

L. Niesten. Note relative aux variations de latitude. Belg. Bull. (3) XXIV. 111-117.

Nach Hrn. Niesten haben die an den Breiten von Berlin und Pulkowa festgestellten Aenderungen eine jährliche Periode. Der

Verfasser beruft sich dabei auf die bei anderen Beobachtungen gefundenen Aenderungen, die mit seiner Anschauung stimmen. Chandler fixirte 1892 die Dauer dieser Periode auf 427 Tage und nimmt gegenwärtig 431 Tage an. Dml. (Lp.)

---

F. Folie. Les préjugés en astronomie. Belg. Bull. (3) XXIV. 629-669.

In dieser Rede giebt der Verfasser einen Ueberblick über seine astronomischen Arbeiten: Reductionsformeln der Circumpolarsterne, tägliche Nutation, anfängliche Nutation, Breitenänderungen u. s. w. Dml. (Lp.)

---

F. Folie. Nouvelle recherche des termes du second ordre dans les formules de réduction des circompolaires en ascension droite et déclinaison. Belg. Bull. (3) XXIII. 356-368, 461-477.

Der Verfasser giebt einen neuen Beweis von den Fabritius'schen Reductionsformeln und fügt zu ihnen einige Glieder höherer Ordnung hinzu. Er betrachtet der Reihe nach die Glieder zweiter Ordnung, welche von der Nutation, der jährlichen Aberration, der Vereinigung der Nutation mit der Aberration, der systematischen Aberration herrühren. In gleicher Weise betrachtet er die säcularen Glieder der systematischen Aberration und Parallaxe.

Dml. (Lp.)

---

F. Folie. Réponse à la note de M. Tisserand. Belg. Bull. (3) XXIII. 84-88.

Hr. Radau hat in dem Bulletin astronomique für 1890 eine Kritik der Arbeiten des Hrn. Folie veröffentlicht, auf welche dieser dann geantwortet hat. Aber gleichzeitig hat Hr. Tisserand, der Herausgeber des Bulletin, eine Note eingerückt, in der er verschiedene in der Antwort des Hrn. Folie enthaltene Fehler hervorhebt und sich schliesslich zur Meinung des Hrn. Radau bekennt. Die neue Antwort des Hrn. Folie, deren Aufnahme die Redaction des Bulletin astronomique verweigert hat, bezweckt den Nachweis,

dass die Sternörter nicht auf die augenblickliche Axe und den augenblicklichen Aequator zu beziehen sind, sondern auf die geographische Axe, ferner dass die tägliche Nutation merklich sein kann. Dml. (Lp.)

---

G. M. Learle. On the computation of places in eccentric ellipses and hyperbolas. Boston Astronomical Journal 1892. No. 252. 89-92.

Es handelt sich um die Auflösung der Kepler'schen Gleichung

$$M = E - e\sin E,$$

wenn $e$ nahe an 1 ist.

Hierzu wird erst folgende Umformung mit Hülfe eines zunächst willkürlichen Parameters $m$ gemacht:

$$M = (1-e)x + e_0(E - \sin E),$$

wo $x = m\sin E + (1-m)E$, $e_0 = m + (1-m)e$ ist.

Entwickelt man hieraus durch Umkehrung $E$ und $E - \sin E$ nach Potenzen von $x$, so kann $m$ so gewählt werden, dass in der letzten Reihe die fünfte Potenz von $x$ verschwindet. Dies geschieht, wenn $m = \frac{1}{10}$ genommen wird.

Die Kepler'sche Gleichung wird dann:

$$M = (1-e)x + e_0\left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{280}x^7 + \cdots\right];$$

aus ihr ist $x$ zu bestimmen. Um nun noch $E$ durch $x$ zu berechnen, wird die Gleichung zwischen beiden Grössen in folgende Form gesetzt:

$$\cos^{\frac{6}{5}} E = 1 - \tfrac{3}{20}x^2 + \tfrac{1}{4000}x^6 + \cdots.$$

Darauf werden Formeln zur Berechnung von $r$ und $v$ gegeben, und nachher wird eine ähnliche Untersuchung für hyperbolische Bahnen durchgeführt. Dz.

---

H. Poincaré. Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps. C. R. CXIV. 1305-1309.

In einer früheren Note (Sur les séries de M. Lindstedt, C. R. CVIII, F. d. M. XXI. 1889. 1219) hat der Verf. die Lind-

stedt'sche Methode unter einer neuen Gestalt dargestellt, die sich auf Jacobi's Vorlesungen über Dynamik stützte. Gegenwärtig zeigt er, dass diese Methode auch für die Untersuchung der säcularen Aenderungen der Elemente der Planeten benutzt werden kann, dass sie jedoch ohne Umwandlung sich nicht auf das Dreikörperproblem ausdehnen lässt, ferner welche Umwandlungen nötig sind, damit dies angehe. Zum Schlusse der Mitteilung bemerkt Hr. Poincaré: Die Hinzufügung ist unnötig, dass, wie bei der gewöhnlichen Methode des Hrn. Lindstedt, die Reihen nicht convergent, sondern nur halb convergent sind, in dem Sinne von Stirling; dies schränkt die Bedingungen ein, unter denen man sich ihrer bedienen darf. Lp.

---

A. Weiler. 1) Ueber die Arbeit des Herrn Poincaré, das Problem der drei Körper betreffend. Astron. Nachr. CXXVII. Sep 1 S.

2) Ein Beitrag zur Würdigung des Resultats, zu welchem Herr Poincaré in seiner Arbeit über das Problem der drei Körper gelangt ist. Karlsruhe. Druck von C. Schaidt, Kiel. 4 S. 4°.

Diese beiden Aufsätze enthalten unter Hinweis auf frühere Arbeiten des Verfassers eine Polemik gegen Ausführungen Poincaré's, wenigstens so weit das Störungsproblem als ein Problem der $n$ Körper behandelt wird, von dem dieser sagt: „La solution complète, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués.“ Der Verfasser meint, dass dies auf das Störungsproblem nicht anwendbar ist, sondern im Gegenteil sei hier die Lösung bisher nicht gelungen, weil zu verwickelte Methoden gebraucht worden sind. Die einfachere „Lösung“ des Verfassers aber beruhe darauf, nicht alle sechs, sondern nur einige elliptische Elemente zu variiren; seine früheren Arbeiten hätten dies dargethan. Dz.

---

E. Frhr. von Haerdtl. Skizzen zu einem speciellen Fall des Problems der drei Körper. Münch. Abh. XVII. 589-644 u. 4 Fig.-Taf.

Diese von der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften mit einer goldenen Medaille preisgekrönte Arbeit behandelt das folgende von dieser Gesellschaft gestellte Problem: „In einem Doppelstern, bestehend aus zwei gleichmassigen Körpern $A$ und $B$, sind die beschriebenen Bahnen Kreise. Ein dritter Punkt $C$, mit unendlich kleiner Masse, bewegt sich so in der Bahnebene der $A$ und $B$, dass er zu Beginn der Bewegung auf der Verlängerung der Linie $AB$ steht, und zwar in einem Abstande von $A$, welcher halb so gross ist, wie der Abstand von $B$ bis $A$, und ferner, dass er um $A$ eine Kreisbahn beschreiben würde, sofern $B$ nicht vorhanden wäre. Bei Beginn sind alle Bewegungen nach derselben Seite gerichtet.“ Der Verfasser hat die Störungen in den rechtwinkligen Coordinaten für ein Zahlenbeispiel ermittelt und der speciellen Störungsrechnung jenes Intervall zu Grunde gelegt, welches einer Bewegung des störenden Körpers $B$ im Betrag von $1^{\circ}15'$ in seiner Kreisbahn entspricht, und die Rechnung so weit geführt, bis $B$ zwei volle Umläufe beschrieben hat. Die berechneten Zahlen füllen in sehr gedrängtem Satze die Quartseiten von S. 596 bis 606: Hiernach ist die Tafel construirt, und die Hauptmomente sind in folgende Sätze zusammengefasst:

1) Innerhalb einer Zeit, welche der doppelten Umlaufszeit des störenden Körpers $B$ entspricht, bleibt der Körper $C$ bei dem Körper $A$, also jenem Körper, den er auch in der ungestörten Bahn hätte umkreisen müssen. 2) Eine Wiederholung des Anfangszustandes, d. h. dass die drei Körper sowohl in einer Linie stehen, als dass auch die Entfernung $AC$ nahe gleich der Einheit wird, tritt innerhalb dieser Zeit dreimal ein; sohin entspricht diese Periode einer Zunahme der Länge des störenden Körpers von rund $240^{\circ}$, aber erst nach $3\times240^{\circ}$ ist auch die Position der Verbindungslinie der drei Körper nahezu dieselbe wie zu Beginn der Bewegung. 3) Innerhalb jeder Periode beschreibt der Körper $C$ eine $\omega$-förmige Schlinge um den Körper $A$, nähert sich hierbei demselben einmal bis auf eine Distanz von rund $\frac{1}{4}$ der anfäng-

lichen Distanz, und zwar fällt der Moment des Periheldurchganges nahezu zusammen mit dem Zeitpunkt, in welchem der Körper $C$ die Verbindungslinie der Körper $A$, $B$ schneidet. Die drei Körper stehen sohin wieder nahe in einer Geraden, doch nimmt der Körper $C$ nun seinen Platz zwischen $A$ und $B$ ein.

Die weitere Untersuchung gilt der Frage nach dem periodischen oder nicht periodischen Charakter der Bewegung und dürfte von mathematischer Seite das meiste Interesse an der Arbeit beanspruchen; es ergiebt sich die Nicht-Periodicität. Im Anschluss an die Rechnungen über die Preisfrage wird in einem Anhange nach ähnlicher Methode das Problem behandelt, bei welchem der Punkt $C$ zu Beginn der Bewegung auf der Verbindungslinie von $A$ und $B$ in gleichem Abstande von diesen beiden Körpern steht. Während in dem zuerst behandelten Fall, bei welchem nur der Anfangszustand anders war, der gestörte Körper wenigstens für einen längeren Zeitraum bei dem Centralkörper blieb, den er auch in der ungestörten Bahn hätte umkreisen sollen, entfernt sich hier der gestörte Körper sofort von demselben, um bald zu dem störenden Körper überzugehen, den er schliesslich als Trabant umkreist, und zwar in einer lang gestreckten, sehr excentrischen Ellipse.

Lp.

Coculesco. Sur la stabilité du mouvement dans un cas particulier du problème des trois corps. C. R. CXIV. 1339-1341.

Bei einem aus zwei gleichen Massen $A$ und $B$ bestehenden Doppelsterne sind die Bahnlinien kreisförmig. Ein dritter Punkt $C$, dessen Masse unendlich klein ist, bewegt sich in der Ebene jener Bahnen, und zwar so, dass er zu Anfang sich auf der Verlängerung von $AB$ in einem Abstande von $A$ gleich der Hälfte von $BA$ befindet, und dass er beim Verlassen dieser Stellung eine Kreisbahn um $A$ beschreiben würde, wenn $B$ nicht da wäre. Alle Bewegungen haben zu Anfang dieselbe Richtung. Bei der Behandlung dieser Aufgabe in der Schrift: „Skizzen zu einem speciellen Fall des Problems der drei Körper“ (vergl. oben S. 1138) hat Hr. v. Haerdtl die Bewegung von $C$ und $A$ bei zwei vollständigen Um-

wälzungen untersucht. Gegen das Ende der dritten zeigt $C$ das Bestreben, sich von $A$ zu entfernen. Der Verf. weist nach, dass $C$ nicht immerfort sich von $A$ entfernen kann. Lp.

---

O. Callandreau. Sur le calcul des inégalités d'ordre élevé. C. R. CXV. 386-389.

Es handelt sich um die Berechnung der Coefficienten in der Entwickelung der Function

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2-2\alpha\cos x)^s}}$$

nach den Cosinus der ganzen Vielfachen von $x$. Meistens werden dieselben nach Potenzen von $\alpha$ entwickelt; wenn aber die Zahl $n$ des Factors $\cos nx$ sehr gross ist, so werden diese Reihen nicht convergent genug. Führt man nun nach Cauchy die excentrischen Anomalien ein und entwickelt dann nach Potenzen nicht von $\alpha$, sondern von $\gamma = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$, so sind nach dem Verf. die entsprechenden Reihen auch dann noch gut zu benutzen, wenn sie divergent sind, da sie den Charakter halbconvergenter Reihen besitzen. An einem aus der Theorie der Venus und Erde genommenen Beispiel wird dies gezeigt. Dz.

---

F. Tisserand. Sur une équation différentielle relative au calcul des perturbations. C. R. CXIV. 441-444.

Es handelt sich um die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x(q^2+2q_1\cos 2t) = 0,$$

in welcher $q$ und $q_1$ zwei Constanten sind. Die Ausführungen des Verfassers betreffen die Entwickelung des Integrals in der Form

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \eta_i \cos(\omega+2it),$$

wo $\eta_i$ constante Coefficienten und $\omega$ von der Form

$$\omega = ht+c$$

ist. Wenn $h$ nicht reell herauskommt, so treten Exponentialfunctionen auf, und $x$ lässt sich nicht in Glieder mit reeller Periode

entwickeln. Da Convergenzbeweise fehlen, so haben die Ausführungen des Verfassers wohl nur bedingte Geltung, zumal formell auch Reihenentwickelungen ganz anderer Art in Frage kommen könnten. Dz.

---

M. HAMY. Sur le calcul des inégalités d'ordre élevé. Application à l'inégalité lunaire à longue période causée par Vénus. C. R. CXV 869-872.

Zusammenstellung von Formeln über Entwickelungen der Störungsfunction, die sich auf Glieder hohen Grades beziehen. Die ausführliche, hier nur skizzirte Ableitung derselben soll in dem Bulletin astronomique erscheinen. Das in der Ueberschrift genannte Glied in der Mondbewegung hat das Argument:

$$18l''-16l'-l,$$

wo $l''$, $l'$ $l$ die mittleren Längen der Venus, der Erde und des Mondes vorstellen. Dz.

---

K. G. OLSSON. Untersuchung über eine Gruppe von langperiodisch elementaren Gliedern in der Zeitreduction. Stockh. Vetensk. Bihang XVII$_1$. No. 4. 25 S.

Es werden die Resultate einer Untersuchung über die Glieder langperiodisch elementarer Form in der Zeitreduction mitgeteilt, welche sowohl kleine Integrationsdivisoren von der Ordnung der störenden Masse im Nenner enthalten, wie auch durch solche kleinen Divisoren vergrössert werden, welche von einer genäherten Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen herrühren. Bdn.

---

G. H. DARWIN. On the perturbation of a comet in the neighbourhood of a planet. Cambr. Proc. VII. 314-319.

In der Mécanique Céleste (Livre IX, Chapitre II) bemerkt Laplace, dass, wenn ein Komet sich dem Jupiter sehr nähert, er sich während eines kleinen Teiles seiner Bahn nahezu so um den Planeten bewegt, als wenn er keine Störung von der Sonne erlitte, und dass er sowohl vor seiner Annäherung an den Planeten, als

auch nach seiner Entfernung von demselben sich nahezu so um die Sonne bewegt, als übte der Planet keine Störung auf ihn aus. Es muss also eine Fläche geben, welche die Grenze der störenden Einflüsse von Sonne und Jupiter bildet. Laplace hat diese Fläche nicht genauer ermittelt, und dies ist das Problem, welches der Verfasser behandelt. Es ergiebt sich, dass die Laplace'sche Bestimmung der Einflusssphäre des Jupiters, welche Laplace als wirkliche Kugel annimmt, für den damaligen Zweck genau genug war. Herr Darwin berechnet einen genaueren Wert für den Radius dieser Kugel. Ist $R$ der Radius des Jupiters und $\varrho$ der Abstand des Kometen von letzterem, so findet Darwin $\varrho = 0{,}058\, R$, während die Laplace'sche Formel $\varrho = 0{,}054\, R$ ergiebt. Gz.

---

A. Cayley. Note on the lunar theory. Monthly Notices. LII. 2-5.

Der Verfasser bespricht die Aufgabe, die Ausdrücke für die Bewegung des Mondes in die ursprünglichen Differentialgleichungen einzusetzen, und führt sie für die ersten Glieder durch. Dz.

---

J. Stone. On the verification of the expressions given in Delaunay's lunar theory by a direct differentiation and substitution in the differential equations. Monthly Notices. LII. 68-70.

Dieser Aufsatz nimmt auf den vorigen Bezug und beleuchtet die Schwierigkeit der von Cayley gestellten Aufgabe. Dz.

---

E. W. Brown. On the determination of a certain class of inequalities in the Moon's motion. Monthly Notices. LII. 71-80.

Die in der Ueberschrift genannten Ungleichungen hängen nur von der Excentricität und dem Bruch $m$ ab, welcher das Verhältnis der Bewegung der Sonne zu der des Mondes bestimmt. Delaunay hat sie nach Potenzen von $m$ entwickelt, Hill nach Potenzen von $m_1 = \frac{m}{1-m}$. Ausserdem hat Hill gezeigt, dass die Reihen noch

schneller convergiren, wenn eine dritte Grösse $\mu = \frac{m}{1-\frac{1}{3}m}$ eingeführt wird. Nachher werden die numerischen Werte von Delaunay, Hill und Hansen mit einander verglichen. Dz.

---

E. W. Brown. On the part of the parallactic inequalities in the Moon's motion which is a function of the mean motions of the Sun and Moon. American J. XIV. 141-160.

Mond und Erdbahn werden in einer Ebene und letztere als kreisförmig angenommen, so dass dem Störungsproblem nunmehr das von Jacobi für diesen Fall aufgefundene algebraische Integral zukommt. Die Differentialgleichungen werden umgeformt und dann trigonometrische Reihen eingeführt, deren Argumente ganze Vielfache der Differenz der Länge von Sonne und Mond sind, und deren Coefficienten nach Potenzen einer Grösse $m$ zu entwickeln sind. Diese Grösse $m$ ist ein Bruch, dessen Zähler die mittlere Bewegung der Sonne, und dessen Nenner die mittlere Bewegung des Mondes, vermindert um diejenige der Sonne, bedeutet. Die Rechnungen für die Coefficienten werden analytisch durchgeführt und dann durch Einsetzen des durch die Beobachtungen sehr genau bekannten Wertes für $m$ ziffernmässig vollendet. — Wie der Titel sagt, beschränkt sich die Untersuchung auf den parallaktischen Teil der Störungen der Mondbahn, bei welcher überdies die Excentricität, oder vielmehr deren nicht periodischer Bestandteil nicht berücksichtigt wird. Dz.

H. Andoyer. Sur quelques inégalités de la longitude de la Lune. Toulouse Ann. VI. J. 1-33.

Es handelt sich hier um Glieder, bei deren Ableitung die Excentricität der Erdbahn und die Neigung der Mondbahn nicht in Betracht kommen. Auch wird vorausgesetzt, dass die Entwickelung des Kraftpotentials nach steigenden Potenzen des Verhältnisses zwischen Radiusvector des Mondes und der Sonne bei dem quadratischen Gliede abgebrochen werde. Sodann wird die Differential-

gleichung vierter Ordnung aufgestellt, in der die Länge $v$ des Mondes und die Zeit $t$ die alleinigen Veränderlichen sind. Das Integral wird als Fourier'sche Reihe von zwei Argumenten angesetzt, nämlich von der mittleren Länge des Mondes und der mittleren Länge des Mondknotens. Die Coefficienten dieser Reihe werden nach steigenden Potenzen von gleichfalls zwei Grössen entwickelt. Dieselben sind: erstens das Verhälttnis $m$ der mittleren Bewegung der Sonne zu derjenigen des Mondes und zweitens die Excentricität $\varepsilon$ der Mondbahn oder vielmehr eine rechnerisch eingeführte Grösse, welche diese Excentricität in erster Annäherung vertreten kann. Was dann noch übrig bleibt, sind reine, weder von einem constanten, noch von einem veränderlichen Argument abhängende Zahlen, die ziffernmässig auszurechnen sind. Der Verfasser giebt die Gleichungen, aus denen sie folgen, bis auf die achte Potenz von $m$ und die erste Potenz von $\varepsilon$ genau. Er wendet dabei zwei verschiedene Methoden an, welche zu identischen Zahlen führen. Einige unter ihnen weichen von denjenigen Delaunay's in seiner Théorie de la Lune (Recherches supplémentaires) ab. Dz.

---

C. Benz. Ueber den Einfluss der Excentricität der Erdbahn auf die mittlere Umlaufszeit des Mondes. Hoppe Arch. (2) XI. 199-206.

Die Art und Weise, wie hier das viel behandelte Problem der säcularen Beschleunigung der Mondbewegung, insofern sie von der säcularen Veränderung der Excentricität der Erdbahn abhängt, angegriffen wird, ist originell genug. Sie erinnert an die synthetische Behandlung der Mechanik des Himmels, wie sie in England angetroffen wird. Ob aber die vielen Schätzungen, z. B. auf S. 203 für $r_0^3$ der Mittelwert $a^3(1+3\eta^2)$, und namentlich die Annahme, dass die in die Rechnung eingeführten Radienvectoren $R_m$ auf der Erdbahn nach Massgabe der Flächengeschwindigkeit sich verteilen, nicht manches Willkürliche enthalten?

Der Verfasser hat seine Ergebnisse nicht mit den früheren von Laplace, Adams u. s. w. verglichen, so dass eine Beurteilung ihrer Genauigkeit für den Referenten sehr mühsam und zeitraubend gewesen wäre und deshalb unterblieben ist. Dz.

J. Kleiber. On the displacement of the apparent radiant points of meteor-showers due to the attraction, rotation and orbital motion of the Earth. Monthly Notices. LII. 341-353.

Die Radiationspunkte der Meteorschwärme sind zuweilen veränderlich. Wie die Theorie zeigt, wirken hier drei Ursachen mit:

1) die Anziehung der Erde, welche die Bahnen hyperbolisch krümmt und daher verursacht, dass die Richtung des ganzen Schwarms anders ist, als die der einzelnen Meteore;

2) die Drehung der Erde, welche eine Art Aberration hervorruft;

3) der Umlauf der Erde um die Sonne, welcher im Laufe von Tagen und Wochen seine Bewegungsrichtung erheblich ändert.

Es werden die zugehörigen Formeln entwickelt und ihre Richtigkeit an zwei Beispielen erörtert, dem Perseiden- und dem Andromeda-Schwarm. Dz.

---

Terby. Sur l'aspect de Titan en passage devant Saturne et sur un nouveau passage de Titan et de son ombre observé à Louvain. Belg. Bull. (3) XXIII. 343-350, 494-499.

Zweimal, am 11. März und am 12. April 1892, ist es dem Verf. geglückt, den Vorübergang des Titan selbst und seines Schattens auf der Saturnscheibe zu beobachten. Diese sehr interessante und sehr schwierige Beobachtung scheint, Dank den ausgezeichneten Ephemeriden des Hrn. Marth, zum ersten Male von Hrn. Terby bewerkstelligt zu sein. Dml. (Lp.)

---

E. Roger. Recherches sur la formation des planètes et des satellites. C. R. CXIV. 944-946.

Diese Mitteilung, welche sich an eine frühere (C. R. CVI) anschliesst, enthält zwei Formeln. Die erstere giebt die Logarithmen aller Entfernungen der (grossen) Planeten von der Sonne, verglichen mit dem halben Durchmesser der Sonne als Einheit. Die zweite leistet dasselbe für die Planeten und deren Monde. Ein späterer Aufsatz soll die Hypothesen und analytischen Entwicke-

lungen bringen, auf welche die Ableitung dieser Formeln sich gründet. Dz.

---

P. de Heen. Sur la cause probable de la formation de la queue. Belg. Bull. (3) XXIII. 490-493.

Der Verf. schreibt die allgemeine Richtung der Kometenschweife (der Sonne abgewandt) einem ähnlichen Vorgange zu, wie der bei Drehung der Flügel des Crookes'schen Radiometers ist. Die festen oder gasförmigen Teilchen, die nach Hrn. de Heen in einer in der Umgebung der Sonne verdünnten Atmosphäre schwimmen, werden auf der diesem Gestirn zugewandten Seite mehr erhitzt als auf der entgegengesetzten und unterliegen daher einer Rückstossbewegung. Der Verf. bemerkt dazu, dass dieser Vorgang ein innerer ist und daher durchaus nicht die Bewegung des Schwerpunktes des Systems umwandelt. Dml. (Lp.)

---

P. Stroobant. Note sur le diamètre du Soleil et de la Lune et l'équation personnelle dans les observations de passage. Belg. Bull. (3) XXIII. 372-377.

F. Folie et Ch. Lagrange. Rapports sur cette note. Ibid. 341-343.

Hr. Stroobant hat festgestellt, dass er den ersten Rand eines Gestirns von merklichem Durchmesser zu früh, den zweiten zu spät beobachtete. Er zeigt, dass die für die Durchmesser von Sonne und Mond durch Passage-Beobachtungen erhaltenen Werte grösser sind, als wenn man sie nach anderen Methoden ermittelt (Heliometer, Photographie, Bedeckungen u. s. w.). Diese Bemerkung ist wichtig in Betreff der aus der Beobachtung eines der beiden Ränder unseres Trabanten hergeleiteten Rectascension für den Mittelpunkt des Mondes; denn während der Periode zwischen Neumond und Vollmond beobachtet man immer den vorderen Rand und während der folgenden Periode den hinteren. Daraus muss ein systematischer Fehler bei der Bestimmung des Coefficienten der parallaktischen Ungleichheit des Mondes entstehen.

Dml. (Lp.)

S. Newcomb. On the dynamics of the Earth's rotation, with respect to the periodic variations of latitude. Monthly Notices. LII. 336-341.

Euler hat unter Voraussetzung, dass die Erde starr sei, zuerst die Zeit bestimmen gelehrt, in welcher der Erdpol seine „mittlere“ Lage einmal umkreist. Aus den durch die Präcession bestimmten Werten der Verhältnisse der Trägheitsmomente in Bezug auf die Polar- und eine Aequatoraxe ergiebt sich nach Oppolzer eine Periode von 305 Tagen, die man schon lange ohne Erfolg an Beobachtungen von Fixsternbreiten hat nachweisen wollen. Herr C. Chandler hat aber eine andere Periode von 427 Tagen gefunden, und Hr. Newcomb sucht den Unterschied auf zwei Ursachen zurückzuführen, einmal auf die leichte Beweglichkeit des Meeres und dann auf die Elasticität der Erde selbst. Seine Ausführungen sind aber nicht streng, sondern stellen nur Schätzungen dar.

Wenn der Erdpol den Endpunkt der Axe des grössten Trägheitsmomentes umkreist, so wird das Meer, so klein auch der Radius dieser Bahn sein mag, beständig bestrebt sein, seine Wassermassen so zu verteilen, dass die jeweilige Drehungsaxe auch Axe des grössten Trägheitsmomentes werde. Nach einem ungefähren Ueberschlag genügt der Einfluss der so entstehenden kleinen Schwankungen des Meeresspiegels, welche am Aequator, wo sie am grössten sind, nur einige Zoll betragen könnten, durchaus nicht, um den ganzen Unterschied zu erklären. Die Hauptursache ist die Elasticität der Erde, welche die Gestalt des Planeten unter dem Einfluss der Centrifugalkraft der Drehung elliptisch formen würde, selbst wenn sie zur Zeit kugelförmig wäre. Die Excentricität der Abplattungsellipse hängt natürlich von der Grösse der Elasticität ab und kann nach den Formeln, welche Thomson und Tait in ihrem Lehrbuch der theoretischen Physik gegeben haben, bestimmt werden. Sie wird etwa $= \frac{1}{850}$, wenn man nach Thomson die Erde im Durchschnitt starr annimmt, wie Stahl. Da die Axe dieser hypothetischen Erdgestalt aber immer die augenblickliche Drehungsaxe ist, so entsteht ein beständiges Zerren an der Axe des Hauptträgheitsmomentes und ein entsprechendes Verschieben auch ihres Endpunktes auf der Erdoberfläche, denen jener Unterschied zugeschrieben

werden muss. Nach Rechnungen im Pausch und Bogen stimmt auch der numerisch berechnete Wert mit dem beobachteten überein.

Schiesslich kommt der Verfasser auf die Zähflüssigkeit des Erdinnern, die Veränderlichkeit der Eismengen an den Polen und grosse Schneefälle zu sprechen, um die Chandler'schen Resultate, beziehungsweise ihre Abweichungen von dem theoretisch durch Euler ermittelten Ergebnis zu erklären. Dz.

---

F. Folie. Expression complète et signification véritable de la nutation initiale. Démonstration qui en résulte de la fluidité intérieure du globe. Conséquences analytiques de celle-ci dans les formules de l'astronomie. Acta Math. XVI. 365-384.

Unter nutation initiale versteht der Verfasser diejenigen Schwankungen der Erdaxe, welche von der eigentlichen lunisolaren Präcession und Nutation unabhängig sind und ganz ebenso wie jetzt erfolgen würden, auch wenn Mond und Sonne nicht da wären. Wird die Erde als starr vorausgesetzt, so muss die anfängliche Nutation bewirken, dass die augenblickliche Drehungsaxe in 305 Tagen um die eigentliche Weltaxe einen äusserst spitzen Kegel beschreibt. Die Zahl 305 entspringt aus den anderweitig bekannten Verhältnissen zwischen den drei Hauptträgheitsmomenten der Erde.

Der Verfasser giebt zunächst die allgemeine Form der Nutation an und zeigt, wie ihre Grösse durch Beobachtungen von Fixsternculminationen zu bestimmen ist. Aber die Discussion seiner eigenen Beobachtungen, so wie derjenigen anderer Astronomen zeigt ihm, dass der Umlauf länger dauert als 305 Tage, nämlich nach seiner Rechnung etwa 376 Tage! Hieraus wird geschlossen, dass der Kern der Erde wenigstens nach der Oberfläche hin flüssig sei, wobei der Verfasser sich auf eine gekrönte Preisschrift von Ronkar stützt. Zuletzt wird auf die wichtige Aufgabe hingewiesen, den Einfluss der Reibungen im Erdinnern auch für die lunisolare Nutation durch Rechnung und Beobachtung festzustellen, da die Annahme der Starrheit der Erde, wenn sie falsch ist, unzweifelhaft beträchtliche Fehler herbeiführen kann, die dann wieder die Be-

stimmung der Aberrationsconstante und der Fixsternparallaxen ungünstig beeinflussen. Dz.

---

O. Kaiser. Beiträge zur Zahlenlehre und Chronologie. Pr. des K. K. Staats-Obergymn. in Bielitz 1892. 42 S. 8°.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung des vom Verfasser in dem Programme derselben Anstalt vom Schuljahre 1886/7 veröffentlichten Aufsatzes.

In der hier vorliegenden Fortsetzung beschäftigt sich der Verfasser mit der Bestimmung des Osterfestes im julianischen und gregorianischen Kalender. Er leitet die von Gauss gegebenen Osterformeln ab und stellt neue etwas abweichende Formeln auf, welche gegenüber den Gauss'schen Formeln gewisse kleine Vorzüge haben. Diese sollen sich besonders für die umgekehrte Osterrechnung, d. h. für die Bestimmung der Jahre eines gegebenen Jahrhunderts, in denen der Ostersonntag auf ein gegebenes Datum fällt, geltend machen. Diese umgekehrte Osterrechnung soll den Inhalt einer weiteren Arbeit bilden. In der jetzigen Arbeit trägt der Verfasser noch die sehr bekannte Methode der Auflösung unbestimmter Gleichungen mittels Zahlencongruenzen vor und wendet diese auf einige chronologische Aufgaben an. Diese Auseinandersetzung bekannter zahlentheoretischer Methoden vermag aber doch wohl kaum die erste Hälfte der Ueberschrift zu rechtfertigen.

Die Arbeit zeichnet sich durch reichhaltige chronologische Litteraturangaben aus. Hau.

---

N. L. W. A. Gravelaar. The great ice age. Nature XLVII. 200.

Bezüglich des Werkes von Sir Robert Ball über den Gegenstand lenkt der Verfasser die Aufmerksamkeit auf den Umstand hin, dass die Differenz zwischen der Länge des Sommers und der des Winters in der Nähe ihres Maximums sich nur sehr langsam ändert, und giebt die zugehörigen Rechnungen. Lp.

---

### Weitere Litteratur.

Sir Robert Stawell Ball. An atlas of astronomy. London. George Phelp and Son. [Nature XLVII. 225.]

Newcomb-Engelmann's populäre Astronomie. 2. Aufl. hrsg. von H. C. Vogel. Leipzig. Engelmann. XX + 748 S. Mit Herschel's Bildnis, 1 photogr. Taf. u. 196 Holzschn. 8°.

E. Frhr. v. Haerdtl. Ueber zwei langperiodische Störungsglieder des Mondes, verursacht durch die Anziehung des Planeten Venus. [Aus: Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften.] Leipzig. Freytag in Comm. 24 S. Imp. 4°.

H. Masal. Entwickelung der Reihen der Gyldén'schen Störungstheorie bis zu Gliedern zweiter Ordnung. Diss. München. 4°.

F. Ristenpart. Untersuchungen über die Constante der Präcession und die Bewegung der Sonne im Fixsternsysteme. Diss. Strassburg. 4°.

O. Backlund. Calculs et recherches sur la comète d'Encke. Partie I: Tables pour le calcul des anomalies excentriques et du logarithme du rayon vecteur. St. Pétersb. Mém. 1892. 60 S. 4°.

---

## Capitel 3.

## Mathematische Geographie und Meteorologie.

A. Breusing. Das Verebnen der Kugeloberfläche für Gradnetzentwürfe. Ein Leitfaden für den Unterricht. Leipzig. H. Wagner und E. Debes. IV + 69 S. Mit 6 Fig.-Taf. 8°.

Dieses Buch behandelt die für den wirklichen Gebrauch wichtigen Abbildungsarten einer Kugel auf einer Ebene. Sie werden von dem Verfasser in drei Gruppen geteilt, in die erste mit strahligen Gradnetzentwürfen, welche unter anderen die Hipparch'sche (stereographische) Abbildung enthält, in die zweite mit säuli-

gen Gradnetzentwürfen, als deren Hauptvertreter die Mercator'sche Abbildung anzusehen ist, und in die dritte mit abweitungstreuen Gradnetzentwürfen, d. h. solchen Entwürfen, bei welchen die linearen Abmessungen der Breitenkreise treu wiedergegeben werden. Der Verfasser beschränkt sich aber nicht auf die „conformen" oder, wie er sagt, „winkeltreuen" Abbildungen, sondern bespricht auch flächentreue und solche, welche andere wichtige geometrische Eigentümlichkeiten mit dem Urbild gemein haben. Der Leser findet ausserdem in dem Buch sehr viele geschichtliche Bemerkungen, in denen sich gründliche Sachkenntnis offenbart.

Zum Schluss entwickelt der Verfasser seine Ansichten darüber, wie Landkarten für die Zwecke der Schule und der Seefahrt am besten zu zeichnen seien, und führt zur Erläuterung Irrtümer an, zu welchen die gebräuchlichen Karten leicht verleiten. In einem Nachwort wird nach einer Erörterung über die Namen, welche die Abbildungen zum Teil ungerechtfertigter Weise führen, die Notwendigkeit betont, nichtssagende Fremdwörter durch deutsche zu ersetzen, wie z. B. conform oder orthomorph durch winkeltreu, aequivalent oder isomer durch flächentreu. Dz.

S. Günther. Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie, für den Unterricht bearbeitet. 3. Aufl. München. Th. Ackermann. IX + 134 S. mit 2 Taf. 8°.

A. J. Pick. Die elementaren Grundlagen der astronomischen Geographie. Gemeinverständlich dargestellt. 2. Aufl. Wien. Manz. XVI + 173 S. mit 2 Sternkarten. 8°.

G. Defforges. Mesure de l'intensité absolue de la pesanteur à Breteuil (Bureau international des poids et mesures). C. R. CXV. 104-106.

Diese Schwerebestimmung ist nach einem von Hrn. Defforges vorgeschlagenen Verfahren ausgeführt worden. Es wurden zwei

Reversionspendel von gleichem Gewicht und von symmetrischer Gestalt in Bezug auf das Centrum ihrer Figur angewandt, die aber auf denselben Schneiden und auf derselben Unterlage schwingen, und deren Schneidenabstände 1 m und 0,5 m betragen. Ausserdem wurden die Beobachtungen im luftverdünnten Raum und bei gewöhnlichem Luftdruck angestellt. Durch dieses Verfahren wird eine Reihe von Fehlern im Resultat direct eliminirt, während sich die Rechnung selbst sehr einfach gestaltet. Die erhaltenen Resultate scheinen eine grosse Genauigkeit zu besitzen. Bö.

---

O. Tumlirz. Die Dichte der Erde, berechnet aus der Schwerebeschleunigung und der Abplattung. Wien. Ber. CI. 1528-1536.

Um das Gesetz der Zunahme der Dichte der Erde von der Oberfläche gegen das Centrum hin abzuleiten, betrachtet der Verf. die Erdoberfläche als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid und nimmt an, dass der ganze Erdkörper durch Ellipsoide, die mit dem genannten Rotationsellipsoid ähnlich liegend und concentrisch sind, in unendlich dünne Schichten geteilt ist von der Beschaffenheit, dass die Dichte derselben Schicht constant, von Schicht zu Schicht aber veränderlich ist. Die Dichte kann dann als eine Function $\varphi(a)$ der halben grossen Axe $a$ des betreffenden homothetischen Ellipsoids angesehen werden. Der Verf. nimmt nun einfach

$$\varphi(a) = \varrho_0 - M\frac{a^2}{A^2},$$

wo $A$ die halbe grosse Axe der Erdoberfläche ist, und wo $\varrho_0$, $M$ Constanten sind. Aus den Potentialausdrücken für die Werte der Schwerkraft am Aequator und am Pol werden nun zwei Gleichungen

$$g_0 = a_1\varrho_0 + b_1 M,$$
$$g_{90} = a_2\varrho_0 + b_2 M$$

abgeleitet, wo die $a$, $b$ Functionen von $A$ und von der Abplattung sind. Aus den Werten, die für $g_0$ und $g_{90}$ aus den Schweremessungen folgen, leitet nun der Verf. die Constanten $\varrho_0$ und $M_0$ ab, die zwar nach den verschiedenen Annahmen über $g_0$ und $g_{90}$

sowie über die Elemente des Erdellipsoides verschieden ausfallen, für die mittlere Dichte der Erde aber Werte geben, die den beobachteten mittleren Dichten sehr nahe kommen. Die Dichte im Mittelpunkte liegt hiernach zwischen 10 und 13. Durch das aufgestellte Dichtigkeitsgesetz werden also zwei Gruppen von Messungen, nämlich die Messungen der Schwerebeschleunigung und die der mittleren Dichtigkeit der Erde, in einfache und, wie es nach den vorliegenden Resultaten scheint, auch befriedigende Verbindung gebracht.

Bö.

M. M. P. Rudski. Note on the level of no strain in a cooling homogeneous sphere. Phil. Mag. (5) XXXIV. 299-301.

Diese Note bezieht sich auf die geologische Theorie der Bergbildung, welche auf der Thatsache beruht, dass, wenn eine Kugel sich abkühlt und zusammenzieht, die am schnellsten sich zusammenziehende Schicht unter der Oberfläche liegt, und dass demgemäss die Oberflächenlagen schrumpfen und schwinden. Gegen diese Theorie ist eingewandt worden, dass die zwangsfreie Schicht der Oberfläche zu nahe liegt, um die Bergbildung zu erklären. Gegenstand der Note ist der Nachweis, dass, wenn die anfängliche Temperatur nicht gleichförmig ist, die zwangsfreie Schicht tiefer liegt. Ist $K$ der Streckmodul in irgend einer Schicht, so hat man

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{\varepsilon}{r^3}\int^{*} r^3 \frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial t}\,dr,$$

wo $\varepsilon$ eine Constante ist und das Integral von der Schicht an bis zu einer solchen Tiefe abwärts erstreckt wird, dass dort keine Temperaturänderung eintritt; $v$ genügt der Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right);$$

daher

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \varkappa\varepsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right).$$

Die Schichten sind gepresst, zwangsfrei oder gedehnt, je nachdem

$$\frac{\partial v}{\partial t} \gtreqless \frac{3\varkappa}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$$

ist. Um den Einfluss der anfänglichen Temperaturverteilung zu

beleuchten, wird die Längeneinheit so gewählt, dass der Kugelradius gleich $\pi$ und die Temperatur des äusseren Mediums Null ist. Bei einer anfänglichen Temperatur von $\sin r/r$ ist $v = e^{-kt}\sin r/r$, und $\partial K/\partial t$ verschwindet, wenn $(3-r^2)\operatorname{tang} r = 3r$. Die Gleichung für die zwangsfreie Fläche wird von $r = 0$ befriedigt, während alle anderen Wurzeln der Gleichung ausser der ersten jenseits der Grenzen des Kugelradius liegen. Von 0 bis $\pi$ ist $\operatorname{tang} r > 3r/(3-r^2)$ und $\partial v/\partial t > 3\varkappa\partial v/r\partial r$. Mithin ist die zwangsfreie Fläche der Lage nach fest, alle Schichten werden gepresst. Das angenommene Temperaturgesetz giebt einen sehr grossen Temperaturgradienten in den oberen Schichten und ist deshalb auf den Fall der Erde nicht anwendbar; aber dies zeigt, dass im allgemeinen die zwangsfreie Fläche tiefer liegt, wenn die Anfangstemperatur von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte hin wächst. Gbs. (Lp.)

---

G. H. Darwin. On an apparatus for facilitating the reduction of tidal observations. Lond. R. S. Proc. LI. 345-389.

Der Verfasser bemerkt, dass viele Copirarbeit, welche bei der Berechnung der Gezeiten erforderlich ist, vermieden werden könnte, wenn die beobachteten Höhen auf bewegliche Stücke geschrieben würden. Aber ein Beobachtungsjahr giebt 8760 stündliche Höhen, und das ordentliche Sortiren und Umsortiren von nahezu 9000 Papierstücken oder Täfelchen dürfte sich als mühsamer und trügerischer erweisen als das wiederholte Copiren der Figuren. Es fiel ihm jedoch ein, dass das Einordnen beweglicher Stücke in handlichen Grenzen gehalten werden könnte, wenn alle 24 Beobachtungen, die sich auf einen mittleren Sonnentag bezogen, zusammen bewegt würden; denn die beweglichen Stücke würden sofort auf 365 zurückgeführt werden und jedes Stück von einer Grösse sein, die sich bequem handhaben liesse. Dieses bewirkt er durch eine Anordnung von Streifen, jeder von 9 Zoll Länge und $\frac{1}{3}$ Zoll Breite, aus künstlichem Elfenbein oder Xylonit gefertigt, das sich als ein geeignetes Material erwies, da es weiss ist, die Schrift von Tusche oder Bleistift annimmt und leicht mit einem feuchten Tuche zu reinigen ist. Cly. (Lp.)

S. Haughton. On the tides of the arctic seas. Part VIII: On the tides of Lady Franklin Sound. Dublin Trans. XXX. 325-346.

Die in dem vorliegenden Aufsatze erörterten Beobachtungen der Gezeiten wurden an Bord des Schiffes „Discovery" vom 16. Sept. 1875 bis 28. März 1876 angestellt. Das Schiff lag im Eise eingeschlossen an der Stelle 81°45′ N. Br., 65° W. L. Die Beobachtungen sind zu jeder Tagesstunde gemacht und nach dem Fourier'schen Satze so bearbeitet worden, dass sie den mittleren Gezeitenspiegel, die täglichen, halbtäglichen und dreitägigen Gezeiten zeigen. Aus den tabulirten und bearbeiteten Beobachtungen sollen die folgenden Schlussergebnisse angemerkt werden: Die lunare Declinationsschwankung des mittleren Gezeitenspiegels ist zu klein, um sich aus den sechsmonatlichen Beobachtungen herleiten zu lassen. Aus den Beobachtungen sind keine wirklichen täglichen Mondgezeiten in der Lady Franklin's Bay ableitbar, dagegen wohl markirte, obschon kleine tägliche Sonnengezeiten, während die halbtäglichen Sonnengezeiten an Höhe nicht viel grösser sind, als die täglichen Sonnenfluten. Gbs. (Lp.)

---

O. Fisher. On theories to account for glacial submergence. Phil. Mag. (5) XXXIV. 337-344.

Wenn ein früher nicht innerhalb ständigen Frostes liegendes Gebiet neuerdings in Eis gehüllt wird, so muss eine entsprechende Abkühlung des Bodens die Folge sein, und eine Depression der Isogeothermen nebst einer Zusammenziehung der Felsen muss sich einstellen. Die Vorstellung, dass diese Zusammenziehung die meiste, wenn nicht die ganze Depression, die zu erklären ist, möglicherweise verursachen könnte, scheint einigen Eistheoretikern aufgestiegen zu sein. Die hier gemachte Berechnung wurde in der Absicht der Prüfung dieser Hypothese unternommen; ihr Ergebnis dürfte andeuten, dass die Erscheinung auf solche Weise nicht zu erklären ist. Die Anfangstemperatur wird in der Form $v = mx + b$ angenommen, wo $v$ die Temperatur in der Tiefe $x$, $m$ die Zunahme bei einer Vergrösserung der Tiefe um die Einheit, $b$ die

mittlere constante Temperatur an der Oberfläche ist, die letztere zu 20° $F$ als das Mittel über dem Gefrierpunkte gerechnet. Vorausgesetzt wird weiter (unter Hinweis auf die Mängel einer solchen Voraussetzung), dass gleich nach der Bildung der Eisdecke die Oberfläche auf den Gefrierpunkt des Wassers kommt und auf ihm verharrt, so lange die Vereisung dauert. Ist dann $V$ die Temperatur in der Tiefe $t$ und wird Lord Kelvin's Schätzung von $\varkappa$ zu 400 angenommen, so genügt

$$V = mx + \frac{2b}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-\mu^2} dm \qquad \left(a = \frac{x}{\sqrt{4\varkappa t}}\right)$$

allen Bedingungen. Eine aus dieser Formel berechnete Abkühlungstabelle wird für Tiefen bis zu 7000 Fuss nach je 1000 Fuss und für die Zeitwerte 1000, 5000, 10000, 15000 Jahre gegeben. Für die Contraction wird dann eine Schätzung gemacht, indem man für den Coefficienten $E$ der Volumencontraction den durch die Mallet'schen Versuche gelieferten Wert 0,0000215 nimmt.

Gbs. (Lp.)

---

P. Schreiber. Untersuchung über das Wesen der sogenannten Bessel'schen Formel sowie deren Anwendung auf die tägliche periodische Veränderung der Lufttemperatur. Leopold. Akad. LVIII. 139-219.

Die mannigfachen periodischen Witterungsvorgänge pflegt man annäherungsweise durch die in der Meteorologie nach Bessel benannte Formel

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

darzustellen. Ist $f(x)$ eine Function, die innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ endlich bleibt, so sind die Coefficienten bekanntlich folgendermassen bestimmt:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx.$$

Liegen nun für irgend eine periodische Erscheinung, die durch die Function $f(x)$ dargestellt werden soll, Beobachtungen vor, so bestimmt man nach Bessel eine solche Anzahl von Coefficienten

$a$, $b$ nach der Methode der kleinsten Quadrate, dass die übrigbleibenden Fehler der Beobachtungen ihren Unsicherheiten entsprechen. Weihrauch hat dagegen vorgeschlagen, aus $2m+1$ Beobachtungen die $2m+1$ ersten Coefficienten $a$, $b$ streng zu berechnen; er hat auch die dazu nötigen Formeln abgeleitet.

Der Verf. macht nun folgenden Vorschlag:

Da die Coefficienten der Reihe durch bestimmte Integrale definirt sind, so entspricht es dem Wesen der Aufgabe am meisten, wenn man sie bei ihrer Herleitung als Näherungswerte für diese Integrale auffasst und sie demgemäss aus den Formeln

$$a_m = \frac{2}{n} \sum_1^n y_m \cos mx; \quad b_m = \frac{2}{n} \sum_1^n y_m \sin mx$$

berechnet. Für den Fall, dass durch die Beobachtungen das Intervall $2\pi$ in $n$ gleiche Teile geteilt wird, und dass die Gewichte der Beobachtungen einander gleich sind, geben übrigens alle drei Methoden dieselben Resultate. Der Verf. stellt noch eine Reihe anderer und theoretischer Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und über die drei erwähnten Arten ihrer Anwendung an, die wir hier aber übergehen müssen. Schliesslich werden an dem Beispiel der täglichen periodischen Veränderung der Lufttemperatur ausführlich die Ansichten und die Entwickelungen des Verfassers erläutert. Bö.

---

Grossmann. Die Berechnung wahrer Tagesmittel der Temperatur aus Beobachtungen um $8^a$, $2^p$, $8^p$. Meteor. Zeitschr. IX. 121-128.

Setzt man $n = \frac{1}{3}(8^a + 2^p + 8^p)$, nimmt ferner für $k$ eine näher zu bestimmende Constante, so hat Hr. Köppen zur Berechnung der Mitteltemperatur die Formel vorgeschlagen: $M = n - k(n - \text{Min.})$. Der Aufsatz beschäftigt sich mit der Untersuchung, ob diese Art der Mittelbildung gegen die bisherige Berechnungsart einen Fortschritt aufweist. Das Ergebnis lautet dahin, vorläufig sei das alte Verfahren bei der Berechnung der wahren Mittel beizubehalten, indem die Constanten $k$ einstweilen nicht genügend sicher zu be-

stimmen sind, um mit Sicherheit durch Zugrundelegung der neuen Formel einen Fortschritt gegen früher zu erzielen. Lp.

---

A. Sprung. Zur meteorologischen Photogrammetrie. Meteor. Zeitschr. IX. 241-250.

Für die Berechnung der durch die Photographie erhaltenen Abbildungen meteorologischer Erscheinungen löst der Verfasser verschiedene Aufgaben, von denen die erste lautet: Wie gross ist der Winkel, unter welchem irgend eine auf der Mattscheibe gezeichnete gerade Linie, vom optischen Mittelpunkte des Objectivs aus gesehen, erscheint? Die bei der Beantwortung dieser Frage gefundenen Formeln werden auf die Berechnung der Photographien meteorologischer Erscheinungen, insbesondere des elliptischen Sonnenbildes, angewandt. Lp.

---

E. Mascart. Sur la masse de l'atmosphère. Almeida J. (3) I. 97-103; C. R. CXIV. 93-99; Meteor. Zeitschr. IX. 111-113.

Für die Masse der Atmosphäre ergiebt sich die Formel: $M = 4\pi R^2 . \varrho_0 \cdot \frac{K}{R}$, wo $R$ den Erdradius, $\varrho_0$ die Dichtigkeit der Luft in der Höhe 0 (während die in der Höhe $h$ mit $\varrho$ bezeichnet wird), und $K$ die Höhe einer homogenen Luftsäule von der Dichtigkeit $\varrho_0$ und derselben Gesamtmasse bedeutet. Wird $\frac{h}{R+h} = s$ gesetzt und das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit in der Form $\frac{\varrho}{\varrho_0} = f(s)$ angenommen, so wird $\frac{K}{R} = \int_0^1 \frac{f(s)ds}{(1-s)^4}$. Setzt man nun voraus, dass $f(s) = (1-s)^4 . e^{-a.s}$, so folgt $\frac{K}{R} = \frac{1}{a}(1-e^{-a})$ oder annäherungsweise $\frac{K}{R} = \frac{1}{a}$. Aus den Beobachtungen des Luftdrucks und der Temperatur an verschiedenen Höhen- und den correspondirenden Thal-Stationen ergiebt sich für $a$ der Mittelwert 660, so dass $\frac{K}{R} = \frac{1}{660}$, während $\frac{H}{R} = \frac{1}{769}$ wäre, wenn $H$ die

ohne Rücksicht auf die Schwereänderung berechnete „reducirte Höhe“ der Atmosphäre darstellte; also $\frac{K}{H} = 1 + \frac{1}{6}$.

Sbt.

---

Le Goarant de Tromelin. Sur la répartition calorifique de la chaleur du Soleil à la surface des hémisphères nord et sud du globe terrestre. C. R. CXV. 409-411.

Verf. sucht zu beweisen, dass die nördliche Halbkugel während des Frühlings und des Sommers genau ebenso viel Wärme von der Sonne empfängt wie die südliche während unseres Herbstes und Winters, und dass die Unterschiede der Mitteltemperatur durch Verschiedenheit in der Ausstrahlung zu erklären sind.

Sbt.

---

W. von Bezold. Zur Thermodynamik der Atmosphäre. Vierte Mitteilung. Berl. Ber. 1892. 279-309; Meteor. Zeitschr. IX. 320-336.

In der Fortsetzung der früher unter gleichem Titel veröffentlichten Untersuchungen (S. F. d. M. XX und XXII) behandelt der Verfasser die Zustände der Uebersättigung des Wasserdampfes und der Ueberkaltung des Wassers in der Luft, von denen der eine jedenfalls möglich, der andere sicher nachgewiesen ist. Im Anschluss daran wird die Gewitterbildung untersucht, wobei die Unterschiede zwischen Wirbel- und Wärmegewittern scharf hervorgehoben werden. Die Resultate werden in die folgenden Sätze zusammengefasst:

„Wenn in der Atmosphäre übersättigter Dampf oder überkaltetes Wasser vorhanden ist, so muss die plötzliche Auslösung solcher Zustände eine schnell verlaufende Druckschwankung nach sich ziehen, die sich in einem raschen Steigen und nachfolgenden Sinken des Barometers kenntlich machen muss. Fallen sehr bald nach der Auslösung abkühlende Niederschläge, so wird das Sinken des Barometers infolge des durch die Abkühlung bedingten Zusammendrängens der Druckflächen und des hierdurch bewirkten

Nachströmens von Luft in der Höhe vermindert oder auch ganz verhindert, und es tritt eine Druckstufe an die Stelle der Druckschwankung. Derartige Schwankungen des Luftdrucks sowie Druckstufen treten bekanntlich sehr häufig bei Gewittern auf, und zwar in Grössen, wie sie sich ohne Schwierigkeit auf Uebersättigung oder Ueberkaltung zurückführen lassen. Thatsächlich sind auch bei Gewittern die Bedingungen erfüllt, die das Zustandekommen solcher labilen Zustände erleichtern; insbesondere dürften Ueberkaltungen in den höher liegenden Teilen der Gewitterwolken sehr häufig vorkommen. Da die Auslösung solcher Zustände plötzliche Erwärmung einzelner Stellen im Gefolge haben muss, so dürften sich aus solchen Vorgängen die eigentümlichen Gestaltsänderungen erklären, die man an den Gewittercumuluswolken beobachtet, und die man nicht wohl als blosse Folgeerscheinung eines stetig aufsteigenden Stromes ansehen kann, selbst wenn dieses Aufsteigen in Begleitung von Wirbelbewegungen erfolgt. Auch die Entstehung von Graupeln und Hagel lässt sich ohne Schwierigkeit auf Ueberkaltung zurückführen.“ Sbt.

---

W. von Bezold. Der Wärmeaustausch an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre. Berl. Ber. 1892. 1139-1178.

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, das ebenso schwierige wie wichtige Problem der Bestimmung des Wärmeaustausches an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre seiner Lösung näher zu bringen. Von den in Angriff genommenen Untersuchungen, in denen die von der Sonne gelieferten Wärmemengen von ihrem Eintritt in die Atmosphäre bis zu ihrem Wiederaustritt nach dem Weltenraum verfolgt werden sollen, wird hier die erste Mitteilung veröffentlicht.

In einer Einleitung wird ein vergleichender Ueberblick gegeben über die zu den verschiedenen Wirkungen an der Erdoberfläche verbrauchten Wärmemengen, wobei besonders hervorgehoben wird, welchen bedeutenden Anteil die Verdunstung des Wassers beansprucht.

Demnächst werden, indem der Wärmezustand der Erde als periodisch stationär angesehen wird, einige allgemeine Sätze aufgestellt und in Formeln gebracht. Die allgemeinen Betrachtungen führen zu dem Ergebnis, dass bei den Untersuchungen über den Wärmehaushalt drei wesentliche Vorgänge zu berücksichtigen sind: 1) Ein- und Ausstrahlung mit Einschluss der Reflexion, 2) Zu- und Abnahme der Energie an den einzelnen Teilen der Erdoberfläche und in der Atmosphäre, 3) die Convection, d. h. die Uebertragung der Wärme durch Luft und Wasser.

Da der erste dieser Vorgänge schon öfter bearbeitet ist, so will der Verf. den zweiten und dritten näher untersuchen, und er behandelt in dieser ersten Mitteilung noch den „Wärmeaustausch im Erdboden".

Es ergiebt sich die Formel $u_2 - u_1 = C \cdot H(\Theta_2 - \Theta_1)$, d. h. die Aenderung der Energie im Erdboden während eines bestimmten Zeitraumes, bezogen auf die Oberflächeneinheit, ist gleich der Aenderung der Mitteltemperatur $(\Theta_2 - \Theta_1)$ des Bodens von der Oberfläche bis zu der Tiefe $(H)$, in der die Schwankungen unmerklich werden, multiplicirt mit dem Wasserwerte eines Prismas von der Grundfläche 1, das man sich bis zu dieser Tiefe aus dem Boden (dessen Wärmecapacität für die Volumeneinheit $C$ ist) ausgeschnitten denkt. Die in dem Boden aufgespeicherte Energie erreicht demnach ihre Extremwerte gleichzeitig mit den Mittelwerten der Bodentemperatur, wenn bei deren Bestimmung die Temperaturen bis zu der Tiefe berücksichtigt werden, wo die Schwankungen aufhören. Durch Betrachtung der Curven, welche die zur selben Zeit in den verschiedenen Tiefen herrschenden Temperaturen darstellen, der „Tautochronen", wie sie der Verf. nennt, wird das Resultat gewonnen, dass es zur Bestimmung des jährlichen Wärmeaustausches genügt, wenn man die Temperaturverteilung zu jenen Zeiten des Jahres (und für den Tag gilt das Gleiche) kennt, wo die Wärmeaufnahme in -Abgabe übergeht und umgekehrt. Eine grosse Schwierigkeit für die Bestimmung der ausgetauschten Wärmemengen (die im Vergleich zu den für die Verdunstung der Niederschläge erforderlichen Mengen nur klein sind) liegt darin, dass der Wert von $C$ wenig bekannt und in den obersten Schichten wegen

des wechselnden Wassergehaltes fortwährenden Schwankungen unterworfen ist. Sbt.

---

F. DE SAINTIGNON. Le mouvement différentiel dans l'Océan et dans l'atmosphère: marées d'eau, marées d'air. C. R. CXV. 1340-1342.

Der Verf. stellt folgenden Satz auf: Wenn eine Flüssigkeit der Wirkung von horizontalen Kräften unterworfen ist, die auf die benachbarten Teilchen in ungleicher Stärke wirken, so dass sie nach einer Richtung beständig wachsen oder abnehmen, so entstehen an der Oberfläche Niveaudifferenzen, die der Differenz der auf benachbarte Teilchen wirkenden Kräfte und der Tiefe der Flüssigkeit proportional sind, und zwar hebt sich das Niveau nach der Seite, wo die Kräfte grösser werden, unabhängig davon, welches die allgemeine Richtung der wachsenden oder abnehmenden Kräfte sei. Durch solche Molecularbewegung, nicht durch eine aus der Verticalwirkung hervorgehende Strömung, glaubt der Verf., dass Sonne und Mond die Erscheinungen der Gezeiten hervorbringen. Auch die Meeresströmungen und ferner die Passate, Cyklonen, Tornados etc., selbst die Sonnenflecke glaubt er nach dieser Theorie erklären zu können. Sbt.

---

W. TRABERT. Die Wärmestrahlung der atmosphärischen Luft. Meteor. Zeitschr. IX. 41-46.

Nimmt man nach Maurer (F. d. M. XVIII. 1886. 1075) in erster Annäherung die von der Luft (Temperatur $T$) ausgestrahlte Wärmemenge der Differenz der Temperaturen $T$ und $T_0$ (Temperatur einer idealen Fläche) proportional: $dQ = -\sigma(T-T_0)dt$, so erhält man die alte Lambert'sche Formel $T = T_0 + Ab^t$. Bezieht sich $dQ$ auf ein Kilogramm Luft, so ist $\log b = -\log e \frac{\sigma}{c}\cdot$ Durch die Bearbeitung eines grossen Beobachtungsmaterials hat der Verfasser $\log b$ nahezu constant und zwar gleich $-0{,}066$ gefunden, woraus der Satz folgt, dass für atmosphärische Luft (und wohl allgemein für Gase) die Strahlung der Masseneinheit der absoluten

Temperatur einfach proportional und von der Dichte der Luft unabhängig ist. Die Temperatur $T_0$ der idealen Hülle, durch welche man sich die Strahlung aller umgebenden Körper ersetzt denken kann, ergiebt in Celsiusgraden: $t_0 = -3^\circ{,}4 + 1{,}003\,t_m$, wo $t_m$ die Mitteltemperatur des Ortes ist. Die Wärme, welche der Masseneinheit Luft an irgend einem Orte durch Strahlung (abgesehen von der Sonnenstrahlung) zugeführt wird, ist der mittleren Temperatur $T_m$ dieses Ortes proportional. Lp.

---

W. Trabert. Zur Theorie der Erwärmung herabsinkender Luft. Meteor. Zeitschr. IX. 141-143.

Betrachten wir in einem bestimmten Niveau die Masseneinheit der Luft von der Temperatur $T$ zur Zeit $t$, und ist die Luft in absteigender Bewegung mit der Geschwindigkeit $u$ begriffen, so wird nach Ablauf der Zeit $dt$ ein anderes Luftquantum, welches sich zur Zeit $t$ in einer um $udt$ grösseren Höhe befand, die Stelle des ursprünglich betrachteten einnehmen und eine andere Temperatur $T+dT$ aufweisen. Ist $a$ die Temperaturabnahme mit der Höhe, so beträgt zur Zeit $t$ der Unterschied des Wärmeinhaltes beider Luftmengen $caudt$ ($c$ specifische Wärme der Luft). Während des Zeitelementes $dt$ wird der Wärmeinhalt des herabsinkenden Luftquantums in Folge der Aenderung des Niveaus um $Audt$ vergrössert ($A = 1/424$); dann aber wird dieses Luftquantum in der Zeit $dt$ auch noch die normale Aenderung seines Wärmeinhaltes $dQ$ (durch Einstrahlung, Ausstrahlung, Wärmezufuhr durch Convection) erleiden. Der Unterschied des Wärmeinhaltes beider Luftmengen ist somit gegeben durch die Gleichung:

$$cdT = -caudt + Audt + dQ.$$

Aus der Erörterung dieser Differentialgleichung zieht der Verf. einige Folgerungen für die Vorgänge in der Atmosphäre.

Lp.

---

M. Möller. Die Ursache atmosphärischer Strömungen. Meteor. Zeitschr. IX. 220-225.

Bemerkungen zu dem Artikel von Werner v. Siemens: „Zur

Frage der Ursachen der atmosphärischen Ströme". (F. d. M. XXIII. 1891. 1249). Lp.

---

MOHOROVIČIĆ. Bestimmung der wahren Bewegung der Wolken. Meteor. Zeitschr. IX. 145-150.

Der Artikel ist ein kurzer Auszug aus der in den Sitzungsberichten der Agramer Akademie, Bd. XCV (1889) erschienenen Abhandlung: „Die Bestimmung der horizontalen und verticalen Componente der wahren und scheinbaren Geschwindigkeit der Wolken aus zwei beobachteten scheinbaren Geschwindigkeiten mit Hülfe der Camera obscura". Die benutzten Formeln ergeben sich durch einfache trigonometrische Rechnungen. Lp.

---

L. DE MARCHI. Sulla teoria dei cicloni. Lomb. Ist. Rend. (2) XXV. 320-334.

Der Verfasser giebt hier eine vorläufige Mitteilung von der Fortsetzung seiner Untersuchungen, die unter dem Titel „Ricerche sulla teoria matematica dei venti" in den Annali di meteorologia italiana von 1882 und 1884 veröffentlicht sind. Er geht aus von einer Formel, welche die Dichtigkeitsänderung der Luft in einer Cyklone darstellt, discutirt diese und kommt zu dem Satze: Folgt man einer Isotherme so, dass man die höhere Temperatur zur Rechten hat, so findet man bis zum Centrum der Cyklone Verdichtung, von da ab Verdünnung. Nach einigen weiteren Folgerungen wird eine Gleichung für die Druckänderung entwickelt und discutirt. Daraus ergiebt sich ferner eine Gleichung für die Geschwindigkeit, mit der das Centrum einer Isobare, d. h. der Mittelpunkt des in der Richtung der Bewegung liegenden Durchmessers, fortschreitet. Aus der erhaltenen Formel werden folgende Sätze abgeleitet: a. Die inneren Isobaren verschieben sich mit geringerer Geschwindigkeit als die äusseren. b. Die Geschwindigkeit der Cyklone ist proportional dem thermischen Gradienten am Centrum. c. Die Geschwindigkeit der Cyklone ist um so grösser, je niedriger die Temperatur ist. d. Die Axe der Cyklone ist im allgemeinen nach rückwärts geneigt.

Hr. Oberbeck, der diese Mitteilung in der Meteor. Z. (1892, 491) bespricht, erhebt einige Bedenken gegen die Richtigkeit der Rechnung. Insbesondere erscheint ihm die Hypothese fraglich, dass die Bewegung ausschliesslich horizontal sei und die verticale Bewegung ganz vernachlässigt werden könne. Sbt.

---

MAXWELL HALL. Tropical cyclones. Nature XLVI. 393-394.

Der Verf. teilt einige Formeln mit, welche er zur Berechnung des Herannahens tropischer Cyklonen aus den meteorologischen Beobachtungen für Jamaica aufgestellt hat. Lp.

---

H. FAYE. Nouvel échec de la théorie ascendante des cyclones. — Échec définitif de la théorie du mouvement centripète et ascendant dans les cyclones. C. R. CXIV. 1233-1236, CXV. 482-485.

Verf. findet in Arbeiten von Hann, Morris und Dallas eine Bestätigung seiner Theorie, nach der die Tromben, Tornados und Cyklonen in den oberen Strömungen der Atmosphäre entstehen. Sbt.

---

M. BRILLOUIN. Régions tempérées; conditions locales de persistance des courants atmosphériques; courants dérivés; origine et translation de certains mouvements cycloniques. C. R. CXIV. 203-205.

Erörterung der Gleichungen für die Bewegung eines Massenteilchens auf der Erde, insbesondere für den Fall, dass die verticale Geschwindigkeit im Vergleich zur horizontalen sehr klein ist. Sbt.

---

J. THOMSON. On the grand currents of atmospheric circulation. Lond. R. S. Phil. Trans. CLXXXIII. 653-684.

---

# Anhang.

W. Dyck. Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben im Auftrage des Vorstandes der Vereinigung. München. XVI + 430 S. gr. 8°. (1892.) — Nachtrag. München. X + 135 S. (1893.)

Der Hauptkatalog war für die im Jahre 1892 geplante Ausstellung zu Nürnberg hergestellt worden. Nachdem die Apparate für diese Ausstellung bereits an Ort und Stelle eingetroffen waren, musste die Eröffnung unterbleiben, weil wegen der Choleragefahr die Versammlung zu Nürnberg abgesagt wurde. Bei der im folgenden Jahre zu München im September stattfindenden Zusammenkunft der Deutschen Mathematiker-Vereinigung musste dann der Nachtragskatalog zur Ergänzung des im Vorjahre bereits gedruckten Hauptkatalogs erscheinen. Wenn diese beiden Schriften nichts weiter wären als trockene Ausstellungskataloge, so würde ihre Besprechung im Jahrbuche überflüssig sein. In der Gestalt aber, welche sie unter der Leitung des Herrn Dyck durch das Zusammenwirken einer grossen Anzahl von Mathematikern erhalten haben, sind sie von bleibendem Werte und sollten in allen Bibliotheken vorhanden sein, welche die bedeutendere mathematische Litteratur ihren Lesern liefern wollen. Der erste Teil des Hauptkatalogs enthält auf 136 Seiten Originalartikel verschiedener Autoren über solche Themata, welche zur Ausstellung in Beziehung stehen.

Ueber diese Aufsätze ist im vorliegenden Bande des Jahrbuchs an geeigneter Stelle berichtet worden.

Der zweite Teil bildet den eigentlichen Ausstellungskatalog. Bei der Zusammenbringung der ausgestellten Gegenstände hatte sich nicht bloss in Deutschland, sondern auch im Auslande, besonders in England (unter Lord Kelvin, Greenhill und Henrici) eine so lebhafte Teilnahme für den Ausstellungsplan gezeigt, dass das Verzeichnis der eingelieferten Gegenstände allein schon in manchen Abteilungen eine vollständige Uebersicht der auf diesem Gebiete ersonnenen Vorrichtungen und Apparate liefert. Nun ist aber nicht eine blosse nackte Aufzählung der einzelnen Nummern beliebt worden; sondern, sobald es sich ermöglichen liess, ist eine Abbildung beigegeben, eine Beschreibung und eine Theorie der Apparate. Daher erscheint der Katalog an vielen Stellen wie eine illustrirte Sammlung kleiner mathematischer Abhandlungen, und die Namen der Verfasser derselben sind überall hinzugesetzt. So findet man denn auch in den neuesten mathematischen Veröffentlichungen wiederholt Verweise auf „Dyck's Katalog“.

Es ist natürlich nicht möglich, alle die Mitarbeiter hier aufzuzählen, welche solche wissenschaftlichen Beiträge zu den Katalogen geliefert haben; das Verzeichnis der Mitarbeiter des Hauptkatalogs umfasst 74 Namen, das des Nachtrags 40, die sich aber fast alle in dem ersteren Verzeichnis ebenfalls vorfinden. Die Vorrede hebt besonders die Verdienste der Herren Mehmke und Boltzmann um die auf Arithmetik (Rechenmaschinen) und mathematische Physik bezüglichen Abteilungen hervor. Ebenso wenig darf Referent es wagen, aus der Fülle des Gebotenen einzelne Schilderungen, Beschreibungen oder Theorien als besonders gelungen zu bezeichnen. Man dürfte ihn leicht der Parteilichkeit oder zu grosser Weitschweifigkeit zeihen. Die Rede, welche Hr. Dyck in der feierlichen Sitzung zur Eröffnung der Münchener Ausstellung hielt, und die im dritten Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung S. 39-56 abgedruckt ist, giebt von der Ausstellung und daher von dem Inhalt des Katalogs eine anschauliche Uebersicht. Wir begnügen uns damit, zum Schlusse unserer Anzeige die Einteilung des Inhaltes herzusetzen:

I. Abteilung: 1. Abschnitt. Arithmetik. 2. Abschnitt. Algebra, Functionentheorie. 3. Abschnitt. Integralrechnung.

II. Abteilung: Geometrie.

III. Abteilung: Angewandte Mathematik. 1. Abschnitt. Mechanik. 2. Abschnitt. Mathematische Physik. 3. Abschnitt. Verschiedene technische Anwendungen. Lp.

---

Alfons Cappilleri. Theorie eines Planimeters auf Grund der allgemeinen Bewegung. Z. Oestr. Ing. u. Arch. XLIV. 25-27.

Die Theorie beruht auf dem leicht zu begründenden Satz: Wenn sich eine Strecke in der Ebene so bewegt, dass ihre Endlage mit der Anfangslage identisch wird, so ist die Summe der zur Strecke normalen Bewegungscomponenten irgend eines Punktes derselben proportional der Differenz der von den Endpunkten beschriebenen Flächen, vermindert um eine Constante.

Dieser Satz wird zunächst auf das Polarplanimeter von Amsler angewandt. Den Fehler, welchen eine schiefe Stellung der Rolle veranlasst, bestimmt der Verfasser mit Hülfe des Satzes: Ist eine der Curven ein Kreis und geschieht die Umfahrung in zwei Lagen der Strecke, so ist die Differenz der Flächenräume eine lineare Function der beiden Summen der schiefen Bewegungscomponenten. Dasselbe Gesetz gilt auch, wenn die beiden umfahrenen Curven eine gemeinschaftliche Symmetrieaxe besitzen. F. K.

---

R. Maschke. Ueber die Abflussmenge bei vollkommenen Ueberfallwehren und Entwickelung neuer Formeln. Centralbl. d. Bauverw. XII. 175-176.

J. Labes, Montigny, Engels. Bemerkungen hierzu. Ibid. 254-255.

Die Entwickelungen des Herrn Maschke enthalten offenbare Unrichtigkeiten, welche seine Resultate auch für denjenigen unbrauchbar machen, welcher sich mit den in der technischen Hydraulik üblichen Betrachtungen abzufinden weiss. F. K.

E. R. MÜLLER. Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hülfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet. Stuttgart. Julius Maier. 32 S. gr. 8°.

Wie vor dreissig Jahren in den Schulen von den alten siebenstelligen Tafeln der Uebergang zu fünfstelligen erst allmählich und gegen den Widerspruch mancher älteren Lehrer gemacht wurde, so wird in der Gegenwart für Abschaffung der fünfstelligen und Einführung vierstelliger Tafeln gekämpft. Die vorliegenden kartonnirten Tafeln in grossem Formate bringen für 60 Pfennig alle für den Schulgebrauch wünschenswerten Zahlen. Zur Ausnutzung des Raumes sind auf den ersten 19 Seiten neben den Haupttafeln noch manche Nebentafeln abgedruckt. Ref. möchte glauben, dass dieses Nebeneinander störend ist, besonders da hierbei infolge der gewählten Einrichtung z. B. die Tafel der Logarithmen über 300 in viel kleineren Typen gedruckt ist als die der Logarithmen unter 300. Lp.

Weitere Litteratur.

V. ADAM. Taschenbuch der Logarithmen für Mittelschulen und höhere Lehranstalten. 18. Aufl. Wien. Bermann & Altmann, Verl. Cto. in Komm. XI u. 98 S. 16°.

C. BREMIKER's logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen. 6. Aufl., besorgt von A. Kallius. Berlin. Weidmann'sche Buchhandlung. 184 S. 8°.

F. DOMKE. Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln, nebst Erklärung und Gebrauchsanweisung für die Königl. Preuss. Navigations-Schulen. Hrsg. im Auftrage des K. Pr. Ministeriums für Handel und Gewerbe. 9. Aufl. v. Decker's Verl. VII + L + 373 S. 8°.

F. G. GAUSS. Fünfstellige, vollständige, logarithmische und trigonometrische Tafeln. 36. und 37. Aufl. Halle. Strien Verl. 162 + 35 S. 8°.

J. A. Müller-Bertosa. Anleitung zum Rechnen mit dem logarithmischen Rechenschieber, durch Beispiele erläutert. Zürich. Meyer & Zeller. 14 + 55 S. u. 2 Taf. 8°.

A. M. Nell. Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen, nebst den Logarithmen für Summe und Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind, sowie einigen anderen Tafeln, mit einer neuen, die Rechnung erleichternden Anordnung der Proportionalteile. 7. Aufl. Darmstadt. Bergsträsser Verl. XX + 104 S. 8°.

O. Schlömilch. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Wohlfeile Schulausgabe. 11. Aufl. Braunschweig. Vieweg und Sohn. IV + 151 S. 8°.

J. Schnellinger. Fünfstellige Logarithmen für die Zehner-Logarithmen der natürlichen und trigonometrischen Zahlen. Wien Manz. VII + 146 S. 8°.

O. Seiffert. Logarithmische Hülfstafel zur Berechnung der Fehlergleichungs-Coefficienten beim Einschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate. Halle. Strien Verl. 19 S. Lex. 8°.

G. Frhr. v. Vega's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Neue Ausgabe. Bearb. von C. Bremiker. 74. Aufl. von F. Tietjen. Berlin. Weidmann'sche Buchhdlg. XXVIII + 575 S. 8°.

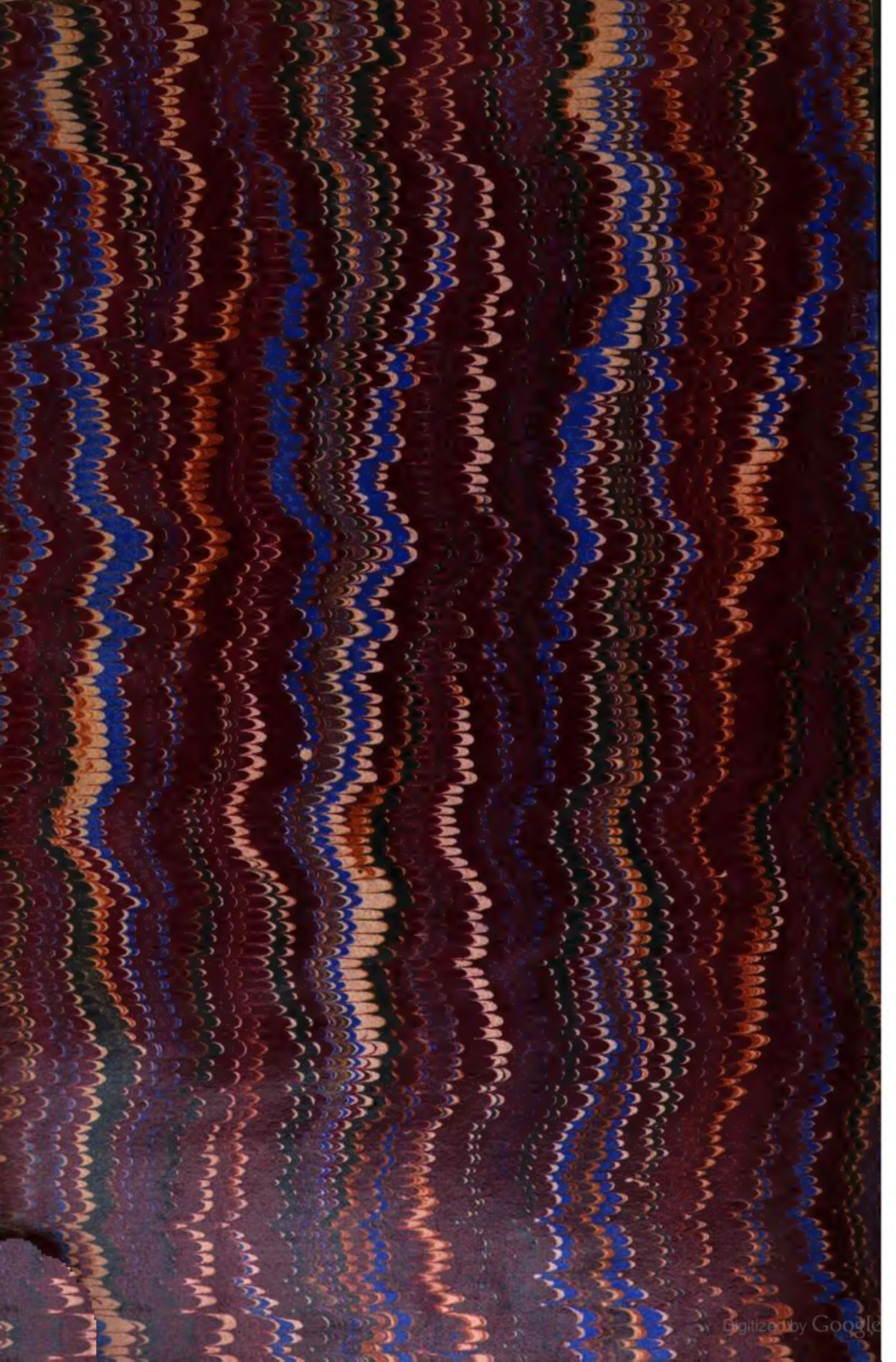
F. A. Westrick. Fünfstellige Logarithmen für den Schulgebrauch. Münster. Aschendorff'sche Buchh. 125 S. 8°.

J. Zech. Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen, für sieben Stellen berechnet. (Sonderdr.) 3. Aufl. (S. 633-836.) Berlin. Weidmann'sche Buchhandl. 8°.

# Namenregister.

(Diejenigen Schriften, deren Verfasser ohne Bezeichnung geblieben sind, wurden in diesem Register unter „Ungenannt" eingereiht.)

# Berichtigungen.

---

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 29 | Zeile | 6 | von | unten | lies | Hoffmann Z. XXIII statt XXXIII. |
| „ | 107 | „ | 6 | „ | oben | „ | Hamb. Mitt. III statt II. |
| „ | 128 | „ | 4 | „ | unten | „ | C. Weltzien statt O. Weltzien. |
| „ | 250 | „ | 9 | „ | oben | „ | E. B. Elliott statt E. R. Elliott. |
| „ | 560 | „ | 7 | „ | „ | „ | orologio statt orologia. |
| „ | 597 | „ | 4 | „ | unten | „ | Russell statt Russel. |
| „ | 847 | „ | 9 | „ | „ | „ | statischer statt statistischer. |
| „ | 971 | „ | 6 | „ | „ | „ | $C-\int\frac{e^{-\frac{u}{\lambda}}}{u}$ statt $C-\int\frac{du}{u}e^{-\frac{u}{\lambda}}$. |
| „ | 1019 | „ | 1 | „ | „ | „ | Wiedemann Ann. XLVII statt LXVII. |
| „ | 1021 | „ | 10 | „ | oben | „ | „ „ XLVII „ XLVIII. |